S. 1109. B2

MISCELLANEA TAURINENSIA.

TOMUS ALTER.

S. 1109. B. 2.

MÉLANGES

DE

PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE

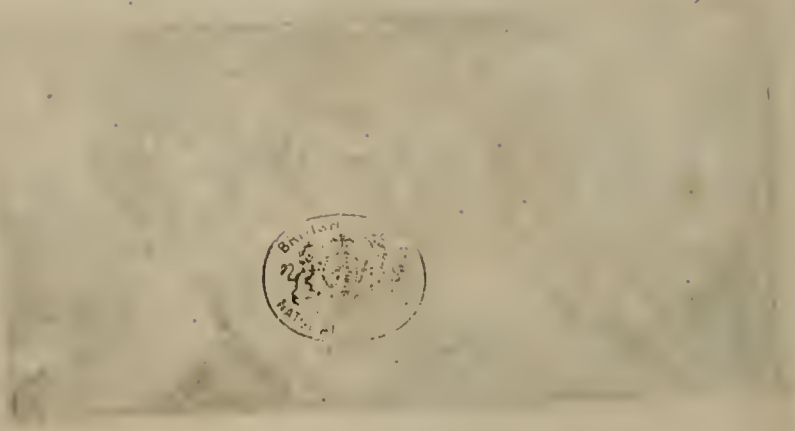
DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1760—1761.

A TURIN,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
AVEC PERMISSION.



TABLE

Des Mémoires contenus dans ce Volume.

ALBERTI HALLER *Emendationes & Auctaria ad ſtirpium helveticarum hiſtoriam* . . . . . *pag.* 3.

CAROLI ALLIONI *Synopſis methodica ſtirpium horti Taurinenſis* . . . . . *p.* 48.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA *De motibus Electricis experimentum* . . . . . *p.* 77.

JOHANNIS BAPTISTAE GABER *Experimentorum de putrefactione humorum animalium* Specimen ſecundum, *in quo præcipue agitur de ſedimento ſeri purulento, ac membrana pleuritica.* . . . . . *p.* 80.

Réfléxions pour ſervir de ſuite aux mémoires ſur le fluide Elaſtique de la poudre à Canon par M. LE COMTE SALUCE *p.* 94

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA *De frigore ex evaporatione, & affinibus phœnomenis nonnullis* . . . . *p.* 143

EJUSDEM *De cauſſa extinctionis flammæ, & animalium in aere intercluſorum* . . . . . *p.* 168

FELICIS VALLE *Taurinenſis florula Corſicæ edita a* CAROLO ALLIONO . . . . . *p.* 204

Addition aux réfléxions ſur le fluide Elaſtique par M. DE SALUCE . . . . . *p.* 216

Lettre de M. EULER A M. DE LA GRANGE *contenant des recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu Elastique* . . . . . *p.* 1

Nouvelles recherches sur la nature & la propagation du son par M. DE LA GRANGE . . . . . *p.* 11

Essai d' une nouvelle Methode pour déterminer les maxima *&* minima *des formules intégrales indéfinies par* M. DE LA GRANGE . . . . . *p.* 173

Application de la methode précédente à la solution de différens problèmes de Dynamique par M. DE LA GRANGE *p.* 196

Sur les principes fondamentaux de la méchanique par M. le CHEVALIER DAVIET DE FONCENEX . . *p.* 299

Addition à la premiére partie des recherches sur la nature & la propagation du son imprimées dans le volume précédent par M. DE LA GRANGE. . . . . *p.* 232

Eclaircissemens pour le mémoire sur les quantités imaginaires inséré dans le volume précédent par M. DE FONCENEX *p.* 337

De l' infini absolu considéré dans la grandeur par le PERE GERDIL *Barnabite* . . . . . *p.* 1

Algebræ philosophicæ in usum artis inveniendi Specimen primum LUDOVICI RICHERI . . . . . *p.* 46

Observation sur le cours du Pô , avec des recherches sur les causes des changemens qu' il a souffert par M. CARENA *p.* 64

ALBERTI

ALBERTI HALLER

EMENDATIONES ET AUCTARIA

AD

STIRPIUM HELVETICARUM

HISTORIAM.

INvitatione Sociorum praeſtantiſſimorum gratus utens, CIGNA *celeberrime, quae ad claſſes naturales Tetrapetalarum, ſiliquoſarum, Papilionacearum, Didynamiarum utriuſque generis, Dipſacearum, floreque compoſito corrigenda & addenda viſa ſunt, breviter expono, dum quae ex incerta ſpe ſenii mei pendet, majoris operis editionem ſecundis curis praeparo. Aliqua nova, multa emendatiora hic reperiuntur, poſtquam plantarum rariorum in locis natalibus lectarum mihi abunde copia facta eſt. Certo carptiones aliquas vitavero, ſi quae minus recte olim ſcripſi, ipſe non monitus correxero. Rupe d. 24. Decembris 1759.*

PLANTAE SILIQUOSAE, TETRAPETALAE TETRADYNAMIAE LINN.

1. RABA *foliis hirsutis incanis, radicalibus ovatis Enum. helv. n. 2. p. 539.*

Rarior reliquis in *Chaux ronde vallis Ormond desus*, & in M. *Fouly* reperta. Folia rosulas ad terram efficiunt, fere ut *Aretia villosa*, pariter ovata, integerrima, hirsuta, peculiari modo flaccida. Caulis, ut in *Draba vulgatissima*, unum, duo, tria folia, aut nullum etiam producit, prima ovato lanceolata, deinde longiora. Flores in singulo caule, sex & ultra, calycibus hirsutis, petalis incisis albis fructus similis vulgari, glaber, in utroque loculo 10. & 11. semina continet, & tubam conservat, sed brevem, & capitatam.

2. CLYPEOLA *perennis foliis ovatis, scabris, calyce deciduo.*

Jonthlaspi luteo flore incanum discoides umbellatum montanum COLUMN. *Ecphras. p. 281. ic. p. 280.*

Non vulgarem in Helvetia plantam abunde legi ad pedem rupium arenosi lapidis *Gysenau* prope pontem Emmae fl. Descriptionem, quae in *Enum. helv. p. 540. n. 2.* nulla est, nunc addo.

Ex una radice, quae fibrosissima est, prodeunt caules innumerabiles, semierecti, simplices, dodrantales, hirsuti. Folia in petiolo folioso dilatata, obtusa, ovatis longiora; alba, scabra, hirsutie tecta. Flores secundum caulem in petiolis semiuncialibus, spicati. Calycis folia quatuor, ex ovatis lanceolata, deorsum paullum turgida, pallide flava, decidua. Petala multo majora, quam in vulgari specie, ex ungue latescunt, ambitu cordiformi, flava. Stamina eminentia majora quatuor, duo breviora lateralia. Ad istorum originem interior haeret squama bidentata, brevis alias, alias

alias ſtamini pene aequalis, petalodes. Siliqua ovata, emarginata, utrinque turgens, hirſuta. In ea ſemen utrinque unum, lenticulatum, quorum alterum ſaepe abortit.

3. NAUSTURTIOLUM *alpinum folio alato* RAI *p.* 826. nunc crediderim, ex ipſius nominis vi, eſſe plantulam a *Naſturtiolo alp. tenuiſſime diviſo* non diverſam, quam ex praealto M. *Col de Ferry* habeo, foliis tamen potius ovatis, quam lanceolatis; petiolo, qui ſemper latus eſt, in hac herbula, etiam aliquanto latiori.

4. COCHLEARIA I. LINN. *foliis anguloſis*. Utique ſponte in Helvetia naſcitur, abunde quidem in paludoſis inter marmoris varii venas, & ſcaturiginem rivi *Furet* prope *Roche*: Dicitur etiam in valle *Moutier-Grand-val aux roche de Moutier près de la grande caſcade de la Birſe* naſci, ſed planta ex ea valle miſſa majus fuit *Cardamines vulgatiſſimae* exemplum.

5. LEPIDIUM *latifolium* non tantum circa Urbam, & in Vaudenſi agro ad vias ſponte provenit, ſed omnino, ut veram indigenam plantam eſſe conſtet, in altiſſimo, & *feriſſimo* (ut ſolent vocare) M. *Prapioz*.

6. *Iberis* MATTH. *Lepidium* 12. LINNAEI p. 675. non eſt *diandria*. Stamina quatuor majora, parva duo habet; petala ovata; fructum ex lata baſi contractum, ex anguſti finis fiſſura eminentem tubam; ſemen in utrovis loculo unicum.

7. Ad *Lepidia* addatur elegans ſpecies *Thlaſpi ſaxatile flore rubente* J. R. H. 5. *Lepidium foliis pulpoſis ſubrotundis antheris lateralibus Enum. Gott.* p. 245. Ad rupes prope *Ruchenette* reperit Cl. NEUHAUS.

Eſt *Iberis ſaxatilis* LINN. *Cent.* III. *n.* 171.

8. DRABIS, ut recte Cl. ALLIONIUS noſter conjicit, utcumque vicina eſt planta, quam ipſe, nobiſcum *Lepidium caule repente foliis ovatis amplexicaulibus* vocavit *l. c. p.* 27. *T. IV.* Siliqua enim pene quadrangula eſt, utique marginibus

magis,

magis, media linea, quae ſepto reſpondet, minus conſpicua, ſed tamen eminente. Septum ipſum non latitudini, & majori axi, ſed commiſſurae acutae ſiliquae parallelum eſt. Quando tamen ſiliqua aperta ſemina dejecit, tunc ſeptum perinde, ut in Alyſſis, planum perſiſtit, videturque valvis fructus parallelum fuiſſe. Inaequalitatem petalorum, ut inter Iberides reponi mereatur, neque ego obſervavi, aut nunc obſervo, neque Cl. amicus noſter. In ſaxoſis vicinarum alpium abunde naſcitur.

9. *Alyſſon myagri folio n.* 3. *p.* 538. omnino *a cochlearia* differt, fructu quidem pene rotundo, non tamen tranſverſum lato, valde convexo, ſed cujus ſeptum huic convexitati parallelum perſiſtit. Foliis penitus pinnatis reperi in periculoſa via *les ruines*, qua itur ad M. *Tompey*.

10. Denique ALYSSON *foliis pinnatis multiformibus floribus racemoſis luteis* ALLIONE p. 40. T. 7. utique a Cl. LACHENAL p. 6. inter *Cliben*, & *pontem Wieſae*, tum inter *Neuhaus*, & *Haltingen* reperta eſt, nova civis, & nova planta.

11. HESPERIDIS ſecundae Enum. nomine tres plantae continentur, Helveticae omnes. Prima alpina a ſummarum rupium M. *Chaſſeral* pede a DD. SCHUH, & GAGNEBIN, & in *Creux du Vent*, *au pertuis de la Biſe* a Cl. DIVERNOI lecta eſt. Et humilior omnino, & dodrantalis ſtatura eſt, folia omnia oblonga, rariter dentata, dentibus ſaepe profundis; caulis non ramoſus eſt niſi ex radice, idem in ſumma parte ſpicatus. Petioli florigeri ſex linearum, robuſti, ad grandem angulum de caule exeunt. Flos uncia paullo brevior. Calyx tubuloſus, albidus, duobus foliis deorſum gibbis. Petala longo ungue, bractea pene orbiculari, ſulfurea, venoſa. Siliqua ſubhirſuta, cornu longum fine emarginato.

Hoc eſt *Leucojum anguſtifolium alpinum flore ſulfureo* ALLIONE p. 44. T. 9. f. 3.

12. Al-

12. Altera in planitie Valesiae passim crescit supra *Leucam*, ubi & ipse legi, & Cl. RICOU, tum circa *Diedenheim* alsatiae vicum Cl. RISLER. Huic caulis ramosus, altior, cubitalis. Folia ad terram plurima, petiolata, longe lanceolata, scorzonerae similia, non dentata, glauca, tota subtiliter hirsuta, quae priori glabra sunt, ad caulem gracilia, linearia. Flos multo minor, caetera similis. Siliqua hirsuta quadrangularis. Stigma crassum globosum. Haec est *Leucojum sylvestre* CLUS. *p.* 299.

13. Ab hac specie modice differt planta Germanicae prosapiei, & sibiricae, quae abunde in rupibus M. *Altenstolberg*, & in muris rupibusque circa *Kelbra* a me decerpta est, & circa *Jenam* etiam nascitur. Huic caules bicubitales, valde ramosi, folia subhirsuta, dentata sed rariter, ut sint quae dentibus destituantur. Flos minor quam priorum, stigma emarginatum. Siliquae etiam quadrangulares, hirsutae. *Erysimum est foliis serratis lanceolatis* LINN. *Cent.* 1. *p.* 18. *flor. suec. n.* 602., sed hirsuta omnino siliqua est, quam LINNAEUS glabram fecit. Etsi possit videri statura, foliisque caulinis omnibusque serratis, differre, non tamen ausim a priori *n.* 12. separare, cui fructus ferat simillimos.

14. TURRITIS *foliis hirsutis amplexicaulibus siliquis nutantibus.*

Leucojum sylvestre angustifolium flore albido parvo RAI *p.* 786.

Magna copia provenit in rupestribus circa *Roche*, *à la Marbriére*, *Agauni*, circa *Bonne-ville*, & alibi.

Verno tempore haec planta pedalis & cubitalis, tota foliis, & caule molliter hirsuta est. Folia radicalia petiolata, hirta, cum mollitie tamen, longe petiolata, obtusa, ex ovatis lanceolata, paucis sed magnis dentibus serrata sunt. Caulem eadem amplectuntur, & lente diminuta latitudine, denticulis minoribus per marginem exasperantur. Versus summum caulem petioli florigeri exeunt, ut in hac classe solent, racemosi. Calyx coloratus, albicans, deor-

sum

ſum non gibbus, caryophyllaeus. Sic petala ex albis ſublutea, longe petiolata, leviter emarginata. Duae glandulae ad originem ſtaminum breviorum. Siliqua hirſuta, cornu brevi, fine rotundo, longiſſima trium quatuorve unciarum, per maturitatem nutans, compreſſa, oris undulatis. Semina plana, ovata, hilo inciſa, ala foliacea cincta. Calyces noſtris non rugoſi, ſed modice utique piloſi, ut cum Ammeniana conveniant LINN. *ſpec. p.* 665. *n.* 6. A *Monſpelienſi* planta differt caeterum ſimillima, quod ei Calyces deorſum gibbi ſint. Ita enim in ſpeciminibus reperio a praeſtantiſſimo COMMERSON miſſis.

15. ERYSIMUM 10. Bernae nunc deſideratur, cum tota ea ruderoſa area, in qua creſcebat, magnificis aedificiis repleta ſit.

16. *Siſymbrium* 11. 12. & 13. nunc denique paullo rectius licet conſtituere, plurimis undique, & ex locis natalibus collectis ſpeciminibus. Omnia autem ex nectariis aut ſinnapia erunt, aut Braſſicae; huic propiora, qualis a Cl. LINNAEO definitur.

17. SINAPI adeo *foliis levibus glaucis pinnatis, pinnis linearibus rariter dentatis Enum. n.* 11. *p.* 551.

Eruca tenuifolia perennis flore luteo C. B.

Siſymbrium tenuifolium LINN. Cent. 1. p. 1. 8. n. 50.

Genevae provenit ad portam *Cornevin*, & Baſileae in arenoſis ad *Wieſam* fl. *Badae* in arce diruta. *Aux allées de Colombier*. Frequens etiam in *Alſatia*, *Spirae*, *Manhemii*.

Concinnae plantae folia longe petiolata, fere polypodium imitantur. Nervus nempe a folioſa latitudine augetur, pinnaſque accipit alternas, aut oppoſitas, ipſeque in ſimilem, aliquanto majorem, lanceolam exit. Pinnae ſimplices, rariſſime dentatae, ſed incerta & alternante latitudine, primae breviores, acutum cum nervo angulum faciunt. Ad caulem ſaepe integerrima, *linariae* ſimilia folia. Caulis ſubhirſutus, firmus pedalis, cubitalis. Calyx deorſim non gibbus, ad-

lentem

lentem vitream viſus ſubhirſutus, deciduus. Petala ex petiolo lente dilatantur, bracteis flavis, rotundis, patentibus, calyci duplo longiora. Stamina longiora brevia bina magna portione ſuperant. Inter ea majora ſtamina, & calycem, tum inter ſtamen minus, & germen glandulae quatuor rotundae, virides ſedent. Cornu ſiliquae breve, fine globoſo. Matureſcens eadem erigitur ſeſcuncialis, compreſſa, paullum articulata, lata ultra lineam, cornu perſiſtente, ſeminibus compreſſis, ovatis, cum hilo, non alatis.

18. SINAPI altera planta eſt *foliis ſemipinnatis rotunde dentatis hirſutis Enum.* n. 12. p. 552.

Eruca inodora J. B. II. *p.* 862.

Eruca lutea ſylveſtris caule aſpero C. B.

Haec priori vulgatior *Ebroduni* abunde in foſſis provenit: tum ad Arolam inter *Aarberg*, & *Worben*, in Valeſia. Inter *Lauſannam*, & les *Croiſettes* ad viam. Baſileae prope curiam Naviculariorum ad Rheni pontem. In arenoſis *Wieſae*, & *Rheni*. Bernae etiam circa *un Stukhof* naſcebatur, nunc deſtructa.

Huic caulis hirſutus, anguloſus, caeterum ſulcatus, parum firmiter erectus tripedalis, ramoſus & brachiatus. Folia Jacobeae vulgaris ſimilia, qualia Linnaeus *lyrata* vocat, longe petiolata, ſemipinnata, pinnis anguloſis ſenſim majoribus, ultima impare maxima obtuſa, omnibus anguloſis, & maximis paucioribuſque dentibus inciſis. In caule haec omnia anguſtiora ſunt, denteſque tanti, ut folia ſemipinnata ſint. Tota cum nervis hirſuta ſunt. Calycis folia patula, duo modice deorſum gibba, omnia ſubhirſuta, decidua. Petala longo petiolo, bractea rotunda, de calyce duplo longiora ſe efferunt, colore ochroleuco. Glandulae quatuor, poſitae, ut in priori planta 17. Fructus ſubhirſutus, tetragonus, cornu brevi, capitato, obtuſo. Siliquarum petioli ad magnum angulum de caule recedunt, ipſae ſurſum recurvae, cauli pene parallelae, obtuſe tetragonae, turgidae, ſeſcunciales. Semen oblongum.

Eadem in *Arve* fl. alveo, inque veragrico agro, & in Valeſia fere flavo flore naſcitur.

Haec eſt *Sinapi ſylveſtre Genevenſe* J. B. II. *p.* 858. in alveo *Arve* lectum; uti ex plantis video, quas ex loco natali Cl. le CLERC ad me miſit.

19. *Eruca Tanaceti folio* MORISONI. Pari jure, ut pleraeque Baſileenſes, & Genevenſes pro Helvetica haberi poteſt, quam Cl. CLARET ad pedem montis S. Bernhardi in valle Auguſta legerit.

20. *Braſſica perfoliata* poteſt helveticis accenſeri, quae circa Mulhuſiam proveniat.

21. CARDAMINE *foliis pinnatis pinnis laciniatis*, ſaepe quidem apetala eſt, atque ſolis ſuis ſtaminibus albis, de calyce eminentibus, florem mentitur, ſed eadem tamen, in ipſa Suecia, alias petala alba calyce majora produxit (LINN. *flor. ſuec. nov. ed. p.* 464.).

22. CARDAMINEN *trifoliam* raram civem foliis hederaceis angulis in argutos denticulos exeuntibus, habuit inter ſuas Cl. le CLERC.

CARDAMINE *alpina bellidis folio*, *glabra*, quidem nuper a me in M. *Enzeinda* lecta eſt, & in ſummo *Pennino* a Cl. CLARETO.

23. Sed aliâ, neque a nobis dicta planta, & ex M. *Baldo* cum eo nomine mihi miſſa eſt, & lecta in M. *Surchamp* agri Aquilegienſis, penitus omnino diverſa. Huic folia integerrima, ovata, radicalia, hirta & aſpredine ſcabra. Caulis trium quatuorve unciarum, uno alterove folio ovato lanceolato ornatus, ſimplex, habitu omnino Turritidis ramoſae vulgaris, ſed flore toto differt, & fructu. Flos enim grandis, triplo ejus plantulae florem ſuperat, idemque petalodem album calycem habet, deorſum inſigniter gibbum. Petala lactea, ovata. Siliquas grandes latiſſimas ad lineam unciales, cornu breviſſimo ſimplici, erectas praefert, & cauli parallelas. Num elaſticae reſiliant, ſeque convol-

vant,

vant, non reſcivi. Videtur ex loco natali eſſe *Cardamine* 5. SEGUIER *veron.* p. 387. Nomen meretur, ſi glandulas habet, quod nunc quidem expedire nequeo, ARABIDIS *foliis radicalibus ovatis integerrimis ſcabris, caule ſubnudo*. A *Turritide minori* flore grandi ſeparatur, latiſque ſiliquis, & caule non folioſo.

PAPILIONACEAE.

24. ASTragalorum primum genus oportet expedire in quo ob ſpecimina imperfecta, & fructus potiſſimum defectum multa mihi, dum majus opus ſcripſi, dubitatio, neque abſque errore fuit. Nunc copia collecta exemplorum, & fructubus maturis conquiſitis, haec poſſunt expediri.

Removere vero oportet ab Aſtragalis, primum Tragacantham, quae *alpina ſempervirens flore purpuraſcente* J. R. H., & GARIDEL in ic.

In M. *Jeman*, *Cheville*, & inter *Javernaz*, & *Ovannaz* montes, a D. RICOU primum reperta, tum a D. des *Coppets*, aliiſque

Radix lignoſa, maxima, ramoſa, multiceps. Caules pedales, folioſi, ramoſi. Petioli foliorum in ſpinulam terminantur, eorumque petiolorum reliquiae ſuperſtites, acuminatae, caulem circumſtant. Folia ſubhirſuta, ovatis anguſtioru, pinnarum ſeptem ad decem. Flores fructuſque ad baſin caulium congeſti. Fructus hirſuti, turgidi, teretes, duri, breves. Calyx hirſutus, cylindricus, quinque longis & hirſutis dentibus. Flos longus, ſtrictus, albidus. Vexillum emarginatum, venis ſaturati purpurei coloris pictum. Alae petiolum habent capillarem, hamum brevem & obtuſum. Carina brevior, quam alae, hamis brevibus, obtuſis, roſtrello purpureo, mucrone perbrevi. Caeterum flos pallide carneus eſt. Stamina novem connata, unum ſingulare. Tuba filiformis longa, ſine paullum craſſiori. Siliqua conſtanter unilo-

cularis, in ea quatuor nigra, reniformoſa ſemina, aliquibus membranulis & ſeptulis interſtincta, non parallelis ad valvas, ſed oblique & tranſverſim normalibus.

A Maſſilienſi Tragacantha, quam a variis amicis accepi, non videtur differre.

Sive velis generis tueri dignitatem, ſive alteri alicui generi addere, certe ex noſtris experimentis cum Aſtragalo non poteſt relinqui. Si omnino alii Cl. viri Tragacanthas biloculares viderunt, erit in ipſo genere varietas loculorum. Nimis enim multos fructus aperui, ut potuerim in meis ſeptum praetervidiſſe.

25. Porro aliquot ab Aſtragalis plantas oportebit removere, quas ignorata fabrica fructus pro aſtragalis habui.

Aſtragaloides ſive *phaca* adeo ſimilis eſt *Aſtragalo*, ut vulgo cum ea conjuncta fuerit. Neque tamen ſola ſiliqua differt, quam aſtragali nonnulli perinde inflatam habent, & ovatam, ſed praeterea partium floris proportione. Cum enim *Aſtragalis* flos fere ſtrictus, & vexillum praelongum eſſe ſoleat, *Aſtragaloidi* multo brevior, & ejuſmodi eſt quales in viciis, in iis certe quinque phacae ſpeciebus, quas inter meas habeo; & quarum tres ſunt helveticae.

I. PHACA *caule procumbente foliis ovato lanceolatis*

Aſtragalus quidam montanus, vel onobrychis aliis J. B. II. *p.* 339.

Aſtragalus montanus LINN. *ſpec. p.* 960. *n.* 24.

Poſt priora lectus ad pedem rupis glacialis *Steinbey* in M. *Chapuiſe*, *Fouly*, *Orgevaux*, *Sur champ*, *Ovanna*, *Enzeinda*, *Prapioz*, *Breitlawenen*, *Stokhorn*, *Galanda*, plerumque in lapidoſis deciduis. Haec planta Aſtragalos inter, & Aſtragaloides ſive phacam ambigit. Habet enim ſiliquam teretem, ovatam, lanceolatam, inflatam, hinc convexam, inde cava linea ſulco diviſam. In ea linea commiſſio valvarum mediam ſuperiorem partem ſiliquae valde breviter elevatam contingit, eique araneoſis nexubus adaptatur; &

ex

ex receptaculo utrinque seminales funiculi exeunt. Semina in duos ordines dispositа utrinque ad decem, compressa, reniformia. Adulta siliqua calvescit, & omnino absque vestigio bilocularis naturae est, unaque folia contracto margine lanceolata fiunt, ut alia tunc planta videatur. Eos tamen loculos non membranaceum adeo alicujus longitudinis septum, sed contiguitas receptaculi ad mediam superioris convexitatis siliquae sedem elevati dividit. Caeterum flores breviter spicati, ad angulos rectos, rectisque minores, tum ipsi, tum siliquae eriguntur: iidemque flores breviori sunt vexillo, quam in *Astragalis* solent & latiori, ut *Viciae* florem penitus referat. Folia incerta figura ludunt, ovata, & ex ovatis lanceolata. Caules folioſi, auriculis ovato lanceolatis, ad originem folii positis, spica florali terminati.

26. II. PHACA *caule procumbente; foliis ovatis, siliquis pendulis* Enum. n. 10.

Astragalus alpinus foliis viciae ramosus, & procumbens flore glomerato oblongo albo caeruleo SCHEUCHZER *itin.* VII. p. 509.

Astragalus alpinus minimus LINN. *fl. lapp.* p. 261. T. 9. f. 1.

Similibus locis, uti prior, sed aliquanto rarior. In lapidosis circa glaciales rupes *Steineberg*, *Stokhorn*, *Chapuisе*, *Enzeinda*. Cl. RAMPSPEK in M. *Miirtschen*, *Galanda*.

Vere a n. 25. differt, floribus rarioribus, minus in eadem spica numerosis, petalis magis distinctis, vexillo striato, floribus, & siliquis pendulis, radicibus, quae priori pedales, huic minimis, etsi lignosae sunt. Caeterum fructus ejusdem naturae est, hirsutus, niger, & unilocularis, nullo sepri vestigio, idemque in meis curvus: verum satis maturas siliquas non vidi. Ab Astragalis pariter, ut prior breviori flore differt.

27. III. PHACA *caulibus erectis, ramosis, foliis ovatis.*

Astragaloides alpina hirsuta erecta foliis viciae floribus dilute luteis TILLI *hort. Pisan. p.* 19. *T.* 14. *f.* 2.

Praeter

Praeter eos montes, quos in *Enum. Helv.* citavi, naſcitur etiam in M. *Chapuiſe*, a nobis lecta, in *Prapioz*, in *Jeman*, *Ovanna*, *Sur champ*, *aux Nombrieux*. Adde deſcriptioni, radicem enormem, pedalem & cubitalem eſſe, caulem erectum ad pedem, & cubitum, foliorum paria quatuor, quinque, ſex, mollia, hirſuta, ovata; ad eorum originem praegrandes ſtipulas, ovato lanceolatas; ſcapos florigeros ex alis prodire, ſpicaſque ferre confertas, florum etiam retrorſum converſorum & pendulorum. Calyx cylindricus, compreſſus, pallens, nigris pilis hirſutus, denticulis quinque brevibus, nigro pilo toris barbatis. Flos ochroleucus, calyce duplo longior. Vexillum longe petiolatum plicatum, ovale & quaſi mucronatum, album, dorſo, & parte proxima flava: alae longe petiolatae, longe hamatae, ochroleucae, paullo carina breviores: carina unipes, hamis retrogradis obtuſis, mucrone obtuſo, curvulo, flaveſcente. Stamina novem connata; & decimum ſolitarium. Tuba filiformis. Siliquae pendulae, ovatae, mucronatae, ſtyliferae, inflatae, intus glabrae, uniloculares, ſeminibus reniformibus.

28. Iterum ex fructus ignoratione mihi, & LINNAEO *ſpec. p.* 756., & ante nos SCHEUCHZERO accidit, ut inter Aſtragalos recenſeremus HEDYSARUM *caule recto*, *ramoſo*, *foliis ovatis*, *ſiliquis*, *leviſſimis*, *venoſis*.

Hedyſarum alpinum ſiliqua levi C. B.

Eam nunc plantam, multis locis, & diverſis anni temporibus, repertam, utique rectius conſtituo.

Radix longa, craſſa, lignoſa, teres, nigra, multiceps. Caulis erectus, ramoſus, dodrantalis, pedalis, etiam cubitalis. Sub foliis vaginae ſqualentes, ſiccae, longae, ariſtatae. Folia venoſa, ovata, parium novem & ultra. Spicae in ſcapis ex foliorum alis prodeuntibus, floreſque reflexi & penduli: calycis dentes ſubhirſuti, inferiori longiſſimo. Flores Hedyſari, vexillo quam carina breviori, reflexo, plicato, emarginato. Alae carina breviores graciles, hamo lon-

go

go retrogrado. Carina pene normalis, obtusa, omnibus petalis major, ex caeruleo purpurea. Fructus articulatus constat quatuor, aut quinque, articulis ovatis, planis, nervosis, alatis, monospermis per graciles isthmos sibi continuatis. Sibirica planta non videtur diversa, fructu, flore, folio, habitu. Sola magnitudo floris nostras separat.

Nascitur in M. *Ovanna*, *Sur champ*, *Chapuise*, *Enzeinda*, *Fouly*, *Orgevaux*, *Neunenen*, *Stokhorn*, *Pilato*, *Breitlawenen*, *Wangenalp*, *Nombrieux*, *Schilt*, *montibus Switensium*.

29. Astragali veri praeter hos, quos nunc recensebo, in helvetia non sunt reperti. Quis sit *Astragalus II.* Clus. *p.* ccxxxiiii., aut C. B. *helveticus* ignoratur, & difficile est conjecturam facere, quemnam potuerit cum *Orobo sylvatico purpureo verno* comparare Clusius. Neque de Astragalo 12. 13. & 14. quidquam mihi ultra innotuit.

Vulgarem procumbentem omitto, & *Glaucem* Rivini.

Qui sequuntur, veri sunt Astragali.

30. I. Astragalus *caule erecto*, *ex aliis spicifero*, *siliquis teretibus hirsutis Comm. Gott.* 1752. cum icone.

In Helvetia; circa castellum Octodurense, vetustate dirutum, in herbosis abunde nascitur, ibi lectus a me an. 1757.

An hic fuerit *Astragalus pilosus* Linn. *Spec. p.* 148.

Cicer montanum lanuginosum erectum C. B. *prodr. p.* 148.

Ad descriptionem alias datam remisisse liceat.

31. II. Astragalus *caule erecto*, *ramoso*, *foliis linearibus hirsutis*, *spicis erectis terminatricibus Enum. p.* 567. *n.* 7.

Onobrychis purpureo flore Clus. *Pann. p.* 751.

Inter *Leucam* & *Siders* in herbosis abunde, etiam inter *Orsieres* & *Bovernier*.

Fructus, quem nunc demum vidi, brevis, vix trium linearum, subhirsutus, turgidus, curvo stylo instructus. Semina utrinque fere tria, nitida, reniformia, sed hilo eminente.

Hi aſtragali caulibus ramoſis: qui ſequuntur ſunt ſcapis ſpiciferis de radice prodeuntibus, neque ramoſis, neque folioſis.

32. III. ASTRAGALUS *caule diffuſo, foliis ovatis ſubhirſutis, ſcapis radicalibus, vexillo longiſſimo, ſiliquis teretibus* Enum. n. 2.

Aſtragalus monſpeſſulanus J. B. II. p. 338. (idem enim monſpelio miſſus eſt) LINN. *ſpec. p.* 761. idemque *Aſtragalus alpinus magno flore* C. B. *Enum. l. c. n.* 3.

Abunde in via *Tombey*, proxime ſuper *Olon*.

Radix cubitalis, lignoſa, inmenſum ceſpitem caulium fundit, & ipſos cubitalis diametri. Folia decem parium, eaque ovata, dum juniora ſunt ſubhirſuta, & obtuſa. Flos autem longus ad unciam, ſtrictuſque. Calyx longus, cylindricus, etiam roſeo colore tinctus, ſuperius exciſus, longis rectiſque ſegmentis. Vexillum, ut in praecedente, & in trifoliis, praelongum, ſtrictum, plicatum, emarginatum, purpureum. Alae, quod in tota claſſe rariſſimum, emarginatae in partem magnam & parvam diviſae, pallidi coloris. Carina brevior, obtuſa, ſaturate purpurea. Stamina novem connata, & unum ſingulare. Siliqua longa fine recurvo, tota gracilis, per maturitatem dura, uncialis, teres, paullum incurva, convexa, valvularum commiſſura latiori. Semina in utrovis loculo quinque & ſex, nigra, reniformia, ſed ſuperiori parte ſuper hilum craſſiori.

33. IV. ASTRAGALUS *ſcapis aphyllis, ſiliqua turgida ovato lanceolata ſtylifera, foliis ovato lanceolatis ſerviceis Enum. n.* 5. *T.* 5.

Praeter ſcopulos *Neunenen* etiam naſcitur inter *Charat* & *Sixen* Valleſiae.

Adde deſcriptioni folia ſericea, ſplendentia, nonnunquam ſatis calveſcere. Calycem pariter fericeum cum fructu ſupereſſe, qui nigro villo hiſpidus, ovalis inflata eſt ſiliqua, conſtanter acumine terminata. Semina in duobus loculis numeroſa: matura non vidi.

34. V. ASTRAGALUS *ſcapis aphyllis foliis lanceolatis hirſutis, ſiliqua villoſa, inflata, ovata. Enum. n. 8. ic. T. 13.*

Aſtragalus Pyrenaicus barbae joris folio non ramoſus, flore ochroleuco glomerato SCHEUCHZER *It. alp. IV. p. 330.*

Aſtragalus campeſtris LINN. *ſpec. p. 761. n. 30.* Nobis utique alpinus eſt, neque in humiliores montes, aut *Juram* deſcendit.

Praeter priora loca nuper in itineribus legi ad M. glaciales *Steineberg*, & in *Wangenalp*, *Prapioz*, *Enzeinda*, *Ovanna*, *Fouly*.

Deſcriptioni adde, radicem enormi ſaepe craſſitie, & pollicarem reperiri. Fructum brevem, hirſutum, vehementer turgidum, ovatum ſtyliferum, ſepto diviſum eſſe. In eo ſemina numeroſa compreſſa reniformia.

35. *Coronilla prima Enum. ſive minima* J. R. H. naſcitur *au Richard*, & *Sur champ*, tum in M. *Jeman*, & inter S. *Aubin*, & M. *Falconiarum* & alibi. A ferro equino inprimis ſiliquis diſtinguitur, quas pendulas habet incipientes ex petiolo nodo circulari, deinde articulis conſtantes tribus, quatuor, & ultra. Ovati ſunt articuli, utrinque acuminati, & complanati, cum acie utrinque. Facies plana linea eminente ſeparatur. Acies habet alas membranaceas eminentes duas, interque eas duas lineas pariter paullum, ſed brevias elevatas. In articulo ſemen phaſeoli forma, longius, parum inciſum. Tamen etiam folia huic coronillae magis perfecte ovata, & craſſiora ſunt, parium fere quatuor & quinque in noſtris, cum extremo impare. Stipulae fuſcae, argute lanceolatae, gemellae. Longiſſima & craſſiſſima radix.

Haec eſt, quam Cl. GAGNEBIN reperit au *Rocher de la Chage des Corbeaux*, *Milledeux*, & à *Refrein*. Certo cum nomine *minimae* ex Gallia & Pedemontio amici miſerunt. Sed etiam Hiſpanica planta, in horto culta, noſtrae ſimilis eſt, diverſa tamen ſtipulis rotundis, aut nullis.

36. Ab ista *Coronilla* diversissima est *quarta Enum. p.* 574. *erecta*, *foliis maximis*, *ovatis retusis in acumen exeuntibus*, siliquis neque alatis, neque aciem habentibus, abitu minus duro. Conf. *Enum. Gott. p.* 268. Cl. GAGNEBIN reperit au *val de Ruz*. Ego maxima copia in M. *Kunisberg* prope Jenam, tum in sylva *Welmesen*. Cl. MIEG circa *Farnspurg*.

Neutram, quod mireris, habet LINNAEUS, quarum utraque multis locis proveniat, & passim descripta sit.

37. OROBUS *caule erecto*, *ramoso*, *foliis ovato lanceolatis Enum. Helv. n.* 2., *qui Orobus alpinus latifolius*. C. B. *Prodr. p.* 149.

An *Orobus* 8. LINN. *spec. p.* 729.?

In M. *Luan*, in *Ovaille* sylva, in M. *Nombrieux* & alibi in Aquilegiensium montosis abunde nascitur.

Ex speciosissimis papilionacearum. Caulis erectus bicubitalis, & ultra, sulcatus & angulosus: folia numerosa, adscendentia; stipulae sub ramis grandes, deorsum hamatae, ex ovatis lanceolatae, serratae. Foliorum paria quatuor, parum ovato lanceolata, glabra. Ex alis foliorum perpetui scapi florigeri, foliis nudi, angulosi, dodrantales. Florum spica laxa, iidemque, quando matureseunt, retroversi, penduli, heteromalli. Calyx cylindricus compressus: ejus segmenta superiora brevia, lata, curvula, se mutuo respiciunt; inferiora recta, & triangularia sunt. Flos longus, ochroleucus. Vexillum angustum, replicatum, conduplicatum, quasi emarginatum, dorso flavo. Alae obtusae, mucronatae, carinae longitudine, hamis binis obtusis. Carina petiolo fissili, bractea recta modice rostrata. Stamina novem connata & unum solitarium. Tuba fine latiusculo. Siliqua praelonga glabra, polysperma; semina matura nondum vidi.

Orobi caule ramoso nomen nunc reformare oportet, ut sit *Orobus caule ramoso erecto*, *foliis ellipticis obtusis*.

38. Vi-

38. VICIAE nova in Helvetia ſpecies noſtris addita eſt a Cl. CLARETO, circa octodurum lecta, quam, quia multa habet vulgaris multiflorae ſimilia, eo accuratius oportet deſinire.

Caulis in radicem annuam, exiguam continuatur, debilis idem, pedalis & cubitalis, ramoſus, folioſus, ſtriatus, ſubhirſutus. Stipulae peculiares bipartitae, portione ſuperiori majori, utraque ſtriata, lanceolata, ariſtata, ſaepe ſerrata: duobus inferior inprimis dentibus, ſuperior etiam quinque & ſeptem ita magnis notata, ut pene ſemipinnata ſit. Foliorum paria ad octo, dura ea, nervo conſpicuo, linearia, ut tamen lateſcant ad finem, qui obtuſus eſt, & ariſta diſtinguitur, lata ad lineam. Scapi florigeri quatuor & ultra unciarum. Spica rara, flores in pedicellis vix lineam longis, ipſi 9. ad duodecim numerantur. Calycis duo ſegmenta ſuperiora breviſſima, ad ſe invicem curva, tria inferiora majora triangularia, omnia ſubhirſuta. Vexillum reliquis petalis multo majus, ſature caeruleum, fere totum coloratum, petiolo brevi, elevatum, emarginatum. Alae carina longiores, hamis obtuſis, bractea rotunda caerulea. Carina bipes fiſſilis hamis obtuſiſſimis, tum mucrone, qui caeruleus eſt; cum reliqua carina alba ſit. Siliqua glabra plana, lata, & in medio latior. Semina ad duodecim: maturam non vidi.

Cum deſcriptione *Viciae onobrychidis flore* convenit C. B. *Prodr. p.* 149., & cum nomine *anguſtifoliae purpuro violaceae ſiliquis latis glabris* ex Delphinatu miſſa eſt, ſed ea, cum ſemina tantum quatuor habeat, noſtra non eſt. Erit adeo *Vicia* 6. LINN.

A *multiflora* ſegetum floribus multo grandioribus, paucioribus, ſtipulis ſerratis, ſiliquis pro portione longioribus, & magis polyſpermis, toto habitu duriori differt.

39. *Clymenum Pariſienſe* paſſim in Helvetia naſcitur. Reperi abunde in pratis ad lacum Lemanum prope *Ebro*, tum

ad *Broyam* fl. inter la *Sauge* & *Sugy*, & in pratis paluſtribus inter *Chambon* & *Cheſſel*. Cl. GAGNEBIN circa *Landeron*.

40. Inter plantas THORELLII helveticus omnes, & circa *Vevai* inque Aquilegienſi ditione lectas, fuit *Anagyris foetida*: locus autem natalis nullus additus eſt.

41. Inter Geniſtas certo diverſa eſt ab ea, quae eſt *hyperici folio*, ſpecies a Cl. GAGNEBIN reperta à la *chaux de fond dans la grande pature la Breche*, & in Burgundiae Ericetis; tum a D. CHATELAIN a *Roulier mairie de la Brevine*. Haec ſtirps & a me, & a Cl. GARCIN pro varietate habita *Geniſtae* 2. *Enum.*, vere differt, mereturque novum nomen GENISTAE *caule decumbente ramoſo*, *foliis ovatis*, *floribus longe petiolatis*. Comparavi ſollicite cum Geniſta foliis hyperici, cui propior eſt, & multa reperi ſimilia, etiam anguloſos caules & ramoſos. Folia non valde differunt, niſi quod piloſa magis ſunt, neque ſericea; caeterum ovatis longiora, obtuſa. Petioli florigeri incipiunt differre: hi enim in *hyperici-folia*, germanica & monſpelienſi, breves ſunt, linea paullum longiores, ut flores ſeſſiles videantur: in noſtra unciam aequant. Porro flos proportione multo major eſt, & plus duplo. Calyx, qui *hyperici-foliae* ſtrictus, ſuperiora duo ſegmenta aequalia lata triangula & acuta habet, inferiora tria connata, huic campaniformis eſt, bilabiatus & ſegmenta duo ſuperiora connata curvula, breviter ſeparata habet. Vexillum ex breviori proportione petiolo, amplum eſt, & emarginatum, venis pictum. Alae evidentiori hamo, proportione latiores. Carina, quae illi obtuſiſſima, huic roſtrum habet, modice acutum. Porro vexillum & carina *hyperici-foliae* exterius ſericeae ſunt, in noſtra glabrae. Totus denique habitus mollior noſtro eſt, & folia minime aut dura, aut plicata, minorque pars ramorum indureſcit.

42. *Me-*

42. *Medicae* 3. *Enum.* in colore varietas fere ejuſmodi eſt, ut exterior vexilli pars ex violaceo in flavum langueat; unde, dum clauſus flos a vexillo fere totus continetur, idem violaceus apparet, explicatus autem ochroleucum colorem expedit, qui in noſtris flavo frequentior eſt.

43. TRIFOLIUM *pratenſe purpureum minus foliis cordatis Enum. helv. n.* 13. *p.* 585. nunc, utriſque ſpeciminibus comparatis, conjungo cum *Trifolio caule hirſuto, ſcabro, foliis mollibus, integerrimis ſpicis ſubvilloſis ochroleucis* Cl. LACHENAL *p.* 2., quod Cl. vir in M. *Vogelberg*, & verſus *Schaumburg* & *Prattelen*, & D. BERDOT *in monte Beligardo* reperit. Folia ima ſaepe cordata, emarginata; ſuperiora ſub floribus ſtricta & linearia ſunt, omnia dentibus deſtituuntur, & ea nota ab *albo* pratenſi diſtant. Ad originem foliorum caulinorum vaginae venoſae, bicaudes, caudis ex latiuſculo principio longe ſubulatis. Spicae brevi petiolo ſuper folia ſe efferunt, floreſque longos & ſtrictos habent, ochroleucos. Dentes calycis quatuor graciles, aequales, imus latior & longior, omnes ex lateribus molliter piloſi.

Non habet LINNAEUS.

44. TRIFOLIUM *floſculis albis in glomerulis aſperis caulibus proxime adnatis* VAILL. *T.* 37. *f.* 1., & a Cl. LACHENAL in arenoſis ad Birſam, & a me an. 1757. in arcis S. *Triphon* area, cum *medica echinata*, maxima copia repertum paullo accuratius nunc deſcribo. Ex una radice, numeroſi caules naſcuntur, ſecundum terram proſtrati, ſemipedales & aliquanto longiores. Folia firma, ſubhirſuta venoſa, obtuſe rhomboidea, ex angulo initio facto, fine in arcum. Capitula parva, ſeſſilia ad foliorum alas, ſubaſpera ob calyces grandiuſculos. Ii campaniformes, contracti pene globoſi, dentibus quinque triangularibus, quorum duo ſuperiores minimi, medii mediocres ſunt, imus minimus. Flos paullo calyce longior, ſtrictus, inapertus, albus. Vexillum plicatum, ſurſum flexum, alarum hamus brevis, & quatuor petala diſtincta.

45. In

45. In Anonide 5. ſive *ſpinoſa lutea minore* C. B. ſunt quae emendes. Adfinis *puſillae glabrae anguſtiſoliae*, quae monſpelio cum nomine *minutiſſimae* LINN. *n.* 3. *p.* 717. miſſa eſt, tamen differt foliis totoque habitu hirſutis. Caulis humilis vix ſex unciarum ramoſus, parum erectus, totus obductus foliis & ſtipulis ſiccis lineatis, lanceolatis, ariſtatis, & dentatis. Folia hirſuta, & aliquantum viſcida, in forti petiolo ternata, pene ovata, argute circumſerrata. Flos ſeſſilis: calyx patulus, profunde in quinque lanceolatas, lineatas, longe ariſtatas, partes fiſſus. Vexillum pallidum, purpureis lineis pictum, peramplum, ovale, plicatum. Alae ſaturatius flavae, quam carina longiores, hamatae. Carina ad obtuſum angulum flexa, mucrone obtuſo, in lato, breviſſimo petiolo. Tuba filiformis. Fructus brevis, ovatus, ſub-conicus, turgidus, niger. Semina quatuor flava, phaſeoli ſimilia, ſed breviora. Abunde ſecundum viam le *Tombey* & circa *Bex*, & in M. *Fouly*.

RINGENTES ROYEN.

46. LENTIBULARIA *minor* in paludoſis à la *Chételaz* vallis minoris Monaſterienſis reperta eſt a Cl. GAGNEBIN. Eam Cl. LINNAEUS in *flor. ſuec. p.* 10. deſcriptam dedit.

47. *Euphraſiam tenuiſſime diſectam* vere a vulgari minori flore differre vehementer dubito. Abundat circa *Bex*, *Agaunum*, etiam verſus fontem *Furet*.

48. Pedicularibus nullam novam ſpeciem addo, pleraſque aliis in locis repertas confirmo.

In mucronatis illis fructibus ſpeciei I., ultimae, & procul dubio aliarum etiam alpinarum, loculi ſepto imperfecto diſtinguuntur, quod paullatim verſus apicem fructus evaneſcit, ut in ſummo cornu loculus unicus ſit.

49. *Pe-*

49. *Pedicularis* 3. Enum. ab eo tempore a nemine in Helvetia reperta, neque a LINNAEO repetita, tamen ab omnibus noſtris differt, adſinis quidem primae, ſed roſtro floris multo breviori, foliorum etiam pinnulis brevioribus & obtuſis.

50. Contuli etiam cum Cl. virorum plantis meas. *Pedicularis* I. J. Fr. SEGUIER eſt omnino noſtra 8. Non autem *Pedicularis foliis bis pinnatis, calyce non criſtato, floribus ochroleucis in ſpicam nudam congeſtis* Cl. ALLIONE *p.* 50. *T.* 11., quae quidem non foliorum longiorum de ſpica eminentium defectu a noſtra differt, ſed foliis multo minus profunde bipinnatis.

51. *Pendicularis foliis alternis, pinnis ſemipinnatis floribus roſtratis ochroleucis denſe ſpicatis* ALLIONE *p.* 51. *T.* 11. differt a noſtra *atrorubente* nervo non folioſo, atque adeo ad eam pertinere nequit: adque noſtram certe PEDICULARIS *foliis alternis pinnis ſemipinnatis floribus laxe & longiſſime ſpicatis* EJUSD. Cl. viri p. 54. T. 12. ob eam notam potius accedit.

PEDICULARIS EJUSD. p. 52. T. 12. f. 1. ab omnibus noſtris differt.

PEDICULARIS *caulibus reflexis ſpica laxa purpurea* SEGUIER p. 125. eſt omnino noſtra 2.

Pedicularis alpina lutea EJUSD. p. 126. habet multo tenuiora folia, & minus repetito pinnata, quam noſtra ejus nominis.

52. Cymbalariam hybridam eſſe, & ex utraque Elatine adulterio proveniſſe dicitur a Cl. Auctore *plant. hyb.* n. 30. Glabritie fabrica, foliis, ſede natali ab utraque differt, nam ſegetales ſunt, cymbalaria autem eſt muralis, & naſcitur iis locis, quos nulla Elatine frequentat; ab iis vero perpetuo abeſt, in quibus utraque abunde provenit, ſegetibus nempe etiam frigidioribus Germaniae Septentrionalis & Helvetiae.

VER-

53. NOva civis est CASSIDA *procumbens*, *foliis ovatis*, *crenatis subhirsutis*, *spicis foliosis*.

Nisi a SCHEUCHZERO forte cum nomine *Teucrii inodori magno flore*. *Itin. V. p.* 428. describitur, non addito loco natali. Certe fructus, eo loco dictus, ad *Cassidam* utcunque pertinere videtur, cum *quatuor* ei *loculamenta* tribuat SCHEUCHZERUS. Sed *atropurpureus flos*, quem dicit *Itin. VII. p.* 519. & nigredo, quam in foliis supervenire addit IDEM *Itin.* I. p. 50. & IV. l. c. & locus, quem in alpium saxosis ponit, tanquam plantae vulgo notae; denique, quod *Staechelinae* nunquam meminit, quam multo minus quam nostram, raram certe stirpem, praetervidere non potuit, haec faciunt omnia, ut eum Cl. Virum *Staechelinam* teucrii nomine voluisse persuadear. Nostra enim Cassida unico hactenus loco in Helvetia certo visa est, in M. *Fouly*, secundum lacum.

Speciosa planta radicem habet sesquipedalem, ramosam, reretem; caulem procumbentem, ramosissimum, ramis dodrantalibus & pedalibus. Folia petiolata, ex ovatis obtusa, mucronata, & obtuse pariter dentata. Bracteae ovales, subhirsutae, integerrimae. Flores spicati, congesti. Spica dum floret uncialis. Calyx, qualem character generis requirit, brevioris calcei similis. Flos speciosa magnitudine: labium superius caeruleum, subhirsutum: segmenta lateralia duo subrotunda: pars inferior palato contra galeam tumet; barba obtusa emarginata, parva parte caerulea, reliqua alba & pallente.

A *Cassida spicis foliosis* praeter colores differt foliis glabris, bracteis pro portione floris minoribus, caetera valde similis.

54. Salviam helveticis addo.

SALVIA

SALVIA *foliis petiolatis, cordiformibus, obtusis, verticillis nudis. Horminum sylvestre* III. CLUS. *p. XXIX.*

Nascitur in M. *Luan*, in ipso pago *Leisin*, in pratis circa *Escharpigny*, & in rupestribus prope *Roche* versus scaturiginem le *Furet*.

Folia longe petiolata, circa petiolum emarginata, circumserrata, hirsuta. Ima saepe duas auriculas habent, petiolo sub ipso folio adnatas, exiguas, serratas, a CLUSIO minime neglectas. Caulis longe nudus, frequentibus, nudis, densis, florum verticillis ambitur, qui breves, aequales, in circulum non longum, multoque foliis minorem congesti caulem ambeunt. Flores in hoc genere ex minimis, quos recte *lavandulae* flores non superare CLUSIUS monet. Calycis dentes superne tres, inferius duo, triangulares, majores. Flos sature caeruleus. Vexillum cavum, simplex, integrum, cochlearis similitudine. Alae laterales ad perpendiculum longiores, barba profunde excisa. Antherae duae in bifidi filamenti altero cornu sessiles.

55. HORMINUM *foliis cordato obtusis, caule nudo*, LINN. spec. p. 590.

Melissa pyrenaica caule brevi plantaginis folio J. R. H. MAGNOL *hort. Monsp.* cum icone.

Cl. SCHINZIUS legit in alpe *Teuri* & *Alveney*, & mecum communicavit Cl. GESNERUS.

Folia ad terram petiolata, perfecte ovata, circumserrata. Caulis dodrantalis, pedalis, pene aphyllos, praeter bracteas aliquas, ex ovatis lanceolatas, integerrimas. Verticilli pauciflori, in meis plerumque ad alterum latus conversi, ad caulem sessiles. Calycis de more tres dentes sursum reflexi, duo alii deorsum, omnes aristati. Flos grandis, peculiariter latus, eminente tuba, quem recentem non vidi.

56. CATTARIA *hispanica betonicae folio* circa Rupem ubique provenit, in scopulis versus scaturiginem le *Furet*, in sepibus *aux Gauges*, passim etiam in via regia.

Sed aliam ſpeciem Cattariae indigenis addidit Cl. le Clerc, ad pedem M. Jurae lectam, quam etiam circa *Waſen* Scheuchzerus indicat.

Cattaria *tomentoſa*, *foliis longe acuminatis*, *acute crenatis*. *Cattaria anguſtifolia minor* J. R. H.

Cum *Cattaria vulgatiſſima* convenit, caeterum folia proportione multo longiora habet, & anguſtiora, tota cum caule albo tomento obducta, calycem perinde tomentoſum. Flos violaceus: odor virulentus pulegii.

57. Melissa offic. unique ſponte provenit, paſſim circa *Rupem*, *Aquilegiam*; (*a Verpouſaz*) Octodurum, a *fulleyn*.

58. Lavendula *anguſtifolia* in monte *Vuilly* ſuper vineas maximâ copia in ſabuletis a me lecta eſt, tum a D. Divernoi in deſertis montium.

59. Hyssopus ad rupes Valeſiae & Delphinatus: *Roſmarinus* non vere quidem ſpontaneus, in rupibus ſupra *Ivorne*, tum ad pedem gypſariarum rupium prope *Bex*, & alibi ſe ſponte propagat, atque arboreſcit.

Mentha *anguſtifolia I. ſpicata* C. B. a D. Gagnebin haud longe a *Ferriere*, in Burgundia quidem a *Goumey* propè *Dubin* fl. tum à la *laiche*: a me in vallis Vaudenſis viis publicis reperta eſt, haud longe Viviſco.

Mentha paluſtris verticillata ab *Arvenſi* ſtaminibus eminentibus *Enum. Gott.* diverſa paſſim in Helvetia provenit, ut circa *Anet*.

60. *Marrubiaſtrum vulgare*, *quod ſtachys minima* Riv. circa *Bevieux* in ſegetibus legi, & in vineis *Mulhuſiae* Cl. Hofer *Act. helvet.* T. II.

61. Calamintha *pulegii odore* florem valde ſimilem habet *montanae Germanicae*, cum qua frequentiſſima naſcitur circa *Roche*. Sed quae pulegii odore eſt, florem habet multo minorem, dilute violaceum, tubam tamen proportione longiorem, folia rotundiora. Altera habet folia acuminata, grandiora multo, florem purpureum, duplo majorem, tubam breviorem.

62. Moi-

62. MOLDAVICA *foliis fasciculatis ellipticis, integerrimis, nervo divisis.*

Chamaepytis Austriaca RIVIN. T. 73.

Passim in montibus Aquilegiensibus provenit *aux Nombrieux, à Prapioz, Sur champ*, & in M. *Richard.*

Cum *Ruyschiana glabra foliis integris* AMMANNI omnino eadem planta est, ut specimine Gmeliniano cum alpinis collato facile confirmavi. A *Ruyschiana foliis cartilagineis*, pariter ex Sibiria missa, manifeste differt, foliis quidem tenuioribus, nervo medio eminente divisis, qui in Sibirica nullus est, foliis novi rami longis, quae isti brevia sunt, unde habitus fasciculatus; calycis aristis multo brevioribus: caeterum neutrum folia partita habet, aut spinarum quidquam. Nostrae calycis segmenta quinque, supremum triangulare latius, quatuor reliqua angustiora similia. Flos uncialis fature caeruleus, hirsutus, labium superius incisum, alae sive partes laterales ovatae lanceolatae. Barba bifida, circumserrata, maculata. Stamina quatuor, antheris nigris, albo polline.

DIPSACEAE.

63. VALERIANA *foliis integerrimis, radicalibus ovatis, caulinis linearibus obtusis.*

Nardus celtica J. B. *T. III. p.* 205. & omnium auctorum.

In tenui gramine altissimorum montium ad dextra lacus *Ferraire*, tum in montibus vallis Augustae, donec e regione sis vici *Estrouble*, & supra S. *Bernhardum* CLARETUS. In M. *Scheinberg* Switensium Cl. SCHINZ. Etiam a Cl. ALLIONE accepi.

Plantae characterem nunquam, quantum video definitum, ad recentes plantas designavi. Radix odore forte & stabili, Valerianae, multis squamis obnupta, fibras plurimas cylindricas, durasque, demittit, & multos caules producit. Cau-

lis triuncialis & semipedalis, erectus, simplex. Folia ex radice quatuor, aut paullo plura, petiolo unciali latiusculo, ipsa elliptica, aut longe ovata, obtusa, crassiuscula, pallida. In caule unicum par foliorum linearium obtusorum. Caulem terminat spica nuda, duobus, tribus, quatuorve verticillis florum facta. Eorum verticillorum quilibet constat duobus petiolis trifloris, in supremo unifloris. Semina anulo striato, deinde evoluto pappo terminata, ut in tota gente. Flos campanula lata, patula, quinqueffida, aequalis, extus purpurea, intus fere cinerea: segmenta lanceolata. Tuba flava, longe eminens, terminatur tribus clavis. Stamina in his exemplis nulla. In aliis vero floribus aliorum exemplorum tres antherae flavae, grandes, suis in filamentis extra florem elatae, bifidae, tum flos purpureus, & tamen semen. Explicat rem CLARETUS, ut vere non dioica planta sit, sed mascula stamina prima prodeant, iisque senescentibus pistillum trifidum succedat.

A Cl. MORENIO multo majora, caeterum similia exempla accepi.

Si Valeriana vulgaris laudes meruit Cl. HILLII, majorem spem ab ista specie licet concipere, quae in altissimis montibus nata, multo acrioribus sit viribus, odore vulgarem valde superet.

Celticam vero spicam *Valerianae maximae cacaliae folio* radicem esse (HILL. *mat. med.* p. 580.), comparatis speciminibus, non inveni, neque ea Valeriana in Germania alpina provenit, ex qua in Aegyptum mittitur HASSELQUIST p. 537.

De Scabiosa 2. 3. 4. valde dubito.

CAPITATAE.

64. CINARA *foliis petiolatis, lanceolatis, ad pediculum emarginatis.*

Rhapon-

Rhapontícum alterum anguſtiori folio LOBEL ic. p. 288.

Nobilis planta, neque cognita nuperis, etſi ad medicinariam rem pertinet, naſcitur in M. *Jeman* altiori dorſo.

Radix craſſa, pollicaris, teres, longa, aromatica quando recens eſt, per ſiccitatem rugas longas agit, & corona foliorum ſiccorum terminatur. Folia ad radicem multa, longe petiolata, plerumque ad lapathorum morem longe lanceolata, ad pedunculum emarginata, per oram non profunde dentata, in parte averſa albo tomento obnupta. Non rarum eſt tamen, aliquot paria pinnarum acutarum & gracilium ad hunc petiolum accedere. Caulis latus, digitalis, cubitum altus. Ad caulem folia pauca, ſimilia, ſed breviter petiolata, aliquando pinnata. Flos ſemper unicus caulem terminat, maximus inter capitatas indigenas, ut ſoli cinarae cedat, bimcialis undique. Squamae calycis multorum ordinum ſiccae, periolatae, fine dilatato, ora lacera & laciniata, ut in Rhapontico vulgari. Floſculi omnes fertiles, ſemine columnari longo pappo coronato, qualis etiam in placenta eſt. Floſculi tubo gracili, campanula inclinata, purpurea, tuba eminente.

JACCA *incana capite pini* non recedit, etiamſi folia pleraque pinnata & aliquanto, quam noſtra planta, magis villoſa habet, uti quidem ſolent in calidis regionibus tomenta foliorum augeri. Caput enim ſquamaeque calycis conveniunt. Folia ſemipinnata MILLERI T. 153. in noſtra pariter reperiuntur.

65. Carduus γ, etſi multiflorum caulem habet, non differt a n. 4.

Carduus 3. *Acanthoides* J. B. T. III. p. 56. paſſim a me repertus eſt ad vias, etiam albo flore prope *Salzderhelden*.

Caulis ramoſus, flavis robuſtis, eminentibus lineis, & alis folioſis percurſus, ſerratis dentibus, in flaveſcentes fortes aculeos exeuntibus, quales etiam ex foliorum dentibus producuntur. Folia aliquantum *carduo turbinato* affinia, pinnata,

niſi

niſi quod nervus folioſus eſt, pinnis retroverſis, ſingulo nervo in ſimilem fortem aculeum exeunte, ſubtus piloſa. Flores ſummos ramos terminantes minores quam nutanti, ſeſſiles, abſque petiolis, hinc minime nutantes, ſquamis numeroſis, vagis, etiam reflexis, in ſimiles aculeos, non fortiſſimos terminatis.

66. CIRSIUM 2. *Enum.* abunde reperi in adſcenſu des *iles d' Ormond à la Croix*, circa molendinum *arveja*, & alias in pratis vallis *Ormond deſsus*, tum in pratis vallis Juranae. GAGNEBIN *à l' échelette ſur l' Anvers de Renan*, *au Bugnenet*, *aux Convey*, *à la ronde de Chaux de fond*, circa Monpelgardum D. BERDOT. Cl. le CLERC aux environs *de la dole*, & in M. ad *Gex* pertinente, in adſcenſu a *Gex* ad *Miſoux à la faucille*.

Idem eſt *Cirſium decimum Enum.*, & demum *Cirſium nonum ejuſd. Enum.*, quas ſpecies expungere oportet.

Proprium huic plantae eſt, habere ima folia integra, dentata, ſuperiora vero eo magis laciniata, quo altiora ſunt, donec pinnata ſint, ut in polypodio, a quo nomen habent, pinnis longis, aliquot praegrandes dentes emittentibus, ut in carduis *turbinatis*, per oram molliter ſpinoſis, extrema tamen pinna ſemper longiori. Caulis profunde ſulcatus, cubitalis & bicubitalis, parum folioſus, ſub flore tomentoſus. In ſummo caule, & in ramis, tres quatuorve flores brevibus in pedunculis. Flos conicus, quando floret, ſquamis plurimorum ordinum, glabris, ſublividis, molliſſimo mucrone, triangulis, & eo longioribus, quo ſunt interiores. Pappus plumoſus. Floſculi de more gentis, alias ochroleuci, alias purpurei, cum tuba inſigniter eminente. Semina ovata, compreſſa, linea percurſa.

Vicinum *cirſio pratenſi acanthoidi* folia nulla floribus ſubſtrata habet.

Proliferum etiam reperit Cl. GAGNEBIN fere ſingulis calycis foliis in florem imperfectum exeuntibus in pratis *de Convey*.

67. CIR-

67. CIRSIUM *foliis triangularibus, lunate dentatis, subtus tomentosis Enum. Gott. n.* 16. in M. *Fouly* florens contemplatus sum. Flores in umbellam potius, quam spicam, septem vel octo. Calycis folia hic magis, quam in speciminibus circa pontem *Diaboli* olim a me lectis, lanata, triangularia, brevia. Flosculi omnes androgyni, violacei, tubo stamineo eminente, de quo tuba leviter incisa prodit.

Non repugno esse *Cynoglossi folio* HORTI ELTHAMENSIS, etsi in Anglia, ac Suecia folia lata non habet (LINN. *flor. suec. n.* 714.). Serratula vero caule ramosissimo 6. ZINNII *p.* 387. differt flosculis carneis calycem non superantibus.

68. Cyanum 3. legit D. LACHENAL circa Basileam.

DISCOIDEAE.

69. TANACETUM *flore nutante* nascitur in *Goldey* prope *Underseen*, repertum a D. BERDOT, & circa Mulhausen a Cl. RISLER. Characterem dedi in *Enum. Gott. p.* 371. Ab astere omnino recedit cum semina pappo destituantur, & flosculi in ambitu feminini imperfecti sunt, & absque ligula.

70. *Absinthium Romanum* vera indigena est, & ad rupes circa *Lavey* abunde nascitur.

Sic & ARTEMISIA *foliis duplicato pinnatis, pinnulis parallelis tomentosis Enum. Gott. p.* 372. sive *Absinthium tenuifolium* in M. *Chetillon* circa scaturiginem torrentis *Grisonne* provenit, & in Rhaetiae M. *Beverin* a Cl. SCHINTZIO lectum est, tum *à Couvet*, *à Travers*, & *au cul des Roches* a Cl. GAGNEBIN. *Artemisiae* 6. Enum. Helv. folia prima sericea & incana sunt, ut aliam omnino plantam promittant.

71. Artemisiae 3. nomine duas plantas Cl. viri conjunxerunt. Earum rarior est, ARTEMISIA *foliis sericeis, caulinis pinnatis, radicalibus bis tripartitis.*

Absin-

Abſinthium alpinum ſpicatum foliis petiolatis bis trifidis, caulinis pinnatis Cl. ALLIONE *ſtirp. Pedem.* T. 1. p. 5. huc omnino pertinet.

Naſcitur in M. *Fouly* Valeſiae, nova planta. Folia ad terram petiolata, ſericeo brevi & adpreſſo tomento obducta, incana, tripartita. Segmentum quodlibet ex petiolo tripartitum, laterale inaequaliter, medium aequaliter. Ultima ſegmenta lanceolata, obtuſa, obtuſiora etiam in caulinis foliis. Caulis dodrantalis & ſemipedalis, non ramoſus. Folia ad caulem ſeſſilia, pinnata, pinnarum paribus quatuor, extremo ſegmento maximo, & latiori, pariter ſericea. Petioli florigeri ſolitarii ex alis foliorum, in longam folioſam ſpicam digeſti, cujus pars ſumma denſior eſt, & petioli breviores, erecti omnes. Calycis folia ovata, ſubhirſuta, ora fuſca. Floſculi in ambitu feminini, ſola cum tuba; ſemine plano, pene cordiformi, & abſque ſtaminibus. Interiores androgyni, cum lutea campanula, & ſtaminibus. Placenta nuda.

Icon BARRELIERII n. 642. & ſylvii BOCCONE T. 71. huic propior eſt.

72. ARTEMISIA *foliis ſericeis caulinis pinnatis, radicalibus petiolatis pinnatis, pinnis trifidis & quinquefidis.*

Abſinthium alpinum incanum C. B.

Haec multo vulgatior, in pleriſque montibus editis & frigidis, alpium tamen, provenit, tum ad Rhenum ſuperiorem & lacum Rivarium: in alpibus Urienſium, Angelimontanorum, Abbatiſcellanorum J. GESNER. SCHEUCHZER in M. *Joch Tittiſperg, Gemmi.* Ego in *Gemmii* meridionali deſcenſu, in M. *Scheidek, Mettenberg, Grindel, Wangenalp*, in alpibus Aquilegienſium *Enzeinda, Prapioz, Chapuiſe, Jeman, Sur champ, Richard* legi; tum *ex valle de Bagnes, S. Bernhard* & alibinde habui.

Alia planta omnino, etſi leviter adſpicienti eadem videri poſſit. Radix brachiata multiplex, lignea, teres, tuberculoſa. Folia ad radicem petiolata, pinnata, pinnarum paribus duobus,

duobus, extrema impare: pinnarum quaelibet iterum trifida eſt & quinquefida, ſericeae quidem omnes, ſed anguſtiores, hinc acutiores quam priori, caulis pariter ſubhirſutus, purpuraſcens. Folia ad caulem pinnata, duorum, triumve parium, pinnis anguſtioribus, quam prioris, & ſimplicibus, lanceolatis; demum ſimplicia ex ovatis lanceolata. Flores in petiolis longioribus etiam ſeſcuncialibus erecti, niſi quod imi, forte ſoli, in gracili pedunculo nutant. Calycis folia hirſutiora, quam priori, viridiora, ora minus fuſca, aut omnino alba. Circulus caeterum ſimilis floſculorum femininorum, imperfectorum, cum interiores androgyni ſint, & campanulam quinqueffidam, luteolam habeant. Placenta nuda. Tota planta priori minus dura, odorata, aromatica, uti prior, ſed aliquanto diverſo odore. Vocant *Genipi blanc* alpicolae, & ea pariter ut Achillea in pleuritide utuntur.

Inter ſibiricas GMELINI haec eſt *Artemiſia* 95. etſi alio cum ſynonymo, teſte planta ſicca MARTINIANA. *Abſinthium V.* GMELINI *p.* 128. *T.* 62. alia omnino planta eſt, vel receptaculo teſte, altiori etiam habitu.

73. Abſinthium I. Enum. ſeu *alpinum candidum humile* a n. 72. non differt, cui perfecte convenit figura Cl. ALLIONII. Unice minora exempla ſunt, floribus nullis petiolatis, iiſque in ſummo caule congeſtis.

74. *Gnaphalium* 3. *ſeu Americanum latifolium* omnino totum collem late operit ad dextram villae *Drakau*, ſupra Arolam. Non repugno vero primordia ex horto habuiſſe.

75. *Gnaphalium* 7. ENUM. habet multo plures flores ſeſſiles, congeſtos, breviores, calycibus villoſis, ſquamis lanceolatis, ora fuſca: floſculos in ambitu pariter feminas, minimo floris tubo, & eminente cum tuba: androgynos tamen etiam numeroſos, campanulatos.

76. *Gnaphalium* 8. ENUM. habet flores tres quatuorve in ſummo caule congeſtos: ſquammas calycis lividas fuſcas, ſubhirſutas, oris nigris, juniores tamen penitus albas. In

ambitu floſculi feminini pauci, tuba eminente facti, & tubo florali; interius androgyni numeroſi. Iis campanula quinquefida pallens, de qua tuba bifida cum pappo longe eminet. Folia prima, ſubrotunda. In Montibus *Sur champ* & *Richard*. Vera & diverſiſſima planta eſt. Erit FILAGO *caule ſimplici, floribus cylindricis, fuſcis, in ſummo caule quaternis pappoſis*.

77. Alia iterum planta eſt FILAGO 6. Enum. *caule ſimpliciſſimo, pauciflore, calyce fuſco, glaberrimo*.

Gnaphalium ſupinum Lavandulaefolio BOCCONI p. 107. T. 85. ut videtur.

In *Wangenalp*, *Jeman*, *S. Bernhard*, montibus vallis de *Bagnes* &c.

Huic caules ſimpliciſſimi, dum floret, vix erecti, aegre triunciales, poſtquam defloruit etiam ſemipedales. Flores in ſummo caule tres, duo, ſaepe etiam unicus congeſti dum planta viget; poſtquam defloruit remoti: proportione plantae magni, cylindrici, ſed breviores quam Filagini 7.: ſquamae calycis glaberrimae, fuſcis oris. Floſculi in ambitu pauci imperfecti, plures androgyni, campanula flava in fuſcum colorem degenerante. A filagine 8. calyce glaberrimo differt, a ſpicata, quae etiam in alpes adſcendit, habitu paucifloro, flore non conico.

Hoc eſt ex deſcriptione *Gnaphalium* 29. LINNAEI, etſi alia habet ſynonyma. De floſculis vero androgynis non adtinet dubitare.

78. PETASITES *floribus ſpicatis, floſculis pauciſſimis androgynis, calycis foliis lanceolatis* abunde naſcitur in ſylva *Traverſin*, ubi legi, qua itur au *Torrent des males pierres*, & à *Roulier mairie de la Brevine* a Cl. CHATELAIN lectus, tum in valle *Ormond deſſus* paſſim, & alibi in frigidis alpium, *Breitlawenen &c.*

Cum Petaſite 3. in multis convenit, diverſa tamen, non ſolum multo foliorum, & caulis tomento, ſed potiſſimum etiam ſpica breviſſima, pauciflora, flore ſextuplo majori, ſegmen-

ſegmentis calycis lanceolatis, quae in Petaſite 2. obtuſa ſunt. Character ſimilis, & duo, vel tres unice androgyni floſculi, cum multis femininis.

XERANTHEMUM, a me deſcriptum p. 709. omnino varietas eſt vulgaris *Xeranthemi* junioris, nondum explicati, valde ramoſi.

RADIATAE.

79. INter ERIGERONTIS ſpecies oportet conjungere duas, quas primo & ſecundo loco enumeravi. Nam vere omnino continua ſerie progredi licet ab exemplaribus caule unifloro calyce albo tomento obducto, quae ſpecies in M. *Enzeinda* abunde provenit, altioribuſque montibus vallis *Bagnes*; inde ad ſpeciem 2. ejuſque varietatem *minorem*, cui calyx & folia ſubhirſuta, & denique glabra ſunt, caulis etiam uniflorus, & quae *Conyza caerulea alpina minor* C. B. eſt: denique ad varietatem 3. altiorem, cubitalem, foliis etiam ad caulem ſubrotundis, caule brachiato, aliquot floribus terminato, quae *Conyza caerulea alpina major* C. B. Varietatem 2. albo flore reperi in *Enzeinda*, *Chapuiſe*, *Forclettaz*, & *Prapioz*. Varietas altior creſcit in M. *Danſex*, *Richard*, *Sur champ*, & *Ovannaz*. Nomen autem melius dici poteſt ERIGERON *foliis imis petiolatis ſubrotundis, ad caulem lanceolatis, petalis femininis ligulatis.*

80. ASTERIBUS oportet tres ſpecies addere, noviter in Helvetia inventas, flavo flore omnes.

ASTER *caule ramoſo, foliis ovato lanceolatis ſubtus incanis, odoratis, floribus luteis umbellatis.*

Helenium montanum ſalicis folio ſubtus incano VAILL., ut ex ſpecimine ſicco confirmor, quod a VAILLANTIO per STAEHELINUM ad me pervenit: ſynonima vero huc referri nequeunt, cum *Aſter III. Pannonicus* CLUSII diſerte ab Ill. Viro dicatur odore carere.

Passim circa Bernam a me lectus est inter arundines supra praedium *Inseli* ad *Arolam fl.*, deinde inter salices *aufm bodenaker*, inque insulis circa *Hunziken*, & in solitudine *die Eymatte*, autumnalis planta, parum nuperis cognita. Radix lignosa, teres, deorsum fibras numerosas demittit. Caulis bicubitalis, ramosus, superne brachiatus, valde multiflorus, rectus, firmus, lineatus, hirsutus, saepe purpureus. Tota planta odore conyzae est, & pene pulegii. Folia inordinata, sicca, ex ellipticis lanceolata, rariter dentata, rugosa, subhirsuta, subtus pene tomentosa, alba. Flores in umbellam planam dispositi, dense congesti ad quemlibet ramum aliquot: Calycis folia exteriora lata, lanceolata, reflexa, vaga, duorum ordinum: interiora erecta, & ad florem appressa pariter duorum ordinum. Petala plana 40. & ultra, obtusa, quinque dentata, aliquot ordinum, sibi fere parallela, flava. Flosculi copiosissimi, discus planus. Staminum aculei retrogradi, ut LINNAEO *Inula* sit. Seminis pappus longiusculus.

Odores & colores, qui sensibus percipiuntur, quando constantes sunt, in plantarum nominibus excludere, in animalibus admittere ejus est, qui leges nutu figar atque refigat.

81. II. ASTER *foliis radicalibus petiolatis ellipticis, ad caulem lanceolatis, sub caulis divisione laciniatis.*

Aster luteus major folio succisae RUPP. p. 180. *ed. meae*, non vero C. B., qui *Inula* 4. LINN. *spec. p.* 882. uti quidem suspicor.

In Germania legeram Jenae, locis a RUPPIO citatis, tum circa *Salzderhelden*, ad *Werram* fl. prope *Witzenhausen*, & alibi. In Helvetia abunde reperi ad oras lacus Lemani, aux *Grangettes*, haud longe *Noville*.

Satis adfinis Asteriscо, ejusque iconi CLUSIANAE, & ab Astere 3. Enum. *Stirp. Helv.* diversissimus est. Radix exigua, dura, capillata, multifida. Caulis hirsutus, purpureus, cubitalis aut aliquanto altior. Folia prima utique cum Succisa

cisa conveniunt, petiolata, elliptica, mucronata, perpaucis denticulis notata, aut nullis, leviter utrinque hirsuta. Folia caulina evidentius serrata, ora saepe purpurea, principio angustiori, petioli simili; inferiora latiori basi quasi caulem amplexa, ex ellipticis lanceolata; superiora etiam plicata & laciniata. Flores in summo caule aliquot, grandes, uncia latiores. Folia calycis exteriora lata caulinorum similia, retrograda: interiora angusta, subhirsuta, apicibus longe lanceolatis, reflexis, laxa, neque sibi, ut in Astere 4. adplicata. Petala semper numerosa, quinquedentata, angusta, plurium ordinum. Semifloſculi minimi, discus paullum convexus, pappus longus & copiosus.

82. ASTER *foliis omnibus integerrimis, ovatis, tomentosis, caule unifloro.*

Aster montanus hirsutus LOBEL p. 350.

Auf der Kandermatt Cl. KOCH pharmacopola Thunensis. Circa *Kertzen* Cl. RAMPSEK. Ego nunquam reperi. Facile adgnoscitur foliis nitentibus, sericeis, crassulis, utraque superficie albo tomento obnupta, ora leviſſime serrata. Ima petiolata sunt, suprema amplexicaulia, lanceolata. Flos grandis uncialis. Calycis squamae imae nitidae, non ita reliquae, latae omnes, lanceolatae, in meis speciminibus per aetatem repandae. Semifloſculi lati, aurei, quinquedentati. Floſculi numeroſiſſimi, pappus copioſiſſimus. Non omnino singulares, sed duo, treſve in uno caule flores sedent.

Asterem 9. nemo recentiorem reperit.

Inulae genus, ut a minuto, & in minoribus speciebus aegerrime percipiendo charactere sumtum, totum artificiale est.

Ad *Senecionam* II. *S. Chrysanthemum alp.* 1. CLUS. *Pann.* p. 566. adde abunde nasci in M. *Jeman*, & popularibus dici *Genipì Jaune*, & in montibus etiam supra *Bagnes* lectum esse, & in *Bovinaz*, montibus vallis Augustae, atque supra *S. Bernhardi* M. Caly-

Calycis ſegmenta unius ordinis, obtuſa, nigro margine finiuntur, cum pauciſſimis, aut omnino nullis ſquamis, ad baſin floris acceſſoriis. Petala lata, lineata, obtuſa, inciſa, pauca, duo, tria. Floſculi grandes & ipſi pauci: pappus praelongus.

84. *Jacobeae vulgaris* ſpecimina prope *Roche à la marbrière* menſe Octobri reperi, quae perfecte abſque radiis eſſent.

Sencionem 6. parum diverſum a *vulgari Jacobaa*, cui & ipſi juniori calycem ſaepe lanuginoſum reperi, legi ad lacum lemanum.

De *Senecione* 12. 14. 15. 16. 17. nihil porro inaudivi.

85. *Anthemis* MICHELI *Chamaemelum* quidem eſt VAILLANTII, ſed eae plantae, quas nunc expono, facile poſſunt cum *Achilleis* manere, quarum ſemifloſculi breves ſint latique. Difficillimum vero fuerit, tres, quatuorve ſibi ſimiles ſtirpes ſeparaſſe, quas tamen ſeparare, vel ob vires medicas oportet, quas habent diverſiſſimas, aliae acres, aromaticas aliae, aliae omnino nullas, quae ſenſibus percipiantur.

86. I. ACHILLEA *foliis pinnatis, pinnulis acute trifidis, laxe diſpoſitis*.

Parthenium alpinum CLUS. Pann. p. 262. *hiſt.* p. 336.

Anthemis alpina ſaxatilis umbellata perennis calyce nigricante MICHELI p. 33. Vetat huc referre Cl. SEGUIER, quod uniflora ſit. Verum CLUSIANA multiflora huc MICHELANIANAM ducit.

Haec ſpecies reliquis multo vulgatior, paſſim rivos alpinos obſidet, ut torrentis *Avançon Scaturigines* in M. *Enzeinda*, aut ſaxa *Gemmii*, *Gotthardi*, *Grimſulae*, *furcae* M., *Ovanna*, *Prapioz*, *Sur champ*, *Richard*, & *Chapuiſe*.

Radix nigra, lignoſa, ramoſa, fibroſa, reptans, multos caules producit, eademque guſtata fatua primum, demum igneum in lingua & durabilem pyrethri ſaporem relinquit. Caules dodrantales, pedales, duri, inferne glabri, ſuperne hirſuti,

hirsuti, ut petioli denique tomentosi sint. Folia sature virentia, pinnata, petiolo plano, pinnis distinctis planis, decem, duodecimve parium, quarum primae simplices, quae sequuntur acute & saepissime inaequaliter trifidae sunt, ultimae simplices. Flores in umbellam, sex & duodecim etiam florum. Calyx inverse conicus, cujus folia prima viridia hirsuta, reliquis in ordinibus lutea, cum ora nigerrima, ut in cyano. Petala plana ovata, lata, obtusa, tridentata, alba, decem, duodecim. Squamae inter flosculos fuscae: ipsi flosculi albi, staminum tubus flavus. Planta tota inodora.

87. II. ACHILLEA *aromatica foliis pinnatis, pinnis simplicibus punctatis, glabris.*

Anthemis alpina saxatilis odorata minima perennis floribus exiguis umbellatim compactis MICHELI p. 59.

Tanacetum alpinum odoratum C. B. SCHEUCHZER *Itin.* II. p. 242. T. 21. f. 3. I. VI. p. 462.

C. GESNERUS in M. *Braulio*; J. BAUHINUS in montibus Rhaeticis, SCHEUCHZERUS in Praegallienſibus, nos ex M. *Jeman*, *Fouly*, montibus supra *Bagnes*, & *S. Bernhardi*.

Véritable Genipì Medicorum circa alpes medentium.

Difficile judicium est, num a priori diversum sit, ut Cl. Viri senserunt, num varietas, ut ego in priori opere. Accurate vero rimando haec discrimina reperi. Radix non acris. Caules humiliores, minus sub floribus tomentosi. Folia pallidius viridia, pinnis plerisque simplicibus, parium pauciorum, fere sex & octo; eadem pleniſſima foveolarum, hinc pulposa, & ad microscopium reticulata. Squamae calycis proportione breviores, inprimis si extremas compares, leviſſime ad vitream lentem hirsutae, magis compactae, ora potius fusca quam nigra. Flores minores. Tota planta odore grato aromatico, penetrabili, quem etiam culta retinet. Vere adeo differt.

Haec planta ad pleuritides febresque antidotus est alpicolarum, & in theae modum pota sudorem movet *Journ helv.*

1758.

1758. M. Sept.: calida tamen, & nocitura, quoties non ſanat.

Altitudo bicubitalis *Achilleae* GMEL. T. 83. f. 1. vix videtur admittere, ut noſtrae eadem ſit, cum praeterea Cl. noſter amicus flores ampliſſimos, radicem parvam faciat, nec aromatici, gratiſſimi, odoris meminerit.

88. III. ACHILLEA *aromatica foliis pinnatis, pinnulis acutis, villoſis.*

In M. *Fouly* Valeſiae.

Multo ſubtilius huic a priori eſt diſcrimen, cum perinde odorata ſit, perinde folia habeat reticulata, & punctata, pulpoſaque: alius tamen, etiamſi etiam gratus, odor eſt. Folia diverſa, tota hirſuta, pinnis plurium parium, duodecim, ſibi propioribus, magis aequalibus, latioribus proportione longitudinis, ſaepiſſime ſimplicibus, niſi in radicalibus foliis, quibus breviter bifidae pinnae ſunt & trifidae. Hinc totum folium longius. Juniora, quae priori glabra, huic villoſa ſunt; adulta, in hac varietate, pene calveſcunt, non tamen unquam penitus hirſuties deficit.

A floribus congeſtis non poteſt diſcrimen ſumi, nam etiam in 1. & 2. ſaepe perinde congeſtos vidi.

89. Haec eadem 88. tomento penitus obvoluta in altiſſimis montibus naſcitur, & eſt

Millefolium alpinum tomentoſum BOCCONE T. 170. *odoratum nanum* p. 166., qui hoc ipſum vult dici *Genipi*; uti quidem dici meretur.

Achillea foliis pinnatis lanugine totis obductis floribus albis umbellatis ALLIONE *plant. pedem* p. 9. T. 2.

In eo ſtatu, etſi ſummarum alpium, tamen vulgatius eſt. SCHEUCHZERUS in jugis *Averſanorum* & *Praegallienſium*, & in deſcenſu *Furcae* M. verſus *Valeſiam*. Ibi & ego abunde legi: frequens etiam eſt in M. *Bernhardo*, in montibus vallis *Bagnes*. *Hinterrhein* Cl. SCHINZ.

Humi-

Humilius aliquanto eſt. Caulis ſaepe curvus, cum foliis totus albo tomento obnuptus, ut fere in Creticis ſtirpibus ſolet. Florum umbella compacta, calyce hirſuto, oris foliorum fuſcis, ſemifloſculis minoribus ſimiliter obtuſe inciſis. Folia proportione longa, pinnis vicinis brevibus, trifidis, quadrifidis, foveolis balſamicis minus conſpicuis, aut nihil quidquam. Non ob aetatem tomentum dejicit, nam utraque ſpecies perinde florens & perfecta reperitur. Sed ob loci natalis diverſitatem, villoſior, quo altiori loco naſcitur, cum in humilioribus villum dejiciat adulta. Separaſſem omnino, niſi omnes medios inter utramque gradus poſſiderem, a perfecta glabritie ad ſummam tomenti ubertatem.

90. Vereor, ut *Achillea* 10. a vulgari ſatis diverſa ſit, quam circa *Branſon* Valeſiae abunde legi an. 1757.; continuos enim hoc inter, & *vulgare millefolium* gradus mihi ſum viſus adnotaſſe. Idem de n. 7. metus eſt.

Achillea 11. ſeu *lutea* maxima copia circa *Branſon* in rupibus provenit.

PLANIPETALAE.

91. IN hac claſſe ea noſtra fortuna fuit, ut pluſculas addere cives; alias, in quibus haeſeramus dubii, nunc expedire poſſimus.

I. *Lampſana caule nudo indiviſo, foliis ſemipinnatis, pinnis retrogradis dentatis.*

Leontodoides alp. glaber, eryſimi folio, radice craſſa foetida MICHELI p. 31. T. 28.

Dens Leonis minimus C. B. ex fide horti ſicci.

Nihil vulgatius in ſylvis umbroſis & udis montium Aquilegienſium. Legi ſuper *Roche* in ſylva le *Traverſin* cis torrentem *des males pierres*, in adſcenſu M. *Enzeinda*. Miſerunt Cl. Viri SEGUIER & MORENI.

Folia ad terram peculiari habitu pinnata, pinnis retroverſis, aliquot non multis dentibus inciſis, ſaepe ſuper ſe invicem reduplicatis & imbricatis. Caulis aphillus, ſemipedalis. Squamae ad calycis baſim acceſſoriae capillares aliquae. Verae calycis ſquamae ſeptem, nigricantes, lanceolatae. Flos, quam taraxacis, minor ſaturate flavus, petalis dentatis. Semina fuſca, columnaria, neque ſquamis diſtincta, neque ullo modo coronata, niſi floſculo.

92. II. LAMPSANA *foliis ovatis dentatis, caule nudo, floribus nutantibus* Enum. hort. Gotting.

Hieracium VII. CLUS. *Pannon.* p. 649.

Abunde provenit in agris ſeptentrionem ſpectantibus inter *Hindelbank* & *Rormooss* ad dextram viae, quae ducit ad oppidum *Burgdorf*.

93. TARAXACON 2. eſt varietas primi.

Quintum Enum. p. 741. miſit etiam Cl. ALLIONIUS. Foliis glaberrimis a 6. differt, non tamen, ut vereor, ſatis diverſum eſt.

Ad n. 6. omnino refero Taraxacon 7. *Enum.*, ut verae ſpecies ſuperſint 1. 3. 4. 5. 8.

94. HIERACIIS accenſere oportet.

I. HIERACIUM *foliis ovatis lanatis*.

Hieracium montanum tomentoſum DILL. *hort. Elth.* T. 150. f. 180. MILLER T. 146.

Radix perennis, dura, ſquamis aſpera. Ex ea & caules floreſcentes prodeunt, & alii, qui altero anno florebunt. Folia ad terram petiolata, ovata, & paullum lanceolata, margine integerrimo, craſſa ſubſtantia, tota tomento albo villoſa. Ad caulem unum alterumve folium ſimile, acutum, ſeſſile. Caulis aliquoties brachiatus, triflorus, quadriflorus. Calycis folia albiſſimo longo tomento villoſa. Flos flavus. Deſcribit LINN. *Cent.* 1. *n.* 76.

Legit in rupibus ad *Saillon* CLARET, tum inter *Charat* & *Saxon* ad viam Sedunum ducentem.

95. II.

95. II. HIERACIUM *caule unifloro, foliis ad caulem ovato lanceolatis dentatis amplexicaulibus.*

Hieracium montanum rapifolium C. B. *Prodr. p.* 65. *Basil. p.* 38.

C. B. in M. *Wasserfall* legerat, ego diu desideratam plantam in M. *Luan.* frequentissime legi. *Aux Nombrieux* rupestri loco *supra les plans* etiam nascitur.

Speciosa inter Hieracia magnitudine planta est, radice lignosa, terete, curva, pilis longis barbata, quae sunt petiolorum siccatorum reliquiae: foliis ex radice numerosis, longe petiolatis, ellipticis, lanceolatis, pedem longis, petiolo folioso: foliis vero ad caulem quamor vel quinque, amplexi caulibus, auriculis obtusis, margine dentibus longis rariter serrato. Figura folii ex ovata lanceolata est, acuta, tota glabra sunt, nervo solo villoso. Caulis cubitalis, longe plerumque uniflorus, raro biflorus, crassus, lineatus, sub flore albo tomento barbatus. Flos grandissimus, fere in tota classe eminet. Calyx pilis & tomento nigro barbatus, caetera lignei coloris, segmentis latis, trium ordinum. Color flavus, & numerus semiflosculorum maximus.

LINNAEUS non habet Hieracium 24. GMELINI T. 10. a nobis in horto Gottingensi cultum, differt caule ramoso, multifloro.

An fuerit *Hieracium alpinum villosum pulmonariae foliis caulem ambeuntibus* Cl. GARCIN, lectum in sylvis supra *Vallangin*?

96. III. HIERACIUM *foliis lanceolatis, glaucis, caule brachiato multifloro.*

Hieracium VI. montanum CLUS. *Pannon.* p. 645. 646.

Hieracium montanum anguslifolium nonnihil incanum C. B., sed nostrum non est uniflorum, neque scabrum LINN. *spec. p.* 799.

In rupibus, quibus eremitae Agaunensis cellulae subjiciuntur, maxima copia provenit, tum in arenosis *de la grande*

eau: & Octoduri ; etiam Verona missum a Cl. Morenio.

Radix perennis, lignosa, fusca, teretibus crassis fibris capillata. Folia ad radicem plurima, ad caulem perpauca, glauca, longe lanceolata, acutissima, vix supra 8. lineas, rarissime dentata, ad caulem nulla fere nisi stipulae. Caulis durus, striatus, brachiatus & ramosus, multiflorus, non tamen in umbellam, cubitalis. Flores multo, quam in hieraciis pilosellae similibus grandiores, calyce nigro farinoso, hirsuto.

Idem crediderim esse *Hieracium alpinum scorzonerae folio* Scheuchzer Enum. n. 27.

97. Ad Hieracium 10. sive *radice praemorsa* adde, in calidioribus Helveriae non solum viscidum, sed grate etiam odoratum nasci cum radice crassa, lignosa, teretibus radiculis capillata. Folia ei ima petiolata, ovaro lanceolata, per marginem longis dentibus, fere ut *rapifolium*, serrata, ad caulem ovato lanceolata, vix dentata. Caulem hirsutum, habet cubitalem, aliquoties brachiatum, singulo ramo multifloro, petiolis villosis unguentatis. Calyx obscure viridis, pilis & ipse capitatis, globuliferis villosus. Meretur nomen Hieracii *foliis ovato lanceolatis, obiter dentatis, viscidis, caule brachiato multifloro*.

Linnaeus non habet; nam ejus *Hieracium praemorsum* a nostro differre videtur calyce non hispido, odoris & viscoris absentia V. *flor. suec.* p. 273.

98. Emendare etiam oportet descriptionem Hieracii 10. sive *foliis ad caulem amplexicaulibus pilosis, rarissime dentatis, caule multifloro*, quod *Hieracium montanum majus latifolium* J. B. T. II. *p.* 1036.

Legi in pascuis M. Jurae, in laetis pratis M. *Jorogne*, in adscensu *aux Granges* ad *Forclaz a Chapuise*.

A *Griesbachiano latifolio* differt omnino. Folia ovata acuminata, ex hora pilosa, pilis de nervis omnibus, totoque rete inferiori exeuntibus: ad caulem amplexicaulia, auricu-

lis

lis retrocedentibus, obtusis, dentibus ubique brevissimis: cubitali caule, floribus in summa planta numerosis, multo, quam in latifolio Griesbachiano, majoribus, calyce nigricante, duris & nigris pilis barbato. Non habet LINNAEUS.

99. *Hieracium latifolium montanum alterum Genevense foliis conyzae majoris Monspelienſis* J. B. II. *p.* 1026.

Hieracium montanum alterum leptomacrocaulon COLUMN. *Ecphraſ.* p. 249. ic. p. 248. habet folia, nervis exceptis, glabra, longiora, anguſtiora, multo frequentius dentata, auriculis acutis ariſtatis caulis amplexa; florem quam ſequenti grandiorem, nigris villis barbatum. Dixerim HIERACIUM *foliis amplexicaulibus ſerratis acutis, auriculis ariſtatis, calycibus villoſis.*

100. Denique *Hieracium foliis ad caulem glabris ſerratis lanceolatis, ſupremis profunde diſſectis.*

Hieracium latifolium glabrum ex valle Griesbachiana J. B. T. II. p. 1023.

Hieracium 21. GMELIN T. IX. omnino, ex foliis & calyce nigris pilis hirto.

In ſylvis noſtris humidis pratiſque familiare, ab utroque diverſum eſt. Cum proxime priori convenit foliorum nervis inſignibus, foliorum crebris denticulis, auriculis acutis, foliis etiam magis glabris abſque pilis. Differt dentibus multo grandioribus, floribus exiguis, calyce nigro paullum, & multo minus quam priori barbato, dentibus folii grandiobus, & ſub caulium brachiis adeo profundis, ut folia pene laciniata ſint. A penultimo glabritie, dentibus & auriculis, cauleque glaberrimo differt.

101. Expungi poſſe credo *Hieracium* 2. 11. 15. 19. De 24. 25. 28. 30. 31. porro oportet quaerere, & de 14. dubitari poſſet, an pro varietate haberi praeſtet.

102. Intybi duas ſpecies hirſutas, ut diſtinguerem, elaboravi. Ergo INTYBUS *foliis omnibus ellipticis hirſutis, ſerratis*, qui *Hieracium fruticoſum latifolium hirſutum* vulgo dicitur,

citur, cumque eo nomine ab Ill. DILLENIO ad me missus est, & Octoduri, & in via *Tombey*, tum Bernae, tum in prato praecipiti optimi D. Ith secundum orani pinastreti *Dalholzlém* provenit, is quidem similis Intybi glabri est, durior, caule firmissimo, rectissimo, in summa planta paniculato, caetera vix ramoso: foliis ad caulem numerosissimis, dense congestis, firmis, siccis, hirtis, elliptico lanceolatis, paucis, sed magnis dentibus serratis, squamarum calycis lividarum ora pallente. Uniflorum reperit prope *Battenberg* Cl. BERDOT. Non habet LINNAEUS.

103. Alter autem Intybus *foliis inferioribus ellipticis hirsutis serratis, superioribus ovato lanceolatis*, quem *Hieracium fruticosum latifolium folio subrotundo* vocant, omnino diversus, Gottingae in sylvis provenit, altior quidem planta, & bicubitalis, sed debilior. Folia inferiora quidem satis similia habet, sed superiora longe diversa, sessilia, lata, brevia, ex ovatis lanceolata: calycis squamae etiam totae nigrae sunt, & flos potius grandior. Est *Hieracii Sabaudi varietas*. *Erinus quibusdam* MATTH. *dicta* J. B. T. II. p. 1030., & *Hieracii Sabaudi varietas altera* ibid. *Hieracium* 30. GMELII T. 24.

Receptaculum, quod nudum vocat Cl. LINNAEUS *flor. suec.* p. 274. omnino alveolatum est, uti memini me an. 1750. Cl. MISSAE jam ostendisse.

Inter stirpes D. le CLERC fuit *Hieracium fruticosum folio angustissimo, lineari, incano, glabro*, cum uno alterove dente, quod nunc non memini me alias reperisse.

Crepim, quae *Hieracium dentis leonis folio flore suaverubente*, in M. *Wasserfall* nasci scribunt auctores *der Basler Merkwurdigkeiten* p. 1800. Nondum audeo inter nostrates referre.

104. *Scorzonerae* duae helveticae, quas dubia ex fide, neque visas, recensueram, nunc abunde lectas facile constituo.

Scorzonera caule nudo, unifloro, foliis petiolatis ovato lanceolatis.

Scorzo-

Scorzonera humilis latifolia Pann. II. Clus. hist. p. cxxxviii. Abunde provenit Rupe, Agauni, circa sacellum *N. Dame du Sex* &c.

Radix maxima, teres, anulata, corona pilorum ad exitum de terra ornata. Folia ad terram plurima, longe petiolata, nervosa, glabra, ex ellipticis lanceolata. Caulis pedalis, simplicissimus, praeter aliquas, ex ovatis lanceolata ligulas, nudus. Flos in singulo caule unicus, grandis, calycis foliis 3. & 4. ordinum triangularibus, eo latioribus, quo interiora. Petala numerosa, pallide lutea, lineata, dentata. Hanc non visam habueram pro Germanica.

105. II. Scorzonera *caule nudo unifloro, foliis linearibus nervosis.*

Scorzonera humilis angustifolia Pann. III. Clus. ibid.

An *Scorzonera caule simplici unifloro foliis ex lineari lanceolatis* Gmelin *flor. sibir.* T. 2. T. 1.

Radix similis, & pariter pilis coronata: similis etiam caulis simplicissimus, & flos, minor tamen. Folia vero angusta, nervosa, linea non latiora, cauli aequalia. Flos similis, sed minor, petalis pariter lineis striatis, quas purpureas fuisse vidi. Semina sulcata, curva, sessili plumoso pappo ornata.

Au Tombey inter *Aquilegiam* & *Ollon* primo vere floret.

A caule *basi villoso* nomen sumi nequit, quum species I. perinde villum habeat in summa radice; neque pediculus nostris *incrassatur*.

CAROLI ALLIONII

SYNOPSIS METHODICA STIRPIUM

HORTI TAURINENSIS.

POſtquam Horti Taurinenſis cura ab Auguſtiſſimo, & Invictiſſimo REGE *noſtro mihi commiſſa fuit, muneris mei omnino eſſe putavi ſtirpes omnes in eodem contentas diligenter recenſere, & alienis aut vagis nominibus ſatas expendere, ut tyrones ea qua decet ratione inſtituere poſſem, & hortum magis, magiſque locupletare. Hujus laboris fructus eſt haec ſynopſis, in qua plantae omnes, quas hoc anno coli obſervavi, enumerantur eodem ordine, quo adoleſcentibus eaſdem explicandas ſuſcepi. Nomina ſunt* trivialia *Celeb.* LINNAEI, *quorum uſum opportunum exiſtimavi, ut brevitati conſulerem, nec anguſtos commentarioli limites tranſgrederer; eo vel maxime quod praedictis nominibus alia ab auctoribus uſitata facile reperiri poſſint in libro ejuſdem* LINNAEI, *cui titulus* ſpecies plantarum. *Eas porro herbas, quarum trivialia nomina nondum conſtant, aut quae diſtinctas ſpecies conſtituere viſae ſunt, ſeparatim recenſendas curavi. Genera, ut quiſque videt, ſervanda mihi fuerunt qualia a* LINNAEO *proponuntur, pariterque ſpecies ſecundum ipſius praecepta, ad propria genera referuntur. Aliquot denique minus notae ſtirpes accurata deſcriptione illuſtrantur, & quaenam Pedemontanae hujus regionis indigenae ſint, aſteriſco notatur.*

CLAS-

CLASSIS PRIMA.

Plantae flore monopetalo ſimplici.

I. MONOSTEMONES.

Canna indica.

II. DISTEMONES.

A. GYMNOTETRASPERMAE.

Salvia officinalis *
horminum *
ſclarea *
pratenſis *
agreſtis [1]
verbenaca
verticillata *
glutinoſa *
canarienſis
ceratophilla
aethiopis *
afr. caerulea
. . . . [2]
. . . . [3]
. . . . [4]
. . . . [5]
Roſmarinus officinalis *
Lycopus europaeus *
Ziziphora tenuior
Monarda didyma

B. DIANGIAE.

G Vero-

1 *Horminum pratenſe niveum foliis incanis* BAUH. *pin.* 238. V. LINN. *amoen. T. III. p.* 399.

2 *Salvia orientalis fruteſcens, foliis ſubrotundis, acetabulis moluccae*, TOURN. *cor. p.* 10.

3 *Salvia cretica anguſtifolia* CLUS. *hiſt.* 343. *Salviae officinali* ſimilis, diverſa tamen. Folia minime aſpera, ſubincana, & brumali tempore omnino incana, mollia, acutiora. Verticilli decemflori & nudi. Flos minor barba magis pendula, & ad ſuam originem ſtriis & maculis violaceis picta: Antherarum, quae luteae ſunt, margo obſcurus. Semina magna compreſſa ſubrotunda duo tantum fere maturantur. Suavius & minus vehementer odorata eſt. *Salvia cretica* LINN. alia omnino planta eſſe debet cum calyces diphillos ei tribuat Celeb. AUCTOR.

4 *Salvia villoſa & viſcoſa, foliis lanceolato-ovatis, verſus petiolum angulatis.* Exoticae originis planta, neque, quod ſciam Botanicis nota. Ex duro & fere lignoſo caudice erigit virgas ad ſummum cubitales. Folia ſimilia ſunt foliis *ſalviae officinalis*, ſed minora, viridia, non aſpera, ſed cum tota planta viſcoſa, & alto denſoque villo barbata. Folia prima petiolata, & ſenſim deinde ſeſſilia, verſus petiolum ampliora, & angulata. Calix ſtriatus bilabiatus. Labii ſuperioris dentes tres minimi approximati aegre diſtinguendi; inferioris ariſtati aliquantulum divaricati. Flos albus tubo corollae calycem aequante: Galea villoſa fornicata, truncata, non falcata, Alae ſubrotundae rectae. Barba concava, obverſe cordata, ſubpurpurea, triangulariter emarginata. Antherae luteae extra galeam protenſae. Semina laevia, nigra, ſubtrigona oblonga. Odor totius plantae validus, qualis *ſalviae ſclareae*.

5 *Salvia americana chia dicta*. Olim hoc nomine ad me miſit Cl. PONTEDERA.

Veronica ſpicata *
officinalis *
alpina *
ſerpillifolia *
beccabunga *
anagallis *
chamaedrys *
agreſtis *
arvenſis *
hederaefolia *
Juſticia adathoda
Syringa vulgaris *
perſica

C. Fructu pulposo.

Nictanthes ſambac
Jaſminum officinale
azoricum
fruticans *
odoratiſſimum
Olea 6
Phillyrea latifolia *
Liguſtrum vulgare *

III. TRISTEMONES.

A. Flore caliculato.

Trichoſanthes anguina
Cucurbita lagenaria
pepo
verrucoſa
melopepo
citrullus
Cucumis colocynthis
melo
dudaim
ſativus
Momordica balſamina
charantia
luffa
cylindrica
elaterium *
Bryonia alba *
africana
Sicyos angulata.

B. Calice destitutae.

Crocus ſativus *
Ixia chinenſis
Gladiolus communis *
Iris ſuſiana
germanica *
variegata
graminea
pſeudacorus *
hermodactylus.
Valeriana dioica *
phu
officinalis *
calcitrapae *
tripteris *
cornucopiae
locuſta *

IV.

6 *Olea ſilveſtris folio duro ſubtus incano* Bauh. *pin.* 472.

IV. TETRASTEMONES.

A. GYMNODISPERMAE.

1. *Flore plano.*

Galium verum *
boreale *
aparine *
parisiense *
. . . . [7]
. . . . [8]
Rubia tinctorum. *

2. *Fl. infundibuliformi.*

Crucianella angustifolia *
Sherardia arvensis *
Asperula odorata *
arvensis *
taurina *
cynanchica *

B. GYMNOTETRASPERMAE.

1. *Galea plana*

a. *Vix fissa*

Melittis melissophillum *
Mentha crispa
pulegium *
cervina
arvensis *
rotundifolia *
aquatica *
Origanum majorana
aegyptiacum
dictamnus
vulgare *
Thymus vulgaris *
Acinos *
serpillum *
. . . . [9]

b. *Profunde secta*

Lavandula spica *
multifida
Glechoma hederacea *
Sideritis perfoliata
romana
hirsuta *
Marrubium vulgare *
pseudodictamuus
peregrinum

2. *Galea concava*

Lamium purpureum *
amplexicaule *
album *
. . . . [10]

7 *Gallium album vulgare* TOURN. *inst.* 115. *

8 *Gallium montanum latifolium ramosum* TOURN. *inst.* 115. *

9 *Thymus foliis ellipticis & caule hirsutis* HALL. *gott.* 341.

10 *Lamium montanum hirsutum, folio oblongo, flore purpureo D. Pontederae* TILLI. *pis.* Tota planta hirsuta, & odore forti lamii. Caules habet spithamaeos, aut etiam duplo altiores. Folia ex cordato-triangula, statim a petiolo dentata dentibus geminatis, non nitentia, obtuso non acuto dente terminata; & minora, quam in *Lamio albo*. Corollae tubus tertia circiter parte extra calycem protenditur Galea surrecta, pilosa, erosa; barba vero recta descendit. Antherae luteae, vix pilosae. Verticilli minime nudi, sed involucro donati, h. e. stipulis linearibus quinque aut septem verticillum cingentibus.

Galeopſis ladanum *
tetrahit *
galeobdolon *
Stachys ſilvatica *
alpina *
germanica *
paluſtris *
cretica
Dracocephalon canarienſe
peltatum
moldavica
caneſcens
. . . . [11]
Leonurus ſibiricus
cardiaca *
marrubiaſtrum *
Phlomis tuberoſa
leonurus
fruticoſa
Moluccella laevis
ſpinoſa
fruteſcens *
Prunella vulgaris *
grandiflora
laciniata *
Ballota nigra *
Betonica hirſuta *
glabra *
officinalis *
. . . . [12]
Nepeta cataria *
nuda
. . . . [13]
Meliſſa officinalis *
calamintha *
nepeta *
Cilnopodium vulgare *
Scutellaria ſupina *
galericulata *
. . . . [14]

3. *Galea nulla, ſeu limbo ſemiquinquefido.*

Verbena bonarienſis
urticifolia

com-

11 *Dracocephalon foliis ix lanceolato-linearibus, rarius dentatis, ſpinuloſis, floribus gemellis* MARTINI. HALL. *gott.* 335.

12 *Betonica foliis hirſutis, floribus purpureis ampliſſimis* MONT. in ZANON. *p.* 46. *l.* 30. *

13 *Cataria tenuifolia* CLUS. *hiſt. XXXIII.* *

14 *Caſſida caule quadrangulo rubente, teucrii ſerrato folio, fl. caeruleo, labro albo.* TILLI. *piſ.* Duro & repetito ramoſo caule ſe ſe ad tricubitalem & ultra altitudinem erigit. Poſtremi rami longiſſime ſimplices & continuo florigeri, floribus binatis. Folia petiolata, glabra, venoſa, cordato-ovata, acuta dentibus utrinque tribus aut quatuor ſerrata. Floralia elliptica, acuminata, integerrima, ſubſeſtilia. Calix de more gentis cum criſta & ora longius piloſa. Flos gracilis ex violaceo purpureus alarum extrema parte albeſcente. Semina quaterna, inaequalia, ex cinereo obſcura, ſubtriangula, minutiſſime alveolata. Univerſa planta amariſſima eſt, & non ſine principio aromatico. Denſi & ſubtiles pili obſident ramos florigeros, & ex iis ſtillat globulus tenuiſſimae, & amarae reſinae.

communis *
4. *Galea nulla, ſeu flore unilabiato.*
Teucrium ſcorodonia *
ſcordium *
flavum *
chamaedrys *
. . . . [15]
botrys *
. . . . [16]
chamaepithys *
polium *
montanum *
marum
Ajuga pyramidalis *
reptans *

C. MONANGIAE.

Orobanche major *
ramoſa *

D. DIANGIAE.

1. *Corolla non labiata.*
Sanguiſorba officinalis *
Plantago major *
virginica
lanceolata *
lagopus *
coronopus *
pſiyllium *
cynops
Celſia orientalis.
2. *Corolla labiata.*
a. *Calyce quadrifido.*
Rhinanthus glaber *
Melampyrum criſtatum *
Euphraſia officinalis *
b. *Calyce quinquefido.*
Antirrhinum cymbalaria *
ſpurium *
triphillum
purpureum
monſpeſſulanum *
multicaule
linaria *
majus. *
Scrophularia nodoſa *
aquatica *
canina *
Digitalis ferruginea
lutea *
. . . . [17]

Che-

15 *Teucrium foliis cordatis crenatis petiolatis, ſpicis oblongis denſiſſimis ex Hircania* MARTINI HALL. *comm. Gotting.* 1752.

16 *Teucrium ſupinum, perenne, paluſtre, apulum, glabrum, foliis laciniatis, fl. albo D. Michelii.* TILLI. *piſ. cum icone.* Procumbit ramis, & foliis oppoſitis glabrum. Folia ſulcata, & trifida ſegmentis lateralibus tridentatis, & medio iterum trifido. Verticilli biflori. Calycis dentes ſpinuloſi. Alae ovatae duorum parium: barba cordato ovata. Floris color albus, ſed ſtriae, & maculae purpureae pingunt alas primas & barbae originem. Semina quaterna aſpera.

17 *Digitalis alpina magno flore* BAUH. *pin.* 244.

Chelone hirſuta [18]
Bignonia catalpa
radicans.
Lantana annua
camara
Ruellia ſtrepens.
Seſamum orientale.
c. *Calyce polyphillo.*
Acanthus mollis
aculeatus.

E. FRUCTU PULPOSO.

Callicarpa americana
Ilex aquifolium *

V. PENTASTEMONES.

A. MONOSTYLAE.

1. *Gymnomonoſpermae.*

Plumbago europaea *
Baſella rubra
Mirabilis Jalappa
. . . . [19]
2. *Gymnotetraſpermae.*
a. *Squamulis in fauce.*
Symphitum officinale *
tuberoſum *
Anchuſa officinalis *
Cynogloſſum officinale *
linifolium
Lycopſis veſicaria *
variegata
Aſperugo procumbens.
b. *Fauce nuda.*
Cerinthe maculata *
Echium vulgare *
italicum *
Lithoſpermum officinale *
arvenſe *
purpuro-caeruleum *
Heliotropium indicum
europaeum *
Myoſotis ſcorpioides *
lappula *
3. *Monangiae.*
a. *Valvis duabus.*
Anagallis . . . [20]
. . . . [21]
Menyanthes trifoliata *
b. *Valvis quinque.*
Samolus valerandi *
Cyclamen europaeum *
c. *Valvis decem.*
Primula elatior *
acaulis *
vitaliana *
auricula *
Lyſimachia vulgaris *
num-

18 Quintum ſterile villoſiſſimum ſtamen anthera deſtitutum reliquis fertilibus longius ego quoque adnotavi.
19 *Mirabilis foliis viſcidis villoſis, tubo floris cylindrico villoſo foliis longiore* ZINN. *comm. Gott. T. V.*
20 *Anagallis phaenicco flore* BAUH. *pin.* 252. *
21 *Anagallis caeruleo flore* BAUH. *pin.* 252. *

nummularia *
4. *Diangiae*.
Nerium oleander
Vinca major *
minor *
Datura ſtramonium *
. . . . [22]
Hyoſcyamus niger *
albus
puſillus
Nicotiana tabacum
minor
paniculata
Verbaſcum thapſus *
lychnitis *
nigrum *
ſinuatum
blattaria *
phaeniceum *
Gratiola officinalis *
5. *Tri-aut Pentangiae*.
Convolvulus arvenſis *
ſepium *
panduratus
tricolor
. . . . .
hederaceus
ſiculus
. . . . [23]
Ipomoea quamoclit
coccinea
triba
Phiteuma ſpicata *
Campanula rapunculus *
erinus *
perſicifolia *
trachelium *
glomerata *
. . . . [24]
ſpeculum *
6. *Fructu pulpoſo*.
Mandragora officinarum
Atropa belladonna
phiſalodes.
Solanum pſeudocapſicum
dulcamara *
tuberoſum
lycoperſicon
officinarum
. . . . [25]
melongena
indicum

22 *Stramonium aegyptiacum flore pleno intus albo, foris violaceo* TOURN. *inſt.* 118.

23 *Convolvulus ſerpens maritimus ſpicaefolius* TRIUMF. *obſ. p.* 91. Plures teretes, yimineae radices plurimos producunt caules ad ſummum palmares procumbentes. Folia ex longo & folioſo petiolo longe elliptica, acuto fine, non plana, ſulco medio eadem dirimente, breviſſimo & ſericeo villo nitentia ita tamen, ut adhuc viridia appareant. Summus cauliculus ſaepe unicum florem ſuſtinet, raro duos brevi pedunculo nixos, qui ſtipulis duabus linearibus cinguntur. Calycis foliola ſericea; & eorum duo exteriora majora. Fructus calycinis foliis ex parte agglutinatur; iiſdem brevior & ſericeo villo tectus. Minime igitur confundi poteſt cum *convolvulo cneorum*?

24 *Campanulâ hortenſi folio & flore oblongo* BAUH. *pin.* 94.

25 *Solanum guineenſe fructu magno inſtar ceraſi* DILL. *elth.* 366.

indicum
sodomeum
incanum
tomentosum.
Physalis somnifera
alkekengi *
angulata
. . . . [26]
Capsicum annuum
. . . . [27]
. . . . [28]
. . . . [29]
. . . . [30]
Lonicera caprifolium *
periclymenum *
nigra *
Xylosteum *
Lycium afrum
Rhamnus paliurus *
ziziphus
catharticus *
Coffea arabica.

B. DISTYLAE.

Gomphrena globosa
Gentiana centaurium *
spicata *
asclepiadea *
Cynanchum acutum
erectum
Asclepias incarnata
curassavica
syriaca
vincetoxicum *
fruticosa
tuberosa

C. TRISTYLAE.

Viburnum tinus *
lantana *
opulus *
Sambucus ebulus *
nigra *
laciniata
racemosa *

VI. HEXASTEMONES.

A. MONOSTYLAE.

Aloe disticha
spiralis
retusa
variegata
. . . . [31]
. . . . [32]
. . . . [33]
. . . [34]

26 *Alkekengi barbadense nanum alliariae foliis* DILL. *elth. p.* 10.
27 *Capsicum fructu flavo pyramidali oblongo* TOURN. *inst.* 153.
28 *Capsicum siliqua latiore & rotundiore* TOURN. *inst.* 153.
29 *Capsicum siliquis surrectis oblongis* TOURN. *inst.* 153.
30 *Capsicum fructu cordiformi erecta* HALL. *Gott.* 216.
31 *Aloe africana sessilis foliis carinatis verrucosis* DILL. *elth. p.* 22.
32 *Aloe africana humilis spinis inermibus & verrucosis obsita* COMM. *prael. p.* 77.
33 *Aloe africana flore rubro folio maculis ab utraque parte albicantibus notato* COMM. *hort. II. p.* 15.

. . . . 34
. . . . 35
. . . . 36
. . . . 37
. . . . 38
. . . . 39
Agave americana
Hyacinthus non ſcriptus
orientalis
cernuus
Polianthes tuberoſa
Convallaria majalis *
verticillata *
ſtellata
polygonatum *
Ariſtolochia clematitis *
rotunda *

B. TRISTYLAE.

Colchicum autumnale *

VII. OCTOSTEMONES.

Daphne mezereum *
laureola *
cneorum *
Dioſpyros lotus.

VIII. ENNEASTEMONES.

Rheum rhaponticum

IX. DECASTEMONES.

Cotyledon umbilicus *
Oxalis acetoſella *
corniculata *
ſtricta

X. POLYSTEMONES.

Mimoſa ſenſitiva
pudica
pernambuccana
glauca
. . . . 40
ſcorpioides. *

CLASSIS II.

Plantae flore monopetalo floſculoſo.

I. ANTERIS DISJUNCTIS.

Dipſacus fullonum *

34 *Aloe africana folio in ſummitate triangulari margaritifera flore ſubviridi* COMM. *hort. II. p.* 10.

35 *Aloe africana foliis glaucis margine, & dorſi parte ſuperiore ſpinoſis, flor. rubro.* COMM. *prael. p.* 75.

36 *Aloe africana cauleſcens foliis ſpinoſis maculis ab utraque parte albicantibus notatis* COMM. *hort. II. p.* 9.

37 *Aloe africana cauleſcens foliis glaucis breviſſimis, foliorum ſummitate interna & externa nonnihil ſpinoſa.* COMM *prael. p.* 73.

38 *Aloe ſuccotrina anguſtifolia ſpinoſa flore purpureo.* COMM. *hort. I. p.* 91.

39 *Aloe foliorum margine luteo.*

40 *Acacia americana non ſpinoſa, foliis viciae multiflorae, floribus in ſpicam triuncialem diſpoſitis, ſiliqua palmari compreſſa & intorta.* MANETTI. *vir. flor. n.* 12.

. . . . [41]
piloſus *
laciniatus *
Scabioſa alpina *
ſucciſa *
ſyriaca
arvenſis *
leucantha *
tartarica *
columbaria *
ſtellata
atropurpurea
. . . . [42]
Knautia orientalis
Globularia vulgaris *

II. ANTHERIS COALITIS.

A. Capitatae.

Echinops ſphaerocephalus
ritro *
Onopordon acanthium *
illyricum
Cynara ſcolymus
Arctium perſonata *
lappa *
. . . . [43]
Carduus lanceolatus *
criſpus *
ſtellatus
marianus *
helenioides *
eriophorus *
nutans *
acanthoides. *
Serratula tinctoria *.
arvenſis *
Carthamus tinctorius *
Cnicus benedictus
Carlina acaulis *
corymboſa *
Centaurea crupina *
moſchata
cyanus *
montana *
paniculata *
raguſina
ſcabioſa *
jacea *
aſpera *
eriophora
calcitrapa *
ſolſtitialis *
galactites *
ſalamantica *
ſonchifolia *
napifolia *
centaurium.

B. Discoideae.

1. *Semine nudo.*

Tana-

41 *Dipſacus ſativus* Bauh. *pin.* 385.
42 *Scabioſa foliis planis carnoſis, inferioribus pinnatis, ramorum integerrimis linearibus* Gmelin. *ſibir. II. p.* 213.
43 *Lappa major montana capitulis tomentoſis* Bauh. *pin.* 298.

Tanacetum vulgare *
crispum
balsamita
Santolina chamaecyparissus *
rosmarinifolia
Cotula coronopifolia
Artemisia abrotanum *
campestris *
pontica
absinthium *
vulgaris *
caerulescens
dracunculus
. . . . [44]
. . . . [45]
Micropus supinus *

2. *Semine pappis coronato.*

Gnaphalium dioicum *
foetidum
margaritaceum *
germanicum *
arenarium
Sthaechas *
. . . . [46]
Chrysocoma graminifolia
Eupatorium cannabinum *
caelestinum
altissimum
Tussilago farfara *
petasites *

3. *Sem. aristis coronato.*

Xeranthemum annuum *
Bidens tripartita *
cernua *
pilosa
frondosa
bipinnata
. . . . [47]

C. Radiatae.

1. *Sem. nudo.*

a. *Placenta paleacea.*

Helianthus annuus
multiflorus
Rudbeckia hirta
laciniata
oppositifolia
Buphthalmum grandiflorum *
helianthoides
Siegesbekia orientalis
Achillea ageratum *
tomentosa *
ptarmica *
nana *
millefolium *
nobilis *
Anthemis nobilis
millefolia
tinctoria *
maritima *

44 *Absinthium alpinum candidum humile* Bauh. *pin.* 139. *
45 *Absinthium arborescens* Lob. *ic.* 753.
46 *Filago foliis tenuissimis, floribus umbellatis cylindricis* Hall. *Gott.* 377. *
47 *Bidens foliis ovatis & tripteris, caulibus hirtis brachiatis* Hall. *Gott.* 383.

arvenſis *
b. *Placenta nuda*.
Oſteoſpermum uvedalia
moniliferum
Calendula . . . [48]
. . . . [49]
Chryſanthemum leucanthemum *
ſegetum *
coronarium
corymboſum *
Matricaria parthenium *
chamomilla *
recutita *
Bellis perennis *
2. *Sem. pappis coronato*.
Aſter alpinus *
novae angliae
novi belgii
chinenſis
dumoſus
Inula helenium *
dyſenterica *
pulicaria *
hirta *
. . . . [50]
Erigeron canadenſe *
Senecio hieracifolius
vulgaris *
incanus *
jacobea *
ſarracenica *
paludoſus
Solidago ſarracenica *
mexicana
virga aurea *
canadenſis
ſempervirens
Doronicum pardalianches. *
3. *Sem. ariſtis coronato*.
Tagetes patula
erecta

D. PLANIPETALAE.

1. *Sem. nudo*.
a. *Placenta nuda*.
Lapſana communis *
ſtellata
rhagadiolus.
b. *Placenta paleacea*.
Catanance caerulea *
Cichorium intybus *
endivia
ſpinoſum
Scolymus maculatus. *
2. *Sem. pappis coronato*.
a. *Placenta nuda*.
Leontodon taraxacum *
hiſpidum *
Hieracium alpinum *
auricula *
piloſella *
murorum *
. . . [51]

48 *Caltha vulgaris* BAUH. *pin.* 275.
49 *Caltha arvenſis* BAUH. *pin.* 275. *
50 *Aſter montanus hirſutus* LOBEL. *ic.* 350.

. . . . . [51]
amplexicaule *
umbellatum *
. . . . . [52]
Crepis barbata
fœtida *
. . . . . [53]
Picris echioides *
hieracioides *
Sonchus aſper *
laevis *
Prenanthes muralis *
Chondrilla juncea *
Lactuca ſativa
perennis. *
viroſa *
Scorzonera laciniata *
hiſpanica
tingitana
Tragopogon pratenſe *
b. *Placenta ſquamis diſtincta.*
Hypochoeris maculata *

CLASSIS III.

Plantae flore dipetalo.

Coriſpermum hiſſopifolium
Circaea lutetiana *

CLASSIS IV.

Plantae flore tripetalo.

Cneorum tricoccon *
Commelina tuberoſa
Tradeſcantia virginiana
Bromelia ananas
Chamaerops humilis *
Aliſma plantago *

CLASSIS V.

Plantae flore tetrapetalo cruciformi.

I. TETRASTEMONES.

Epimedium alpinum *
Cornus mas
Sanguinea *
Potamogeton lucens *
Criſpum *

II. HEXASTEMONES.

A. SILICULOSAE.

Myagrum perfoliatum
Sativum *
Draba verna *
alpina *

Lepi-

51 *Hieracium murorum laciniatum minus piloſum folio anguſtiore* BAUH. *pin.* 129. *
52 *Hieracium caule folioſo, ramoſo, foliis & calyce longo villo barbatis* HALL. *helv.* 744. *
53 *Crepis foliis glabris, floribus minimis, caule ramoſiſſimo* HALL. *Gott.* 412.

Lepidium latifolium *
iberis *
ſativum
Thlaſpi ſaxatile *
arvenſe *
alliaceum
campeſtre *
burſa paſtoris *
Cochlearia coronopus *
armoracia *
glaſtifolia
officinalis *
Iberis ſemperflorens
umbellata
amara *
Alyſſum incanum *
montanum *
Halimifolium *
ſinuatum
clypeatum
Clypeola . . . [54]
. . . . [55]
Biſcutella didyma *
auriculata
. . . . [56]
Lunaria rediviva *
. . . . [57]

Cardamine pratenſis *
Siſymbrium ſophia *
tanacetifolium *
irio *
Strictiſſimum *
Eryſimum alliaria *
Cheiranthus cheiri
incanus
tricuſpidatus
Heſperis matronalis *
dentata
. . . . [58]
. . . . [59]
Arabis thaliana *
Turritis glabra *
hirſuta *
Braſſica orientalis
campeſtris *
napus
rapa
Sinapis arvenſis *
alba *
nigra *
Raphanus ſativus
raphaniſtrum *
Bunias erucago *

orien-

54 *Thlaſpi alyſſon dictum campeſtre minus* BAUH. *pin.* 107.
55 *Clypeola perennis incana, foliis ſubrotundis, calyce deciduo, ſiliculis ovato acutis.* Habitat in ſummis alpibus cottiis nova planta, cujus deſcriptionem, & iconem dabo in Enumeratione ſtirpium Pedemontii propediem edenda.
56 *Jondraba alyſſoides apula ſpicata* COL. *ecphr. p.* 285.
57 *Lunaria foliis pinnatis, foliolis laciniatis* ROY. *Leyd.* 533.
58 *Heſperis maritima ſupina exigua* TOURN. *inſt.* 222.
59 *Heſperis exigua lutea folio dentato auguſto* BOERH. *ind. alt. II.* 20.

orientalis
Isatis tinctoria *
Crambe maritima
hispanica
Cleome gynandra
ornithopodioides
viscosum

III. OCTOSTEMONES.

Oenothera bonariensis
biennis *
. . . . [60]
Epilobium hirsutum *
angustifolium *
montanum *
palustre *
Ruta graveolens *
Cardiospermum halicacabum

IV. POLYSTEMONES.

A. Monostylae.

Euphorbia maculata
pilosa *
chamaesyce *
peplus *
lathyris *
spinosa *
dulcis *
helioscopia *
verrucosa *
orientalis
platyphillos *
cyparissias *
palustris *
neriifolia
caput medusae
. . . . [61]
officinarum
Chelidonium majus *
glaucium *
cornicularum
hybridum
Papaver rhaeas *
orientale
somniferum
Argemone mexicana
Actaea spicata nigra *
Capparis spinosa

B. Tetrastylae.

Philadelphus coronarius *

C. Polystylae.

Tormentilla erecta *
Talictrum foetidum *
flavum *
minus *
aquilegifolium *
Clematis recta *
vitalba *
flammula *
integrifolia

CLAS-

60 *Onagra foliis glabris, flore suave purpureo* Hall. *comm. Gott.* 1751. *p.* 224.
61 *Euphorbium humile procumbens, ramis simplicibus, copiosis, caule crassissimo tuberoso* Burm. *afr. p.* 20. *t.* 10.

CLASSIS VI.

Plantae flore tetra-aut pentapetalo papilionaceo.

I. TETRAPETALAE.

A. HEXANTHERAE.

Fumaria bulbosa *
lutea
officinalis *
spicata *

B. OCTANTHERAE.

Polygala vulgaris *

C. DECANTHERAE.

1. *Uniloculares.*

Trifolium repens *
rubens *
agrarium *
montanum *
squarrosum
angustifolium *
arvense *
clypeatum
glomeratum *
melilotus corniculata
melilotus officinalis *
melil. caerulea *
melil. italica
Lotus tetragonolobus
conjugata *
hirsutus *
corniculata *
dorychnium *
orinthopodioides *
recta *
Anthyllis tetraphilla *
vulneraria *
barba jovis *
Medicago radiata
sativa *
falcata *
lupulina *
orbicularis *
scutellata *
tornata *
intertexta *
Ononis spinosa *
alopecuroides
natrix *
mitissima
viscosa
rotundifolia *
Cytisus laburnum *
. . . . [62]
Genista tinctoria *
Phaseolus coccineus
caracalla
vulgaris
lunatus
Dolichos lablab
soja

62 *Cytisus minoribus foliis ramulis tenellis villosis* BAUH. *pin.* 390.

ſoia
Hedyſarum canadenſe
onobrychis *
gallo-provinciale *
violaceum
paniculatum
Vicia faba
narbonenſis
ſativa
dumetorum *
benghalenſis
Ervum lens
tetraſpermum *
hirſutum *
ervilia
Orobus tuberoſus *
vernus *
niger *
Lathyrus aphaca *
cicera
ſativus *
tingitanus *
pratenſis *
latifolius *
Zeylanicus
Piſum ſativum
maritimum
Cicer arietinum
Colutea arboreſcens *
aethiopica
herbacea
Galega officinalis *
Indigofera tinctoria
Aeſchynomene americana
aſpera
Amorpha fruticoſa [63]
Crotalaria laburnifolia
Robinia pſeudoacacia *
Coronilla emerus *
ſecuridaca *
varia *
Hippocrepis uniſiliquoſa *
Lupinus albus
hirſutus
Scorpiurus ſubvilloſa *

2. *Biloculares.*

Aſtragalus glyciphillos *
uliginoſus
montanus *
epiglottis
Biſerrula pelecinus *
Glycine apios.

II. PENTAPETALAE.

Glychirriza echinata
ſiliquoſa
Ulex europaeus
Spartium junceum *
ſcoparium *
monoſpermum
Pſoralea corylifolia
bituminoſa *
Cercis ſiliquaſtrum *
Sophora alopecuroides

63 Unico exemplo habet AMORPHA florem monopetalum *h. e.* tantummodo vexillum, alis & carina deficientibus.

Caſſia ſenna
fiſtula
occidentalis
chamaecriſta
Parkinſonia aculeata

CLASSIS VII.

Plantae flore pentapetalo, & Gymnodiſpermae.

II. SEM. AD PLACENTAM COMMUNEM CONJUNCTIS.

Eryngium planum
maritimum *
campeſtre *

II. SEM. COMMUNI PLACENTA CARENTIBUS.

A. Obscura umbella.

Phillis nobla
Hydrocotyle vulgaris

B. Manifesta umbella.

1. *Sem. Gibbis ſtriatis.*
a. *Petalis aequalibus.*
Apium petroſelinum
graveolens
Anethum hortenſe
foeniculum *
Liguſticum vulgare *
Sium ſiſarum
falcaria *
Siſon amomum
canadenſe
Bupleurum falcatum *
Crithmum maritimum *
Althamanta cretenſis *
oreoſelinum *
b. *Petalis inaequalibus.*
Smyrnium oluſatrum *
Aegopodium podagraria *
Carum carvi *
Seſeli annuum *
Pimpinella ſaxifraga *
Oenanthe biennis *
Aethuſa cynapium *
Conium maculatum *
2. *Sem. gibb. & alatis*
a. *Alis duabus.*
Peucedanum officinale *
Angelica archangelica *
ſylveſtris *
lucida
Imperatoria oſtruthium *
b. *Alis quatuor, & ultra.*
Laſerpitium latifolium *
ſiler *
Aſtrantia major *
3. *Sem. planis alatis.*
Paſtinaca ſativa
. . . . [64]

Tordy-

64 *Paſtinaca folio quaſi libanotidis latifoliae* Boerh. *ind.* 1. 67.

Tordylium ſyriacum
maximum *
Heracleum ſphondylium *
Ferula glauca
ferulago
Thapſia . . . [65]
4. *Sem. aſperis.*
Caucalis grandiflora
platycarpos *
Sanicula europaea *
5. *Sem. villoſis, nec roſtratis.*
Daucus . . . [66] .
. . . . [67] .
b. *Sem. roſtratis.*
Scandix odorata *
pecten *
chaerefolium
nodoſa
Chaerefolium ſylveſtre *
hirſutum *

CLASSIS VIII.

Plantae flore pentapetalo, nec Gymnodiſpermae.

I. FILAMENTIS IN UNUM TUBUM CONJUNCTIS.

Geranium capitatum
zonale
inquinans
odoratiſſimum
alchimilloides
pratenſe *
robertianum *
molle *
. . . . [68]
bohemicum
ſylvaticum *
nodoſum *
ſanguineum *
malacoides *
cicutarium *
gruinum *
myrrhifolium
triſte
Sida ſpinoſa
abutilon
Napaea dioica
Alcea roſea
Malva caroliniana
rotundifolia *
ſylveſtris *
mauritiana
verticillata
alcea *
Lavatera arborea *
luſitanica
trimeſtris

65 *Thapſia ſive turbith garganicum ſemine latiſſimo* BAUH. *hiſt. III.* 2. 50.
66 *Daucus vulgaris* CLUS. *hiſt. CXCVIII.* *
67 *Daucus ſativus* TOURN. *inſt.* 307.
68 *Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculis brevioribus, caule erecto* HALL. *helv. p.* 366. *

thuringiaca *
Goſſypium herbaceum
Hibiſcus ſyriacus
paluſtris
mutabilis
aeſculentus
abelmoſch
Althaea officinalis *
cannabina *

II. FILAMENTIS BASI COALITIS.

Citrus medica
aurantium
Hypericum androſaemum *
perforata *
Croton tinctorium *

III. FILAMENTIS OMNIBUS LIBERIS.

A. Pentastemones.

1. *Monoſtylae.*

Lagoecia cuminoides
Celoſia criſtata
argentea
Vitis vinifera *
arborea
Ribes alpinum *
nigrum *
groſſularia *
rubrum
Hedera helix *
quinquefolia
Ceanothus americanus
africanus
Evonymus europaeus *
Viola hirta *
odorata *
canina *
montana *
calcarata *
biflora *
. . . . [69]
. . . . [70]

2. *Triſtylae.*

Tamarix germanica *
Staphilaea pinnata *
Rhus coriaria
cotinus *
copallinum
radicans
Paſſiflora foetida
caerulea
incarnata

3. *Tetraſtylae.*

Parnaſſia paluſtris *

4. *Pentaſtylae.*

Statice armeria
. . . . [71]
Linum uſitatiſſimum
. . . . [72]

narbo-

69 *Viola bicolor arvenſis* Bauh. *pin.* 200. *
70 *Viola tricolor hortenſis* Bauh. *pin.* 200.
71 *Limonium maritimum majus* Bauh. *pin.* 192. *
72 *Linum arvenſe* Bauh. *pin.* 214. *

narbonenſe *
hirſutum
Craſſula coccinea
perfoliata
pellucida
. . . . 73

B. Heptastemones.

Aeſculus hippocaſtanum.

C. Octostemones.

Tropaeolum minus
majus.

D. Decastemones.

1. *Monoſtylae.*

Tribulus terreſtris *
Zygophyllum fabago
Caeſalpina ſappan
Melia azedarach *
Guillandina moringa
Dictamnus albus *

2. *Diſtylae.*

Dianthus chinenſis
armeria *
barbatus
plumarius *
caryophillus *
prolifer *
Saponaria officinalis *
vaccaria *
ocymoides *
orientalis
Gypſophila repens *
muralis *
Saxifraga cotyledon *
rotundifolia *
tectorum *
granulata *

3. *Triſtylae.*

Alſine media *
Arenaria ſerpilifolia *
campeſtris *
Silene nutans *
rubella
quinquevulnera *
luſitanica
behen
conoidea
nutans
Cucubalus baccifer *
behen *
viſcoſus
reflexus
. . . . 74

Gari-

73 *Craſſula portulacae facie arboreſcens* Dill. *elth. p.* 120.

74 *Silene viſcoſa alpina foliis omnibus planis, ac prorſus glabris, petalis anguſtis, intus candidis extus ex viridi luteolis, profunde biſidis, diviſionibus divaricatis linearibus, nectariis extantibus, ac ſtylis tribus longiſſimis purpuraſcentibus ſub ſole ſpiraliter convolutis.* Manetti, *Spicil. n.* 1005. Caules tricubitales, rotundi, ſubhirſuti, viſcoſi, ramoſi, ad ramos nodoſi. Calix gracilis ore acute quinquefido, albeſcens, & decem ſtriis nigris elevatis percurſus. Petala cordata ſemifida, coronae denticuli acuti incumbentes. Antherae didymae virides, & iis areſcentibus ſtyli longe producuntur. Semina nigra reniformia aſpera, & undique minimis foveolis excavata.

Garidella nigellaſtrum
4. *Pentaſtylae*.
Sedum telephium *
rupeſtre *
cepaea
album *
. . . . [75]
Agroſtemma githago
. . . . [76]
Ceraſtium repens
aquaticum *
viſcoſum *
ſtrictum *
Spergula arvenſis *
5. *Decaſtylae*.
Phitolacca americana *
mexicana

POLYSTEMONES.

Monoſtylae.
Tilia europaea
Portulaca oleracea
piloſa
. . . . [77]
Ciſtus albida *
ſalvifolia *
fumania *. . .
helianthemum *
Peganum harmala
Corchorus olitorius
Prunus mahaleb *
armeniaca
ceraſus . . . .
domeſtica
ſylveſtris *
Amygdalus ſylveſtris
perſica
communis
Myrtus . . . [78]
. . . . . [79]
Punica granatus
2. *Diſtylae*.
Agrimonia . . . [80]
. . . . [81]
Crataegus torminalis *
oxyacantha *
3. *Triſtylae*.
Sorbus acucuparia *
domeſtica
Reſeda luteola *
alba
lutea *
. . . . [82]
Aconitum lycoctonum *
antho-

75 *Sedum foliis teretibus ternatis, caulibus ſimplicibus trifidis* HALL. *emendat. n.* 107. *&c.* V. Excerptum Bernae anni 1760. T. I. p. 161.
76 *Lychnis coronaria Dioſcoridis ſativa* BAUH. *pin.*, *& Lychnis umbelliſera montana helvetica* ZAN. *
77 *Portulaca foliis ovatis petiolatis Roy. prodr. p.* 473.
78 *Myrtus minor vulgaris* BAUH. *pin.* 469.*
79 *Myrtus boetica domeſtica latifolia* LOB. *ic. p.* 127.
80 *Agrimonia, ſeu eupatorium veterum* BAUH. *pin.* 321.*
81 *Agrimonia odorata* CAM.
82 *Reſeda foliis integris, floribus odoratis* HALL. *Gott.* 95.

anthora *
Delphinium ajacis
staphisagria
elatum *
. . . . 83

4. *Pentastylae.*

Aquilegia sylvestris
Nigella damascena
sativa
orientalis
Mespilus germanica
Pyrus malus
cydonia *
communis

5. *Polystylae.*

Spiraea aruncus *
filipendula *
ulmaria
Caltha populago *
Helleborus niger *
viridis *
Isopyrum fumarioides
Potentilla anserina *
multifida
argentea *
reptans. *
recta *
Geum urbanum *
rivale *
Comarum palustre
. 84
. 85
Rubus idaeus *
Rosa eglanteria
canina *
centifolia
alba
. . . . 86

CLASSIS IX.

Plantae flore hexapetalo.

I. DIANTHERAE.

Orchis bifolia *
maculata *
ustula-

83 *Delphinum nectariis diphillis, floribus solitariis, foliis multipartitis, foliolis lineari acuminatis. Enum. nic. p.* 200. * Folia crassula, sulcata, viridia, (licet interdum subincana) profunde trifida, segmentis acute trilobis. Rami terminales longissime florigeri. Flos singulus prodit ex ala folioli lineari-lanceolati in spinulam inermem attenuati, nixus pedunculo bilineari, qui prope florem firmatur duabus stipulis lanceolato-acutis receptaculum longitudine superantibus. Flos caeruleus calcare sursum spectante. Calcar levissime incanum duplo longius flore. Nectarium ex duabus portionibus; quaelibet autem superius alam erigit linearem bifidam segmentis rotundis, inferius alam subrotundam non incisam. Inter prima duo lateralia petala, & stamina nascuntur duae laminae ex longis unguibus ovatae, incisae, imberbes, pallidiores petalis, sed ea omnino referentes. Hae laminae alas inferiores calcaris amplectuntur, & cum iis interiorem florem custodiunt. Antherae luteae, filamentis pallidioribus. Siliquae tres laeves, torosulae.

84 *Fragaria vulgaris* BAUH. *pin.* 326. *

85 *Fragaria chiloensis foliis maxime carnosis hirsutis* DILL. *elth. p.* 145.

86 *Rosa lutea simplex* BAUH. *pin.* 636. *

ustulata *
Ophris ovata *
Serapias . . . [87]

II. TRIANTHERAE.

Ruscus aculeatus *
hypoglossum *
racemosus.

III. HEXASTEMONES.

Monostylae.

1. *Flore fructui impositio.*

Narcissus poeticus
pseudonarcissus *
jonquilla
tazetta
Amaryllis formosissima
Pancratium illiricum

2. *Flore fructum cingente.*

Allium sativum
porrum
spaerocephalum *
scorodoprasum
vineale *
ursinum *
cepa
Lilium candidum
bulbiferum *
martagon *
Fritillaria imperialis
persica
Erythronium dens canis *
Tulipa gesneriana
Ornithogalum pyrenaicum *
pyramidale
umbellatum *
Anthericum ramosum *
liliago *
fruteſcens
alooides
Yucca glorioſa
aloifolia
Berberis vulgaris *
Asparagus officinalis *
acutifolius *

IV. ENNEASTEMONES.

Laurus nobilis
indica
benzoin.

CLASSIS X.

Plantae flore polypetalo.

Nymphaea alba *
lutea *
Cactus mammillaris
triangularis
tetragonus
hexagonus
grandiflorus
peruvianus
lanuginosus

flagel-

87 *Epipactis foliis ensiformibus, floribus pendulis, labello obtuso per oras plicato* Hall. *aff. helv. T. IV. p.* 111. *

flagelliformis
opuntia *
tuna
cochenillifer
Adonis annua *
Anemone hepatica *
palmata
pratenſis *
coronaria
virginiana
nemoroſa *
Trollius europaeus *

CLASSIS XI.

Plantae flore apetalo exceptis graminibus.

I. FILAMENTIS COALITIS.

Ricinus communis
Ephedra diſtachya *
Thuya occidentalis
Cupreſſus ſempervirens
diſticha
Pinus larix *
abies *
Juniperus communis *

II. FILAMENTIS DISTINCTIS.

A. JULIFERAE.

Salix fragilis *
babylonica
Carpinus betulus *
Corylus avellana *
Fagus ſylvatica *
Platanus orientalis
Piſtacia trifolia

B. NON JULIFERAE.

1. *Monantherae.*

Salicornia annua *
Blitum capitatum

2. *Triantherae.*

Ficus communis
Polycnemum arvenſe *

3. *Tetrantherae.*

Urtica urens *
dioica *
cannabina
Parietaria officinalis *
Aphanes arvenſis *
Elaeagnus anguſtifolia *

4. *Tetrantherae.*

Salſola kali *
ſoda *
Atriplex hortenſis
laciniata *
halymus *
portulacoides *
haſtata *
Chenopodium bonus henricus *
vulvaria *
ſcoparia
botrys *

ambrosioides
rubrum *
hybridum *
glaucum
maritimum
altissimum
salsum
Amaranthus tricolor
melancolicus
blitum *
spinosus
Beta vulgaris
Cannabis sativa
Humulus lupulus *
Spinacia oleracea
Ceratonia siliqua *
Ulmus campestris *
Celtis australis

5. *Hexantherae.*

Smilax aspera *
Tamus communis *
Rumex patientia
alpinus *
crispus *
acutus *
obtusifolius *
pulcher *
bucephalophorus *
lunaria
vesicaria
scutatus *
acetosa *
acetosella *

6. *Octostemones.*

Polygonum bistorta *
hydropiper *
persicaria *
orientale
aviculare *
fagopyrum
convolvulus *
tartaricum.

7. *Polyantherae.*

Mercurialis annua *
perennis *
Alcalypha virginica
Arum dracunculus
colocasia
maculatum *
arisarum *
Asarum europaeum *

CLASSIS XII.

Plantae flore apetalo.

GRAMINA.

I. DISTEMONES.

Anthoxanthum odoratum *

II. TRISTEMONES.

A. MONOSTYLAE.

Cyperus longus *

aescu-

88 *Lapathum acetosum dioicum foliis planis cordiformibus* HALL. *Gott. p.* 16. & *emend. n.* 18. * *V.* Excerptum Bernae pro anno 1760. *p.* 10.

aeſculentus
Coix dactyloides
Carex filiformis
pſeudocyperus.

B. DYSTYLAE.

Saccharum officinarum
Phalaris annua
phleoides *
arundinacea *
Panicum americanum
italicum
crus galli *
Dactylon
miliaceum
Agroſtis paradoxa
Melica ciliata *
nutans *
Poa bulboſa *
Briza minor *
media *
maxima *
Cynoſurus aegyptius
Bromus ſcalinus *
arvenſis *
Stipa pennata *
Avena elatior *
ſativa
fatua *
pratenſis *
Lagurus ovatus *
Arundo donax
phragmites *
Lolium perenne *
Elymus virginicus
Secale cereale
villoſum
Hordeum vulgare
murinum *
Triticum aeſtivum
muticum
turgidum
. . . . [89]

III. HEXASTEMONES.

Juncus piloſus *
campeſtris *

CLASSIS XIII.

Plantae flore imperfecto, ſeu potius inconſpicuo.

FILICES.

Equiſetum arvenſe *
Oſmunda regalis *
ſtruthiopteris
ſpicant *.
Acroſtichum ſeptentrionale *
Aſplenium ſcolopendrinum *
ceterach *
. . . . [90]
trichomanes *

ruta

89 *Triticum ſpica multiplici* BAUH. *pin.* 21.
90 *Aſplenium ramoſum* TOURN. *inſt.* 544. *

ruta muraria *
Polypodium vulgare *
lonchitis *
criſtatum *
f. mas *
f. faemina *
rhaeticum *
Adianthum capillus veneris *

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

DE MOTIBUS ELECTRICIS.

EXPERIMENTUM.

NUM aër ſit neceſſarius ad motus electricos ciendos, & quantum ad eoſdem motus ejus actio conferat, quaeſtio jamdudum inter Phyſicos exorta eſt, in qua definienda FLORENTINI ACADEMICI, BOYLEUS, HAUKSBEJUS, NOLETIUS, & alii praeſtantiſſimi Phyſici ſe ſe exercuerunt, modo electrica corpora intra vacuum confricando, modo jam confricara vacuo includendo, modo demum intra globum vacuum fila diſponendo, quae ab excitata globi electricitate commoveri, ac dirigi poſſent.

At enim varius pro electricitatis majori, minorive vehementia, pro vacuo plus, minuſve accurato, pro corporum movendorum varia mole, pro tempeſtate inconſtanti, experimentorum eventus quaeſtioni adhuc locum reliquit, & in contrarias partes magnos VIROS diſtraxit, quorum alii aërem ad id, quo de agitur, neceſſarium eſſe affirmarunt, negarunt alii, alii etiam hos inter, oppoſitas ſententias conciliaturi, illam experimentorum varietatem a duplici electricitatis, qua reſinoſae, qua vitreae genere repetendam eſſe duxerunt, ita ut illa etiam in vacuo, haec nonniſi cum aëre vim ſuam exerceat.

Quaeſtionem demum Celeberrimus BECCARIA definivit, parato accuratiori vacuo, novaque excogitata methodo, qua, per verticem recipientis pneumatici traducta catena, electricitatem in vacuo commodius excitaret. In vacuo etiam barometrico motus electricos exploravit, dum ad ſuperiorem barometri partem, cui amianti fila incluſa erant, electricum corpus extrinſecus admovebat: his enim, aliiſve tentaminibus VIR *Clariſſimus* demonſtravit electricos motus in vacuo

accurato penitus extingui, in rariori autem aëre ita languere, ut eorundem alacritas pro ratione ſubducti aëris imminuatur (*a*).

Sic demonſtrata ad motus electricos aëris neceſſitate, illud quaeri inſuper poſſe videbatur, id vi ne ejus coercenti, an elaſticitati, an cui alii proprietati ſit adſcribendum, ad cujus quaeſtionis definitionem aptiorem viam iniri non poſſe cenſui, quam ſi in aliis mediis, praeterquam in aëre, & vacuo, quae a Phyſicis hactenus ſola tentata fuerant, motus electricos explorarem.

Itaque inter catenae extremum oleo immerſum, & ferreum filum cum ſolo communicans oleo itidem immerſum, globulum ferreum ex ſerico filo pendulum ita collocavi, ut globulus etiam intra oleum demergeretur: dein electricitatem excitavi, ejuſque vi globulum inter catenae extremum, & filum ferreum cum ſolo communicans in oſcillationes perinde adigi obſervavi, ac in aëre contigiſſet. At idem experimentum in aqua, aliiſque liquidis, quae paullo minori facilitate, quam ferrum ab electrico fluido permeantur, tentanti, non licuit mihi per mediocrem, & conſueram electricitatis vehementiam ullos motus excitare.

Ex his primo confirmari videtur in ſpatio aëre vacuo motus electricitate excitari nullos poſſe; quum enim ſpatium aëre vacuum electricum fluidum aeque tranſmittat, ac deferens aliud quodcunque medium, electricis motibus efficiendis ſimiliter ineptum eſſe debet.

Evincitur deinde aëris vim in motibus electricis praeſtandis ex ejus elaſticitate repetendam non eſſe, quum oleum elaſticitatis expers eoſdem non minus efficiat: iccirco vim aëris omnem in eo eſſe poſitam, quod & electricum fluidum coerceat, & demerſa in ipſum deferentia corpora comprimat; evincitur demum media alia quaecunque, quibus im-

(*a*) In Epiſtolis ad Cl. Beccarium epiſt. III. §. 82. 83. 109. 110.

immerſa corpora premantur, electricis motibus faciendis eo aptiora eſſe, quo difficilius per ipſa, quam per movenda immerſa corpora, electricum fluidum permeare poteſt, quando vi ſua elaſtica quaquaverſum expanditur, vel etiam ex eorum uno in alterum effluit, ſi inaequaliter per ipſa fuerit diſtributum.

Hinc adparet de motibus electricis theoriam eo totam ſpectare, ut dato fluido elaſtico, & datis corporibus ipſum, deferentibus, per quae aequaliter, aut inaequaliter diſtributum ſit, ac dato demum medio elaſticum fluidum coercente, a quo ea deferentia corpora utcunque premantur, inveſtigentur, ac definiantur leges motuum corporum eorundem, quae ex inaequali medii coercentis preſſione producuntur, dum fluidum elaſticum, vel quaquaverſum expanditur, vel etiam ex deferentium corporum altero in alterum effluit, ut ad aequalitatem diſtribuatur: de qua quidem re praeclara nonnulla protulit Cl. Beccaria, & ſpem facit ſe plura brevi prolaturum, quae novum hoc mechaniſmi genus illuſtrare, ac perficere poſſint (*b*).

(*b*) L. C. §. 93., & ſeq.

JOHANNIS BAPTISTAE GABER

EXPERIMENTORUM DE PUTREFACTIONE HUMORUM ANIMALIUM.

SPECIMEN SECUNDUM,

In quo praecipuae agitur de ſedimento ſeri purulento, ac membrana pleuritica.

NULLIUS humoris, ut equidem arbitror, origo, & natura aeque dubia eſt, & incerta, quam puris. Nam & cum leni foetore, aliiſquē quibuſdam notis cum corruptis humoribus convenit, & tamen blanda, miti, ac fere balſamica quadam indole ab iiſdem longiſſime differt, & craſſitie, aequabilitate, denſitate, albedine peculiarem corrupti humoris ſpeciem exhibet. Id autem vitae, & vitalis actionis productum Medici, ac Chirurgi plerique conſtituerunt, quod nullibi extra corpus natura, vel arte paratum hujuſmodi humorem reperiiſſent. Tandem Celeberrimus PRINGLE veram hujus humoris originem, & geneſim invenit, & luculentiſſimo experimento explicavit. Animadvertit enim abſque ulla vitae actione digeſtum ſerum, ſedimentum deponere, quod veri puris ſpeciem omnino praeſefert. Hoc inventum plane dignum mihi viſum eſt, in quo illuſtrando, & quoad fieri liceret perficiendo, ſtudium, diligentiamque conferrem. Quapropter experimenta multa inſtitui, quae, ni fallor, inventum illud comprobant, confirmant, exornant, ejuſque in hanc Pathologiae partem magnum, & uberrimum uſum oſtendunt. Nonnulla etiam eadem occaſione circa pleuriticam cruſtam experimenta tentavi, quae omnia acutiorum Virorum judicio proponenda eſſe putavi.

I. Sedimentum duplex a putreſcente ſero deponi conſtanter obſervavi; alterum primis digeſtionis diebus abſque ulla

ſeri

ſeri perturbatione ſecedebat, albidiſſimum erat, fundo vaſis adhaerens, & eo magis ſpiſſum erat, quo calor in digerendo minor adhibitus fuerat. In calore modico, ad exemplum decem graduum rheaumuriani Thermometri, ſimillimum erat membranae tenerae, quae in hydropicis fit, & viſcera regit. Portio ejuſdem materiei ex ſero ſecedentis ſimilis membranae ſpecie ad ejus ſuperficiem etiam innatabat. Alterum ſedimentum tardius deponebatur, & ſeri perturbatio ejus depoſitionem praecedebat (*a*), ſubcinerei magis coloris a principio erat, minuſque compactum, ſed procedente tempore majorem denſitatem, & opacitatem acquirebat, & ex ſubcinereo in album magis vergebat.

Sedimentum primum, ſi digeſtionis calor paullo major eſſet, cum hoc paullatim ita confundebatur, ut diſtingui amplius non poſſet. Prius illud exiguum erat, & in vaſe ad ſpithamam alto vix duas, treſve lineas altitudine aequabat; alterum copioſum erat, & tertiam voluminis ſeri ſuperabat. Prius illud, ut dictum, intra unam, alteramve diem in calore humani corporis ſubſidebat, hoc, nonniſi poſt quinque, aut ſex dierum intervallum, aut etiam tardius.

2. Eo autem citius ſubſidebat, quo calor erat major; in vaſis etiam anguſtioribus, coeteris paribus, citius longe ſecedere viſum eſt, quam in amplioribus, quando in utriſque ſeri ſuperficies oleo tegebatur. In vaſis autem hermetice clauſis, coeteris item paribus, paullo tardius ſubſidere viſum eſt, quam in iis, in quibus ſeri ſuperficies oleo tegebatur, & in his iterum aliquanto tardius, quam in iis, in quibus ſerum nudum ad aërem patebat.

3. Coeterum ſecundum ſedimentum etſi plerumque ex albo ſubcinereum, opacum, homogeneum adpareret, & vaſis infimam partem occuparet ita, ut horizontalem ſuperficiem haberet, interdum tamen inprimis ſi ſerum ex hominibus diſ-

(*a*) Cl. PRINGLE T. 11. trait. ſur les ſubſtanc. ſeptiq., & antiſeptiq. Exp. XLV. p. 278.

diſcraſia aliqua laborantibus eſſet eductum, & colore aliquo, vel bilis, vel alterius humoris infectum, non ejuſmodi erat ſedimentum, ſed inaequale, in flocculos diviſum, partim ad fundum colligebatur, partim ad ſuperficiem ferebatur: idque etiam multo magis in vaſis apertis contingebat calori humani corporis, aut etiam vehementiori expoſitis, quando ex evaporatione diſſipata tenuiori parte, priuſquam craſſior haec ſecederet, ita confuſe deponebatur, ut non album, ſed plus, minuſve nigrum, foetens, glutinoſum ſedimentum relinqueret inſtar capitis mortui a ſeri diſtillatione reſidui (*b*).

4. Ex his, aut ſimilibus cauſis fortuitis factum fuiſſe cenſeo, ut aqua, quae ſedimento ſupernatabat, viridis fuerit obſervata a Cel. PRINGLE (*c*), qualem mihi ſemel, & bis obſervare contigit in ſero nudo ex ictericis educto, & calori viginti-quinque graduum expoſito. Sed quando ſerum ſanum, oleo tectum, aut hermetice clauſum in calore viginti-quinque, aut triginta-quinque digerebam, obſervabam conſtanter aquam ſupernatantem decolorem, & eo magis limpidam, quo diutius fuerat digeſta.

5. De aëre vix memorare neceſſe eſt dum ſedimentum fieret, & dum addenſaretur, copioſum ſemper per oleum bullarum ſpecie erupuiſſe, quando oleo liquor tegebatur: in vaſis autem hermetice clauſis etiam robuſtis, tanta copia haud raro collectum, inprimis ſi vacuum ſpatium, exiguum, ſerum autem copioſum eſſet, ut vaſa ingenti cum fragore diffringeret.

6. Compreſſioni hujuſmodi ab aëre factae tribuendum cenſeo, quod in clauſis hoc pacto vaſis ſedimentum tardius ſecederet (2); ut enim motum quemlibet inteſtinum, ita & putrefactionis exordia, ex quibus illa ſedimenti ſeceſſio profi-

(*b*) Vid. T. praeced. p. 81.
(*c*) L. c.

proficiſcitur, pro ratione compreſſionis retardari, aut impediri, BOYLEI experimenta luculentiſſima oſtendunt.

7. Juvabit modo ſedimenti hujus, & puris qualitates exponere, ac comparare.

1.° Pus album fere eſt, opacum, ſpiſſum (*d*): eamdemque eſſe ſedimenti ſpeciem mox memoravimus.

2. Pus in aqua diſſolvitur, & deinde ſitu ipſo iterum ſubſidet (*e*): idipſum ſedimento evenire per experimenta comperi.

3.° Pus frigore non cogitur (*f*): eamdem proprietatem ſedimentum praeſefert.

4.° Pus laudabile fere ſemper foetet (*g*), ſed parum, & vix ſenſibiliter (*h*): ita quando ſedimentum deponitur vix foetere incipit (*i*), & praeterea cum acidis nondum efferveſcere, quinimo iiſdem, & igne coagulari, tum ſedimentum, tum ſupernatantem aquam obſervavi ſecus, ac in ſero penitus corrupto contingat (*k*). Eamdem etiam proprietatem puri ineſſe experimentis deprehendi, ut & alkoole, & acidis, & calore pene eodem, quo ſerum cogeretur, quae puris proprietas, ut opinor, ad ejus ortum ex ſero confirmandum plurimum facit.

5.° Demum pus inflammabile eſſe dicitur (*l*); nec inflammabilibus partibus ſerum deſtitui ejus analyſis oſtendit (*m*).

8. Quod

(*d*) Cl. QUESNAY de la ſuppuration p. 2. 3. ex albido flaveſcens Cl. ESCHENBACH prix de l'Academ. de Chirurg. Tom. II. p. 371.
(*e*) Trait. des tumeurs, & des ulcéres. Tom. I. p. 39.
(*f*) Id. l. c.
(*g*) Id. l. c.
(*h*) Cl. QUESNAY l. c. AQUAPENDENTE apud ESCHENBACH l. c. p. 373. Cl. GRASHUIS in eod. lib. p. 279.
(*i*) Cl. PRINGLE turbatur ſerum antequam foetere incipiat. l. c. p. 282.
(*K*) Ex MALPIGHIO Ill. HALLER Phyſiol. Elem. T. II. p. 132. SCHVVENCHE tamen ſerum corruptum cum ſumme acidis metallicis in maſſam coire poſt efferveſcentiam. Haematolog. p. 134.
(*l*) Ill. HALLER l. c. p. 128. not. h. *
(*m*) Id. l. c. p. 139.

8. Quod si considéremus ea, que in vulnere contingunt, ubi referente BOERHAAVIO, postquam haemorrhagia cessavit, liquor dilutus, rubellus, tenuis effluit (*n*), qui tertio, quartove die serius, vel ocyus in liquorem tenacem, album, pinguem, aequalem, pus abit (*o*). Si cogitemus eam mutationem non contingere, quando vel crusta sponte nata, vel emplastro vulnus non tegitur (*p*), manifesto, ni fallor, constabit, quomodo ex effuso sero pus in vulneribus resorpta tenuiori parte relinquatur: neque dubito ex spissescente lympha pus illud produci, etsi Vir Cl. lympham in vulnere quantumvis relictam, numquam spissescere contendat (*q*), & id solum praestare, ut emollita arteriarum extrema phlogisticum id dimittant, quod postea in pus est abiturum (*r*): quidquod in vulneribus etiam cum exigua inflammatione, aut etiam dispositionibus inflammationi oppositis, tamen bona suppuratio plerumque fit, quae vulneris sanationem adjuvat, & cicatricem citam producit (*s*)? & ex oculis infantum palpebris per aliquod rempus conglutinatis sine ulla, sive inflammationis, sive suppurationis nota hujusmodi materia saepe exit (*t*): huc accedit ratio, quam affert Cl. PRINGLE (*u*), quod seracea magnam quotidie puris copiam praebendo insigniter debilitent, quod fieri non posset ex solo parris vitio, absque universali humorum jactura, & Cl. DE-HAEN advertit ex vulneribus tamdiu tanta copia pus effluere, ut homines pereant defectu virium, cum stagnans in extremis vasis phlogistica materies ne centesima quidem puris partem suppeditare posse videatur, quae om-

(*n*) De cognosc., & curand. morb. aph. 158. n. 4.
(*o*) Ibid. n. 7.
(*p*) Cel. SVVIETEN in eum loc. T. 1. p. 230. GRASHUIS l. c. p. 287.
(*q*) Cl. DE-HAEN T. II. p. 32. ad 36.
(*r*) Id. Ibid. a p. 37. ad 43.
(*s*) Cl. QUESNAY l. c. p. 6. 7.
(*t*) GRASHUIS l. c. p. 299.
(*u*) L. c.

omnia ex propoſita ſeri ſanguinei in pus degeneratione (*v*), facilius intelliguntur, quin ut neceſſe ſit ad puris in vaſis efformationem confugere (*x*), cum inprimis, ut dictum eſt, in vulneribus quibuſdam abſque inflammatione locali, tum abſque univerſali humorum vitio bonum pus prodire fuerit obſervatum (*y*).

9. Sedimentum porro principio dilutum, ac rarum continuata digeſtione craſſius, denſius, & albidius evadit. Idipſum puri ſive vulneratae, ſive inflammatae partis contingit, ut primum aquoſius, & dilutius, opacum magis, denſum, albumque fiat, prout temporis progreſſu digeritur, & ad maturitatem, ut inquiunt, perducitur.

10. In inflammatione autem cum ſerum ſanguini admixtum in celluloſam effundatur (*z*), inde intelligi poſſe videtur, quare pus inflammationis magis putreſcibile ſit (*a*). Sanguinem enim magis putreſcere, quam ſerum, & PRINGLEI experimenta (*b*), & mea (*c*) demonſtrarunt.

11. Coeterum ſerum plus, vel magis diſpoſitum eſſe ad ſedimentum deponendum demonſtrant exempla furunculorum, qui uno die pus fundere incipiunt (*d*), tum anginarum uno die pus exſudantium (*e*): quod autem pus citius efformetur (*f*), quam ſedimentum ſecedere ſoleat in calore humani corporis, id tribuo tum memoratae diſpoſitioni, tum calori inflammationis naturali majori, tum modicae effuſi ſeri quantitati (*z*): nec igitur auſim definire, num aliquando ex

M ipſis

(*v*) p. 44. 45.
(*x*) Cl. DE-HAEN l. ult. c. Et de pure vulneris Cl. QUESNAY l. c. p. 6. 7.
(*y*) Vid ſup. not. s.
(*z*) HALLER Elem. Phyſiol. T. I. p. 37. 38. 115. 116.
(*a*) QUESNAY l. c. p. 15.
(*b*) Exp. XLII.
(*c*) Vid. T. praec. p. 80.
(*d*) DE-HAEN T. I. p. 20. 21.
(*e*) Ibid. p. 21.
(*f*) In vulneribus inflammatis jam ſecundo, aut tertio die pus invenitur, Cl. QUESNAY l. c. p. 19. 20.

ipsis vasis pus efformatum effundi possit (8); inde intelligitur, cur pus in membrana pinguedinea plerumque sedem habeat (*g*), ea nimirum in parte, quae ob laxitatem effusum serum recipere solet; cur dissipatio oedematosi tumoris inflammatae parti supervenientis resolutionem faciat (*h*), quod nempe resolutio fiat, si effusum serum prius resorbeatur, quam in pus abierit.

12. In hydropicis vero ut plurimum serum parum admodum putrescit (*i*), cum neutro salium genere efferveſcit (*k*), & seri incorrupti coagulabilem indolem servat ab acidis (*l*), igne (*m*), & alkoole, quod tribuerim frigidiori aegrotantium constitutioni, alicui residuae effusi humoris circuitioni, copiae, qua & in magnas cavitates effunditur, & eaſdem replet; quae omnia ipsius depravationem retardent (2): inde mirum non est si pus non efformet, sed primum tantummodo sedimentum (1) descriptum membranarum specie deponat viscera obtegentium. Enim vero quando paullo magis putrescit, ut ex siti, tussi, febre, erysipelate, tympanitide significatur, tunc utique etiam verum pus generat, ut observationes ostendunt (*n*). Quando vero parum corruptum, & inodorum educitur, tunc digestione verum sedimentum utique deponere observavi, quod ostendit membranas illas, quae viscerum superficiem obtegunt, non a secundi, sed a primi sedimenti materie ortum ducere, cum secundi sedimenti materies in eodem superstes sit, diuturniori digestione demum separanda.

13. Mem-

(*g*) Grashuis l. c. p. 295.
(*h*) Quesnay l. c. p. 23. 24.
(*i*) Bohn lethal. vuln. p. 149.
(K) Gmelin commerc. Lit. Nor. 1745. heb. 52. apud Haller l. c. p. 134.
(*l*) Ex Malphigio Duverney ibid. p. 136. not. m.
(*m*) L. c.
(*n*) Vid. dissert. Ludovici Salzmann de abscessu interno mirae magnitudinis, quae est CXXVI. T. IV. disput. Medic. quas collegit Hallerus.

13. Membrana autem, quam memoravimus hydropicorum viscera tegens (o), calore hypocausti digesta in liquamen mutabatur, quod omnes puris dotes exhibebat (7). Quemadmodum primum sedimentum continuata digestione, secundi, & vere puriformis sedimenti naturam induebat, ut cum eodem confunderetur (1); hinc facile mihi persuadebam, tum hanc membranam, tum utrumque sedimentum ex eadem materie constitui, quae minori digestione parcior secedat, & membranae, aut primi sedimenti speciem induat, majori, & diuturniori, & secedat copiosius, & pus referat.

14. Cum pinguedinem, aut solum, aut praecipuum puris elementum nonnulli esse velint (p), libuit experiri quid digesta pinguedo praestaret, sed eamdem rancescere quidem, putrescere, in flavum vergere deprehendi, absque eo quod aut sedimentum deponeret, aut ullo modo ad puris similitudinem accederet: hinc pus ab eadem vitiari potius, quam constitui crediderim, & revera venerea ulcera, in quibus pinguedo corrupta, rancida, puri admiscetur, sordida esse solent, & malae indolis pus effundere (q).

15. Cruorem etiam diutissime licet vase hermetice clauso digestum, fluidiorem quidem, & subobscurum evadere, numquam vero in partes secedere, aut ad puris colorem, aliasque dotes accedere observavi. Quare minus probabilis eorum sententia visa est, qui ex cruoris globulis vitali motu attenuatis, & album colorem induentibus puris originem repetunt (r); verosimilius ergo sanguinem coeteris puris principiis admixtum, ipsum magis foetidum, & deterius reddere, ut de inflammationis pure superius notatum (10).

(o) Eadem phaenomena exhibet membrana tegens viscera inflammata: An melicerides, & frigidi alii tumores tarde suppurantes, ex eadem materia?
(p) Cl. Grashuis l. c. p. 297. 299.
(q) Id. l. c.
(r) Platner Chir. §. 54. Cl. Quesnay, qui de la saignée p. 418. 419. pus ex crusta phlogistica fieri censet, & p. 415. 416. crustam a cruore destructo, & colorem mutante fieri existimat.

Nec aliter admixtum ſero cruorem ſedimentum obſcurioris coloris, & magis foetens effeciſſe obſervavi.

16. Similiter ſero admixta bilis ſedimenti colorem, & reliquas dotes a puris dotibus eo magis diverſas efficiebat quo majori copia admiſcebatur. Hinc ex abſceſſibus hepatis raro bonum pus prodire obſervationes oſtendunt (*f*); hinc eryſipelas ichorem potius, quam pus generat (*f**).

17. Demum & inveſtigare volui quid ſolidae partes digeſtae exhiberent. Itaque carnis fruſtula in ſerum, aut aquam immergebam, & impoſitis ponduſculis impediebam quominus ex putredine leviora facta ad ſuperficiem elevarentur: dein tegebam oleo utriuſque liquoris ſuperficiem, ac demum in digeſtionis calore vaſa reponebam. Animadverti autem ex digeſtione carnem aqua immerſam in pulverem veluti ſubpallidum reſolutam, qui nullam cum pure ſimilitudinem referebat, carnem vero in ſero immerſam in ſimilia ramenta reſolutam fuiſſe, quae purulento ſeri ſedimento admixta ipſius aequalitatem & colorem vitiabant (*t*).

18. Ex quibus omnibus jam conſtare videtur puris originem vitali motui adſcribendam non eſſe (*u*), niſi quatenus calorem facit, qui ſpontaneam humorum degenerationem promovet; deinde puris materiem non ex cruore, aut pinguedine, aut bile, aut ſolidis eſſe repetendam, ſed dumtaxat a ſero, coeteros vero humores, aut ſolidas partes ſero admixtas puris naturam depravare.

19. Ichor igitur, aut ſanies ex alterius cujuſcumque humoris ſero admixti ſpontanea degeneratione repetenda eſt, tum

(*f*) Si abſceſſus in intima jecoris ſubſtantia ſit; non negamus enim ſincerum pus ſub ejus membrana colligi poſſe illaeſo parenchimate.

(*f**) De-Gorter ſyſt. prax. §. 160. & alibi.

(*t*) Negat enim Cl. De-Haen ſolidas partes in pus converti, & ex ramentis ſolidarum partium puris acrimonia detritis, puris homogeneitatem tolli l. c. p. 35. 36. 37.

(*u*) Quae communis Medicorum ſententia erat (vid. Boerhaave aph. 387., & alios pleroſque) priuſquam Cl. Pringle ſola ſpontanea ſeri degeneratione purulentum humorem parare docuiſſet.

tum ex diuturniori ejusdem stagnatione, tum forte etiam ex nimio, & inaequali calore (3), aut ex prava, & vitiata seri indole in variis dyscrasiae speciebus, aut demum ex vitio partis serum, aut salsum, aut aliter depravatum effundentis; hinc forte est, ut belladona, & cicuta, quae narcotica sunt, & vasa laxant, ichorem cancrosum in pus convertant, & tantam ejus profusionem faciant, ut aegrotantes in virium prostrationem conjiciantur (v).

20. Serum porro in vase hermetice clauso, ut diximus, diutius asservatum, postquam sedimentum deponit, magis limpidum usque, & usque evadit (4), ut tandem aquae limpidissimi fontis speciem referat: tunc vero sedimentum jam fere totum dissipatum est, ejus loco remanente exigua congerie minutorum fragmentorum, quae calcaream substantiam, sabulumque imitantur (x), ut in sero per plures menses asservato observavi, tunc vero aqua supernatans evaporabilis tota est, foetet, & ex acidis concentratis opaca dumtaxat, & lactea nonnihil evadit, vehementer effervescit, quin tamen coaguletur; in aperto vase per biduum relicta omnem effervescendi vim amittit. An ex ea calcarea materie skirri origo est explicanda?

21. Hinc adparet quomodo intelligendus sit Cl. PRINGLE, qui sedimentum nec colorem mutare, nec sero amplius misceri doceat (y). Ex elementari vero terra sedimentum fieri censet Vir Celeb. nutriendis partibus destinata: quapropter observare libuit qualenam sedimentum serum praeberet animalium, quorum ossa ex rubia rubro colore tincta fuerant, sed de more ex albo in subcinereum vergens fuisse observavi.

22. Pla-

(v) Ex belladona Cl. DE-HAEN p. 43. 46. l. c. ex cicuta vulg. Cl. STORCK in libell. de cicuta p. 104. corollar. 8.

(x) Quales molleculas teneras tophis podagricis similes in siccato sero superstites observavit ELLER. Mémoir de Berlin T. XI. p. 25.

(y) l. c.

22. Placuit etiam ſerum igne induratum digeſtione in vaſe clauſo explorare : paullatim ſolvebatur, aquam dimittebat, & gelatinae ſpeciem induebat, quae emollita ſenſim randem ſedimentum puriforme priori (1) haud abſimile exhibebat, poſtea vero colliqueſcens ulterius hujuſmodi ſedimentum modicae arenae ſpeciem ſimiliter aſſumebat, aqua limpidiſſima ſupernatante (20); ſed haec omnia tardius quam in ſero non coagulato contingebant (21).

23. Libuit demum albumen ovi explorare, quod ſimilia penitus phoenomena, ſimileſque mutationes, ac ſerum digeſtum exhibuit, & fluidiſſimum evaſit depoſito ſedimento, ſed haec omnia tardius quam in ſero contingebant, & ſedimentum ſubcinereum magis, ac fere nigricans erat.

24. Hactenus de ſedimento ſeri puriformi. Quoniam vero puris materiem nonnulli ex eadem materie, ex qua pleuriticam cruſtam fieri docuerunt (a), non inopportunum cenſeo experimenta addere nonnulla, quae in cruſta pleuritica tentavi.

Cruſtam pleuriticam aeſtivo tempore poculo tectam, poſt aliquot dies per deliquium fluidam evaſiſſe Cl. PRINGLE obſervavit (b); eam mutationem in vaſis hermetice clauſis pariter contigiſſe deprehendi, ita ut cruſta tota in fluidum abiret citius, vel tardius prout craſſior, denſiorque, aut tenuior, rariorque erat: prout vero emolliebatur, ſenſim ſenſimque rubrum colorem acquirebat, quamquam adhaerens rubrum craſſamentum diligentiſſime fuiſſet deterſum, proinde in liquamen abibat plus, minuſve rubrum; inde ſuſpicari coeperam revera molleculas ſanguinis colore depoſito in cruſtae elementa abiiſſe.

25. At

(21) Inde intelligitur cur ex corruptione, igne induratum ſerum penitus ſolvi negaverit Cl. PETIT Epiſt. II. p. 25.

(a) Cl. QUESNAY de la ſaignée edit. nov. p. 418. 419. qui cenſet ex propria ſanguinis ſubſtantia cruſtam *glaireuſe* confici ab aucta vaſorum actione, ita deſtructa, ut rubrum colorem depoſuerit Cl. SAUVAGES ſur l'inflammation §. 87. DE-HAEN P. II. p. 17. & 22.

(b) Exp. XLII.

25. At postea albidissimas crustas (c) nactus, & teneras, eas digestione in limpidum, ac decolorem liquorem olei aemulum resolvi observavi, quapropter verosimilius visum est ruborem, quem (24) sensim prodire observaveram, ex irretitis globulis sanguineis provenisse, qui postea soluti, & cum materie membranae propria (d) admixti magis conspicui evaderent, & revera jam observaverat Cl. QUESNAY (e) interdum cruoris molleculas tot intercipi, ut crusta rubra fit, & cum placenta sanguinea confundatur, nec ejus crassities definiri proinde possit, nisi novacula scindendo observetur quousque durities, & resistentia perveniat. Quoniam vero globuli sanguinei etiam plures intercipi solent, & solutione manifestari, etsi antea membrana irretiti conspicui non essent; inde intelligitur cur in morbis, prout crusta augetur, cruoris quantitas minui videatur (f).

26. Ut vero ad propositum revertamur, soluta crusta in oleosum liquorem abierat, & foetens erat, ut tamen acidis, & igne coagulari hactenus posset, & quod ad rem nostram facit, quantumvis in vase hermetice clauso digesta numquam aut speciem mutabat oleosi liquoris, aut sedimentum ullum puri simile deponebat, sed deponebat perpaucas particulas, quae pulverem tenuissimum, cinereum referebant, ex quo verosimile videbatur ex aliis seri partibus conflari, ac eae sint, ex quibus sedimentum constituitur, tum etiam ejusdem materiem ab hydropicae membranae materie discrepare cum illa digestione non fluida, sed puriformis evaderet (13).

27. Quo-

(c) Ideo autem albidissimae erant, quod saepissime per viginti-quatuor horas aquam mutaveram, diversisque in vasis ablueram, aqua autem semper rubuit.

(d) Membranam observavi, ex qua ejusdem ortum illustrari crediderim. Etenim crusta, quae sanguineam placentam obtegebat, crassa, dura, eidem firmiter nexa in ambitu producebatur in mucosam, flocculentam membranam, quae sensim emollita in serum continuari videbatur, in quod immersa erat, ut coronam veluti circa placentam constitueret.

(e) L. c. p. 411. 412.

(f) Id. ibid. p. 407. 408. 415. 416.

27. Quoniam vero ſoluta calore iterum cogitur, inde intelligitur, cur citius aqua calida, quam frigida ſolvi viſa ſit (*g*), quod nempe aquae calore indurata perinde, ac induratum ex calore ferum tardius colliqueſcat (22): de coetero digeſtionis calor eo citius ejuſdem membranae portiones ſolvit, quo intenſior eſt, quamdiu humanum calorem parum ſuperat.

28. Cum humor cruſtam efformaturus dum ſanguis educitur, fluidus, forma olei ad ſuperficiem colligatur, mora demum in cruſtam denſandus (*h*); explorare volui num inſtar glaciei ex calore humani corporis priſtinam fluiditatem recuperaret, ſed fruſtra. Nam in eo calore conſtituta cruſta nonniſi duorum dierum intervallo ſoluta eſt, & ſoluta foetebat, nec amplius frigore priſtinam conſiſtentiam recuperabat: quapropter concluſi non calore liquari, ſed ingruente putredine.

29. Equidem nitro, aut nitrata aqua, aut etiam aqua pura cruſtam ſolvi docent (*i*): ſed in aqua ſive pura, ſive nitrata vix ac ne vix quidem citius reſolvi obſervavi, quam ſi ſola in calore digeſtionis relinqueretur. Praeterea aquam ſolutae cruſtae ſupernataſſe vidi, ut praeterea digeſtione potius, & putredine, quam vi aquae ſoluta fuiſſe videatur, cum inprimis obſervaverim cruſtam nitro, aut ſalibus aliis neutris, aut alkalicis fixis putredinem arcentibus aſperſam longe tardius ſolutam fuiſſe; neque ſic ſoluta, aut etiam admixtis ſalibus ex frigore iterum eſt indurata.

30. Volatilium demum alkalinorum ſpirituum actionem in hanc cruſtam explorare volui, & vidi quidem cum ſpiritu volatili ſalis ammoniaci calce parato in vaſe clauſo calore viginti-quinque graduum digeſtam membranam intra horam, tremulae gelatinae ſpeciem induiſſe, per quatuor vero horas penitus ſolutam fuiſſe in liquorem admodum fluidum,

(*g*) Cl. De-Haen P. I. p. 87.
(*h*) Cl. Quelsnay l. c. p. 405. 406.
(*i*) Cl. De-Haen l. c. P. I. p. 101. u. 1. de vi nitri ſolvente.

dum, homogeneum, coloris nonnihil rubelli; tunc vero liquorem hunc in vas patulum effudi, in quo aliquot horarum ſpatio, diſſipato alkali iterum in gelatinam concreta eſt; interea dum ejuſdem membranae fruſta alia, aut ſola digeſta in eodem calore, aut cum nitro, ſalibus neutris aliis, alkalicis fixis, octava tandem die, vel etiam tardius ex integro ſoluta fuerunt. Membrana etiam albidiſſima, quae in alkoole per menſem, & ultra ſervata induruerat in corium, quod aqua emolliri, aut diſſolvi amplius non potuiſſet (*k*), pari facilitate ſoluta eſt, & iterum congelata. Jam vero ea ſolutio ex putredine repetenda non eſt, cum tam cito diſſolvatur, quamvis affuſus liquor putrefactioni vehementer reſiſtat, & eodem in auras abeunte iterum concreſcat. Notandum tamen ex alkali volatilis diſſipatione ſolutam membranam priſtinam membranae duritiem non recuperaſſe, ſed in firmiorem tantum gelatinam concreviſſe, quæ novo ſpiritu alkali affuſo abſque digeſtione confeſtim ſolvebatur, ejus diſſipatione iterum concretura. Gelatinam etiam artificialem ex cornu cervi, volatili ſpiritu ſalis ammoniaci ſolvi obſervavi, ſed aegrius, quam pleuriticam membranam: aegrius adhuc, & tardius ſolvebatur coagulatum ex igne ſerum, & omnium tardiſſime, & minus perfecte coagulatum albumen ovi. Poſteriores binae ſolutiones ſpiritu diſſipato cruſtas pellucidas relinquebant. Ex his conſtat verum membranae phlogiſticae menſtruum eſſe alkali volatile, ex quo confirmatur ejuſdem membranae analogia cum polypis, qui urinoſo volatili ſale ſolvi dicti ſunt (*l*). An igitur liquor membranam efformaturus indureſcit quarumdam partium diſſipatione potius, quam frigore? Has, aliaſque conjecturas, quae circa naturam, & phoenomena hujus membranae occurrunt, proponere non licet, quamdiu experimentorum plurium comparatione confirmatae non ſint.

(*k*) Schwenke p. 166.
(*l*) Malpighius poſth. p. 162.

RÉFLEXIONS

POUR SERVIR DE SUITE AUX MÉMOIRES

Sur le fluide élaſtique de la Poudre à Canon

PAR M. LE COMTE SALUCE.

CHAPITRE I.

De l'action de l'air ſur la Poudre : de la propagation de l'inflammation & de ſon détonnement.

1. DANS les Mémoires, que j'ai donné dans nôtre premier Volume, je me ſuis particuliérement attaché à examiner la nature du fluide élaſtique, qui ſe développe de la Poudre à Canon à l'occaſion de ſon inflammation, & l'Analiſe Phiſico-Chimique que j'en ai fait, m'a donné occaſion d'entrer dans des diſcuſſions de pluſieurs phénoménes, qui partageoient les ſentimens des Savants. Les objections des Célébres M. MUSCHEMBROEK & BERNOULLI (*a*) m'ont paru les plus ſolides, & mériter le plus d'être développées; c'eſt ce que je me flatte d'avoir fait, & je ne donnerai maintenant à cet égard que quelques obſervations & reflexions que j'ai fait du depuis: mon principal but dans ce Mémoire étant d'expoſer & de démontrer par des expériences nombre de vérités, & de queſtions, qui n'ont été juſqu'à préſent que très-imparfaitement traitées, & dont perſonne n'a encor donné aucune ſolution: telles ſont par exem-

(*a*) Mém. pr. p. 6. . . . . Mém. 2. p. 126.

exemple, celles de déterminer *quelle eſt la véritable action de l'air naturel ſur la Poudre: comment les principes actifs de la Poudre ſont développés à l'occaſion de l'inflammation*, je tacherai auſſi de déméler *le dégré de chaleur néceſſaire pour l'enflammer &c.*: je ne m'arrêterai point à faire par avance le détail de toutes les queſtions que j'aurai occaſion de traiter, quelques unes étant purement accidentelles, & quelques autres ne me paraiſſant pas d'une aſsès grande conſéquence pour mériter que j'en prévienne mes Lecteurs; je me contenterai donc d'en indiquer les principales. Savoir 1.° *La raiſon pourquoi dans le vuide, quoique la poudre prenne feu, la propagation d'un grain à l'autre ne s'en fait pas pour autant.* 2.° Je traiterai *de la chaleur néceſſaire pour l'enflammer ſoit dans l'air libre, ou dans le vuide, & cela ſelon la doſe & la qualité des compoſans.* 3.° J'expoſerai enſuite la méthode dont je me ſuis ſervi *pour méſurer l'intenſité de la chaleur de différentes quantités de poudre dans le plein, & les effets qu'elle peut produire.* 4.° Je paſſerai en après à parler *des vapeurs du ſouffre, de la poudre, des méches, & de chandelles allumées &c.*, & j'aurai occaſion de faire *des réflexions ſur la méthode dont on fait uſage dans les expériences ſur ce ſujet.* 5.° Je finirai enfin par un *examen de la poudre qu'on peut faire ſans ſouffre.*

2. Tous les Phiſiciens ont obſervé que la poudre ne brule que très-lentement, très-difficilement, & en très-petite quantité dans le vuide, mais quelques uns ſe ſont contentés de rapporter ſimplement le fait (*a*). D'autres ont confondu ce phénoméne avec ce qui arrive à toutes les eſpéces de flammes, & ont aſſigné cet effet à quelque propriété particuliére de l'air. Un fait que j'ai rapporté dans mon ſecond Mémoire pag. 146. §. 42., & un examen refléchi ſur d'autres expériences faites par pluſieurs

(*a*) Boyle Expér. circa relat. flam. & aer. tit. 3. pag. 164. & 165. = Haukbee = Mariotte, & pluſieurs autres.

Auteurs m' ont donné lieu de penſer que ce n'était que dans la preſſion qu'exerce l' air ſur la flamme qu'on en devait chercher la raiſon. En effet j' ai fait voir que la poudre s' enflamme dans quelque air infecté que ce ſoit, & BOYLE (*a*) nous apprend qu'une fuſée continue à bruler ſous l' eau. *La flamme de la poudre n' a donc beſoin que d' une preſſion qui en augmente l' intenſité en la retenant au tour des grains* ? C' eſt une vérité que l'expérience que je vais rapporter me parait mettre hors de doute, elle a été faite par M. le Chevalier D' ANTONI pour faire voir les différences entre les quantités de poudre, qui s'enflamment dans le plein & dans le vuide. Quoique cette expérience n' ait donc pas été faite dans la vuë que je viens de propoſer, on verra cependant que l' application en eſt directe, & qu'elle ſert à établir ſolidément la Théorie en queſtion: ſans entrer dans une déſcription étenduë de la machine, il ſuffit de dire que l' eſſentiel conſiſte en ce que le tuïau, qui contient la poudre, n' eſt point vuide d' air, tandis que, par le moïen d' une veſſie ou parchemin, interceptant la communication qu'il a avec un grand récipient, que l' on place ſur une pompe pneumatique, on peut pomper l' air contenu dans le récipient ou l' y laiſſer: on met enſuite la poudre en feu, & le fluide ne peut ſe faire jour qu'à travers la veſſie. Or il arrive que, lorſque le récipient eſt vuide d' air, il s' enflamme beaucoup moins de poudre que lorſqu'il eſt plein: en refléchiſſant ſur les circonſtances de cette expérience nous pouvons aiſément reconnaître la vérité que nous venons de propoſer; car le tuïau qui contient la poudre étant également plein d' air lorſque le récipient, auquel il tient, eſt plein, ou vuide; il eſt clair, que dans le cas ou il eſt vuide la propagation du feu ceſſe, parceque au moment que le

(*a*) BOYLE loco cit.

le parchemin eſt rompu par l'exploſion des prémiers grains, l'air naturel contenu dans le tuïau ceſſe auſſi de comprimer la flamme, laquelle en ſe raréfiant n'a plus aſſez de chaleur pour mettre en feu les grains qui reſtent.

3. Il n'eſt pas moins aiſé de voir en rapprochant les circonſtances de ces expériences, que l'air ne fait point d'autre fonction que de comprimer la poudre, & qu'en s'oppoſant à la libre expanſion de la flamme & du fluide, il procure une intenſité ſuffiſante au feu des prémiers grains pour enflammer les autres, & à méſure que la preſſion eſt plus grande, la propagation du feu eſt auſſi plus prompte. *Cette plus grande intenſité dépand donc de la denſité que la flamme aquiert par la preſſion.*

4. Delà il eſt facile de rendre raiſon pourquoi en enflammant la poudre dans un récipient, par le moyen d'un verre ardent ou d'un fer rouge, au commencement on ne met en feu qne les grains qui ſont immédiatement atteints par le feu, & enſuite à méſure qu'il ſe développe de fluide, la propagation du feu ſe fait aux grains voiſins, & cela plus ou moins promptement, ſuivant que la quantité d'air développé eſt plus ou moins grande, eu égard à l'eſpace qu'il doit occuper. Il eſt vrai que ces dégrès d'accélération ne ſont point aſsès ſenſibles dans le vuide, parceque étant obligé d'emploïer des petites quantités de poudre pour prévenir les accidens facheux, qui ne manqueraient pas d'arriver à l'occaſion de l'inflammation, il ne ſe développe que de très-petites quantités de fluide: pour s'en aſſurer donc, & en faire une comparaiſon ſolide avec l'air naturel, il eſt néceſſaire qu'il s'en produiſe autant qu'il en faut pour réſiſter conſidérablement à l'expanſion de la flamme de la poudre qui continuë à s'enflammer, afin que la flamme d'une quantité ſoit ſuffiſante à mettre en feu celle qui la ſuit, de façon que la propagation ſe faira avec la même viteſſe que dans l'air naturel lorſqu'il ſe ſera dé-

développé asses de fluide pour être en équilibre avec l'air extérieur : ce qui est en effet prouvé par les expériences de HUIGENS, & de MUSCHEMBROEK. Celles dont je vais donner le détail peuvent servir de confirmation à ce que je viens d'avancer.

EXPE'RIENCE.

Je mis une fusée enflammée dans un récipient, j'en pompai l'air, & le fluide nouvellement engendré avec beaucoup de précipitation, à chaque exhantlation, on en voïait diminuer la flamme, lorsque enfin elle parut éteinte je fis rentrer un peu d'air qui la révivifiat dans l'instant, & elle brulait ensuite avec plus de vivacité à mésure qu'il se développait du nouveau fluide: je fis enfin une seconde fois le vuide, & je continuai pendant quelque tems à pomper le peu de fluide qui pouvait encore se produire, & la fusée fut éteinte.

5. On ne trouvera pas mauvais que je fasse observer d'avance que je me suis aussi servi de l'expérience suivante pour déterminer la force & l'élasticité du fluide qui se développe de la poudre à canon, comme on le verra dans la suite.

EXPE'RIENCE.

Un tuïau de verre de la longueur de 9. pieds de Roi environ, était recourbé de deux côtés, & placé sur une planche de même longueur perpendiculairement à l'horizon; la partie supérieure communiquait avec un autre tuïau très-mince, & d'un fort-petit diamêtre, qui étant paralelle au prémier était soigneusement mastiqué à la pompe pneumatique, & lorsqu'on avait tout le vuide possible, on interceptait hermétiquement la communication entre les deux

tuïaux

tuïaux à l'endroit de la jonction, afin de simplifier la machine, & la rendre moins sujette à se casser: la partie inférieure aussi recourbée & paralelle au grand tuïau, n'en était que la continuation, & était de la longueur de 30. pouces environ, elle tenait à un autre tuïau placé horizontalement, & d'un diamêtre presque triple, lequel était uni pour la longueur environ d'un pied, & portait ensuite au moins une douzaine de boules soufflées dans le même tuïau du diamêtre d'un demi pouce environ chacune, & gardant entr'elles un espace cilindrique d'un pouce à un pouce & demi: par le moïen d'un autre petit tuïau on pouvait faire le vuide dans cette autre partie de la machine, & lorsque le mercure était de niveau, on scellait hermétiquement ce tuïau: chacune des boules contenait une égale quantite de poudre en poids, je me servais d'une cuillere de verre, faite à peu près comme celles, avec lesquelles on sert les piéces d'Artillérie, & j'évitai par ce moïen l'inconvénient de ne pas mettre chaque dose dans sa boule: je mettais ensuite des charbons ardens dans un cuiller de fer que je plaçais sous la prémiére boule, dont la poudre s'enflammait après quelque tems, & faisait monter le mercure à une certaine hauteur: lorsque tout était froid, je mettais le cuiller de fer sous la seconde boule, & je continuais de la même maniére pour les suivantes. Or il arrivait, que pendant que le mercure était plus bas que lorsque j'avais fait le vuide dans le long tuïau, la poudre de chaque boule ne prenait feu, que quand le charbon en feu était dessous; mais aussitôt que cette colonne avait atteint à peu près la même hauteur le feu se communiquait d'une boule à l'autre, de sorte que le mercure était pousse à une hauteur qui n'était pas comparable avec les précédentes; & une fois entre autres, où il se trouvait encore plusieurs boules à prendre feu, la machine fut brisée de ce côté avec un bruit extraordinaire, & dommage des Assistans.

6. Il

6. Il eſt inutile de réiterer ici les inductions que nous avons déja fait; nous obſerverons ſeulement, que dans un même récipient, où la différence conſiſte en ce qu'il ſoit plein, ou vuide d'air, la flamme de la poudre ſe trouve comprimée, dans un cas, par un poid, qui réſiſte à ſon expanſion, & augmente par-là ſa denſité, & dans l'autre elle peut librement ſe répandre; ce qui doit faire une grande différence dans l'activité.

La propagation du feu eſt donc intercepté dans le vuide, parceque la flamme des grains, qui ſont en feu, pouvant ſe dilater librement, l'intenſité de chaque particule enflammée n'eſt pas ſuffiſante pour mettre en feu les grains auſquels elle touche: & ce défaut d'intenſité, qui dépand du défaut de preſſion n'eſt autre que une diminution de la denſité de la flamme.

7. La preſſion donc ou réſiſtance &c., de quelle nature qu'elle ſoit produira toujours les phénoménes dont il eſt ici queſtion, ſavoir une facilité à l'inflammation & à la communication du feu, & à méſure qu'elle ſera plus grande juſqu'à un certain point, ces deux phénoménes ſeront plus prompts, le développement du fluide plus ſimultané, & le détonnement plus conſidérable (*a*). De là les différences qui arrivent dans les effets d'une arme à feu chargée avec la même quantité & qualité de poudre (*b*).

8. Il

(*a*) Nous avons démontré §. 4. & 5. qu'une réſiſtance quelconque ſert à la propagation du feu, & que le fluide élaſtique a auſſi cette propriété. C'eſt ce qui eſt encore confirmé par M. Huigens & par M. Jean Muschembroek dans ſon appendice à la phiſique de M. ſon frére pag. 52., le même avertit de pomper le fluide à chaque projection de poudre que l'on fait dans un récipient vuide d'air, car *ſans cette précaution il ſe fait une ſucceſſion d'inflammation de la poudre, que l'on fait tomber ſur le fer rouge à celle qui eſt dans la phiole, & le vaiſſeau peut en être briſé avec danger de ceux qui font l'expérience*.

(*b*) On ne trouvera pas mauvais que je faſſe ici une petite digreſſion, pour faire mieux ſentir l'idée que l'on doit ſe former de l'action de l'air naturel ſur la poudre; on ne ſaurait lui faire franchir de certains bornes, ſans tomber dans des inconſéquences, qui ne peuvent qu'induire dans des erreurs groſſieres. La preſſion donc que fait l'air naturel ou quelconque autre corp ſur la poudre, ſert à nous procurer une pro-

8. Il très-important de concevoir la différence qu'il y a entre la preſſion néceſſaire pour s'oppoſer à la dilatation de la vapeur enflammée, & la preſſion que l'on peut faire à la poudre même puiſque à proportion que la flamme eſt plus comprimée, & par conſéquent plus denſe, la propagation du feu eſt d'autant plus aiſée comme nous venons de l'obſerver. Au contraire à meſure que la poudre eſt plus comprimée la flamme pénétre plus difficilement, comme il arrive dans tous les combuſtibles qui, à choſes égales brulent plus lentement à meſure que leurs parties ſont plus étroitement liées enſemble. Ainſi la denſité de l'air qui comprime la flamme ſans comprimer les grains, facilite toujour la propagation du feu, à meſure qu'elle eſt plus grande; & cela arrive auſſi par la preſſion du fluide engendré quand il eſt retenu par des parois qui ne peuvent céder comme dans le fuſil pyropneumatique de M. le Chévalier D'ANTONI, au contraire quand on preſſe fortement

O la

pagation du feu plus ou moins prompte, ſuivant qu'elle s'oppoſe plus ou moins à la dilatation des parties enflammées de la vapeur & qu'elle l'oblige à réagir avec dautant plus de violence ſur la poudre; d'ailleurs elle n'eſt point la cauſe de la flamme de la poudre, non plus que de l'exploſion, comme le remarque M. MUSCHEMBROEK dans une note qu'il fait à des expériences des Académiciens de Florence, ſur la fumée dans le vuide, où il s'exprime en ces termes = *il paroit par cette expérience que la flamme & l'exploſion de la poudre ne dépendent point de la compreſſion de l'air* =.

L'expérience, ſur laquelle il ſe fonde, eſt qu'aïant jetté quelques grains de poudre ſur un fer rouge dans le vuide, il ne ſe fit que une flamme bleuë: mais il ajoute que ſi on en jette pluſieurs enſemble, ils s'enflamment; ſont exploſion & briſent le vaiſſau.

REMARQUE

Puiſque la poudre peut s'enflammer dans le vuide, & ſe décompoſer, il eſt clair que la préſence de l'air, ou de quelqu'autre corp comprimant, n'eſt point néceſſaire pour produire ni la flamme, ni l'exploſion.

La flamme étant cauſée par cette propriété que les phlogiſtiques ont en général de ſe diſſiper, lorſqu'ils ont aquis le degré de chaleur néceſſaire pour les ſéparer des matiéres groſſiéres, auſquelles ils ſont unis.

Ne pourrai-t-on pas ſopçonner, que ce fut une eſpéce d'évapotation des patties plus volatiles agitées par un mouvement très-violent?

la poudre dans un tuïau ouvert, la preſſion ſur la flamme n'eſt pas plus grande, & par ſurcroit elle trouve plus de difficulté à pénétrer ce corp compacte : delà le plus de lenteur dans la propagation de la flamme.

9. C'eſt ce que l'on voit ſenſiblement dans les armes à feu ; où le bouchon qui ſert pour arranger la poudre, & lui faire occuper un moindre eſpace de celui qu'elle garderait ſans ſon ſécours, s'oppoſe en même tems à la dilatation du fluide, lequel comprime par là la flamme de la poudre, qui a pris feu : or ſuivant que la preſſion retombe plus ſur l'une des deux circonſtances énoncées, les effets qui en réſultent ſont différens ; car le bouchon étant pouſſé avec force le long de l'arme juſque contre la poudre ſans la reſſerrer de trop, ſert à empêcher la dilatation du fluide, lequel contraint celle de la flamme des premiers grains en feu, de ſorte qu'elle peut réagir avec d'autant plus d'intenſité ſur ceux qui reſtent, & par conſéquent

L'exploſion n'eſt autre choſe, que le changement que ſouffre l'air contenu dans la poudre au tems de l'inflammation ; & l'on doit conſidérer trois différens états dans cette circoſtance, ſavoir celui de l'extréme condenſation où il eſt avant l'inflammation, l'état naturel qu'il doit aquerir avant de paſſer à celui de dilatation ; & ce dernier enfin qu'il aquiert plus ou moins, ſuivant la plus grande quantité de chaleur qu'il l'affecte. *De la promptitude donc & de la véhémence, avec leſquelles ſe fait la ſucceſſion de ces états oppoſés dépand cette force ſurprenante de la poudre.*

Il n'eſt pas ſurprenant que les vaiſſaux ſoient briſés dans l'expérience que propoſe le Célèbre M. MUSCHEMBROEK, puiſque les grains, en tombant ſur le fer rouge, trouvent tous un dégré de chaleur ſuffiſante pour les mettre en feu, & les décompoſer en même tems, ſans qu'il ſoit néceſſaire qu'un grain communique le feu à celui qui le ſuit, & par conſéquent cette quantité de fluide étant développée avec une ſimultanéité prodigieuſe, heurte rudement contre les parois du vaiſſau & le fait céder : pourque pareil effet puiſſe avoir lieu, il n'eſt pas néceſſaire qu'il ſe produiſe une quantité de fluide, laquelle étant condenſée, puiſſe être en équilibre avec l'atmoſphére, car il faut avoir égard à la dilatation que ſouffre le fluide dans cette circonſtance, & à la viteſſe avec laquelle il ſe développe, de ſorte qu'une même quantité de fluide développé plus ou moins ſimultanéement faira ſauter ou non le vaiſſau, dans lequel il ſe produit.

N. B. on me permettra de faire une application de ces réflexions en y rapprochant un phénoméne, qui ne manque pas d'arriver lorſque on

séquent la propagation du feu devient plus prompte, & plus facile : il en arrive le contraire lorsque le bouchon sans être exact est trop réfoulé sur la poudre, puisque elle devient alors plus lente. La quantité absoluë de poudre qui peut s'enflammer dans une arme donnée doit donc dépandre du rapport rélatif de ces deux circonstances combinées ensemble : pour éclaircir encor davantage tout ce que nous venons de dire, il ne sera pas hors de propos d'en faire une application pratique; elle nous est présentée fort simple dans les pistolets qui ont une chambre pour la poudre, & une supérieure pour la bâle, on est obligé d'en dévider le canon pour les charger, parceque le diamêtre du trou, par lequel doit sortir la bâle est un peu plus plus petit que celui de la bâle même, ce qui l'oblige à changer de configuration, & qui supposant un grand effort donne le tems à un plus grand développement de fluide, lequel par sa densité, nous le répéterons,

ne sert pas les armes à feu avec toute la précaution néceſſaire : lors donc que dans quelque arme à feu que ce soit, on n'a pas soin de faire passer les bouchons contre la charge, ou que la bâle vient à être engagée plus haut qu'elle ne devrait être, & pour dire la chose plus simplément enfin, si on vient à laisser un intervalle de quelque considération entre les parties de la charge, l'arme créve dans cet endroit, & c'est parceque une grande quantité de fluide étant développée, & venant à heurter contre cette résistance, dont les parties ne peuvent céder avec une égale viteſſe, le fluide réagit sur tout la partie de l'arme, dans laquelle il se trouve renfermé, & la flamme de même, de sorte que toute la poudre qui reste est enflammée à la fois, ce qui n'arrive pas si le fluide peut se dilater à proportion qu'il se développe, parceque alors la preſſion sur la flamme restant à peu près la méme, la succeſſion de l'inflammation est plus uniforme. On ne trouvera pas mauvais que j'ajoute que la résistance n'étant pas insurmontable, c'est-à-dire que la partie de la charge, qui est engagée pouvant céder à la preſſion du fluide, il arrivera que suivant le plus ou moins de viteſſe du développement, l'arme crevera ou non ; de sorte qu'en emploïant deux quantités différentes de poudre, dont la proportion des Composans soit la même, & que la seule différence consiste en ce que l'une soit plus aisée à se décomposer que l'autre, ce qui dépand du grainage, de l'arrangement qu'on tache de lui procurer, & d'un certain rapport qu'elle a avec l'arme, comme

s' oppoſe à la dilatation de la flamme des grains qui ſont déja en feu, & fait qu'elle agit avec plus d'intenſité ſur les autres, de ſorte que les premiers développemens ſont beaucoup moins prompts que ceux qui ſuivent: les carabines rayées nous fourniſſent encor un autre exemple, mais un autre détail ſerait en pure perte, vû que ce ſerait tomber dans des répétitions de ce que nous avons déja dit.

10. Pourqu'il s'enſuive donc le plus grand effort poſſible d'une charge donnée dans une arme à feu, il faut que le fluide ſe développe le plus ſimultanéement qu'il eſt poſſible, ce qui dépand de la combinaiſon de la viteſſe dans la propagation du feu, & de ſon intenſité: celles-ci dépandent d'un certain rapport entre la quantité de matiére de chaque grain, & les interſtices qui ſont entr' eux, & de celui de l'arme avec la charge (*a*).

11. On obtiendra le plus grand des efforts poſſibles, ſi on ajoute à ces conditions, que le mélange des compoſans la poudre ſoit tel que le phlogiſtique & l'acide nitreux ſoient

nous venons de le dire, celle-ci, quoiqu'en moindre de quantité; faira créver l'arme plus aiſément que l'autre, qui eſt en plus grande quantité, & cela parceque la ſimultanéité du développement ſera telle, qu'elle ne donnera pas le tems à l'obſtacle ſuppoſé de ſe déranger, au lieu que l'autre lui communiquera plus ſucceſſivement les dégrès de viteſſe néceſſaire pour entrer en mouvement.

On voit aſsès que je ne donne point ceci, comme une vétité abſoluë dans tous les cas, ſans qu'elle ſoit ſuſceptible de différentes modifications, je me borne ſeulement à dire qu'il y en a ou cela doit arriver ainſi.

(*a*) Comme la force de la poudre dépand de la viteſſe, avec laquelle le fluide ſe développe, & par conſéquent de l'action plus ou moins vive de la flamme ſur la ſubſtance des grains; il parait que toutes choſes d'ailleurs égales, on doit préférer la poudre ronde à l'irréguliére, parceque elle offre à la flamme un paſſage toujour égal & uniforme, au lieu qu'il pent arriver que les ſurfaces planes de la poudre irréguliére venant à s'arranger l'une contre l'autre empéchent la libre communication du feu: quant à la groſſeur des grains, il eſt conſtant qu'il en eſt une qui eſt favorable à la ſimultaneité de l'inflammation, & c'eſt à une expérience éclairée à la déterminer.

Du reſte quand on aura déterminé la quantité abſoluë de fluide qui ſe développe d'une quantité de poudre donnée, ce ſera un problême purement géométrique d'aſſigner les proportions des armes à feu.

soient combinés entr' eux dans une proportion convenable.

12. Pour ce qui regarde le détonnement, il est visible, que puisqu'il se fait par la collision & l'impulsion des parties de l'air nouvellement engendré contre celles de l'air extérieur qui ne peuvent céder avec une égale viteſſe, Mém. pr. pag. 4. §. 25. il diminuera d'autant plus que le milieu sera plus rare, de même que le son, dont le plus ou moins d'intensité dépand de la plus ou moins grande densité du milieu, dans lequel on l'excite; donc le détonnement ceſſera lorsque cette cause n'aura plus lieu.

CHAPITRE II.

De la chaleur néceſſaire pour enflammer la Poudre dans le plein & dans le vuide.

13. APrès avoir déterminé comment l'air agit sur la poudre &c. Je passerai à traiter la seconde question que je me suis proposé, savoir *quel est le dégré de chaleur néceſſaire pour l'enflammer.* Elle renferme plusieurs cas différens qui me semblent mériter d'être traités séparément; & quoique un tel examen paraisse entiérement isolé, & de peu de conséquence, je me fais un devoir de prévenir mes Lecteurs en ce que je le crois digne de quelque attention, puisque outre la nauvaute des phénoménes qu'il présente, il peut être d'un grand secours pour découvrir les loix simples, suivant lesquelles se fait le grand jeu de cette force si étonnante, afin de simplifier la question autant qu'il m'était possible, j'ai jugé à propos de commencer à fixer le dégré de chaleur néceſſaire pour disposer chacun des composans à être décomposé. J'ai fait ensuite les différentes combinaisons, & j'ai déduit des résultats que j'ai eu les vérités principales qui en découlent directement.

14. J'ai

14. J' ai été obligé de faire uſage de deux méthodes différentes dans le cours des expériences que j' ai cru néceſſaires à ce ſujet, & j' en détaillerai les raiſons avant que je faſſe la déſcription des réſultats: elles me paraiſſent d' ailleurs le plus comodes, & peut être des plus ſimples qu'on puiſſe imaginer, l' une eſt cependant préférable à l' autre dans des cas particuliers, ſuivant ce qu'on ſe propoſe principalement à examiner, nous n' en dirons pas davantage pour le préſent.

15. Dans la prémiére il ne s' agiſſait que de mettre les ſubſtances dans des morceaux de flacon que je mettais enſuite à un bain d' huile, dans lequel était un thermomêtre dont la jambe formait un angle pour plus grande comodité, & la marche en était fort ſenſible; c'eſt par ce moyen que j'ai trouvé que le ſouffre ſoit lorſqu'il eſt ſeul, ou qu'il eſt mélé avec le ſalpêtre & le charbon, prend toujours feu à peu près au 593. dégré de Farenheit, & qu'un moment après la poudre détonne (*a*), mais il n'en a pas été de même de chacune des ſubſtances ſéparément, car le ſalpêtre ne pouvait pas ſe fondre non plus que le charbon s' enflammer, ni enfin un mélange des deux pouvait ſe décompoſer par la chaleur qui lui était ainſi communiquée par l' huile bouillante.

16. Il faut remarquer que ſi on met la poudre quelque tems avant que l' huile ait aquis le dégrés de chaleur qui lui eſt néceſſaire pour tranſmettre à la poudre celui qui lui faut pour prendre feu, ou que les dégrés de feu ſoient communiqués trop lentement, la poudre ne peut plus s'enflammer par ce moyen (*a*); il arrive la même choſe à celle qu'on met dans des récipiens à long col, il faut pour lors employer un plus grand dégré de chaleur pour la faire détonner

(*a*) M. AMMONTONS a trouvé que la poudre s'enflamme au même dégré de chaleur qui fait fondre de la grenaille de plomb, Mém. de l' Académ. des Sciences de Paris pour l' année 1703. p. 247.

tonner : nous tacherons de déméler la raiſon de ces phénomènes quand il en ſera tems, & nous paſſerons en attendant à expoſer la ſeconde méthode dont j'ai fait uſage.

17. Je mettais les ſubſtances ſur une platine de fer blanc qui avait un enfoncement ſphérique de trois lignes environ de diamêtre en largeur & d'une demi en profondeur, elle était fixée dans une rainure pour plus de ſureté, & une petite lampe dont le lumignon était conſtamment de 88. fils de cotton fin était placée avec ſoin deſſous la cavité de la platine en même tems qu'on lachait un pendule, dont le nombre des vibrations était de 76. par minute ; elles étaient contées tout haut par une perſonne pendant qu'une autre marquait le nombre que la prémiére prononçait au moment que je donnais le ſignal convenu.

18. Cette maniére de faire ces expériences quoique fort ſimple & exacte, n'eſt pas à beaucoup près auſſi déciſive que la prémiére, laquelle eſt plus uniforme, & la chaleur peut ſe tranſmettre avec plus *d'équabilité*; mais celle là eſt en défaut d'autre part en ce qu'elle n'a pas aſsès de chaleur pour répondre à l'enchainement des expériences néceſſaires nous n'oublierons cependant pas l'avantage eſſentiel qu'elle a ſur l'autre, qui eſt qu'elle donne des réſultats abſolus pendant que la ſeconde n'en donne que des rélatifs.

19. Je dois avvertir que cette ſeconde méthode exige nombre des circonſpections; je ne les paſſerai pas ſous ſilence pour épargner de peine à quelqu'un qui voudrait les réitérer.

1.°

Il faut tacher de procurer autant qu'il eſt poſſible une égalité dans la flamme.

C'eſt

(a) La poudre grainée perd plus facilement encore de ſon inflammabilité par ce moyen que la poudre pilée.

C' eſt ce qu'on peut obtenir à peu près en laiſſant toujours la lampe allumée ſans toucher au lumignon, qu'on aura ſoin de ne pas éparpiller; le fin incombuſtible ſerait préférable, & le coton fin eſt auſſi d' un très-bon uſage en l'employant dans une lampe à éſprit de vin, car il ne peut y avoir alors d' équivoque, moyennant qu'on ait ſoin d'ajouter de l' alcohol à chaque expérience.

2.°

On aura ſoin d' arroſer la lampe de tems en tems avec de la nouvelle huile.

3.

La platine dont on ſe ſervira ſera grande, parceque ſans cette précaution le feu de la lampe ſe communiquera au ſouffre.

4.°

On la laiſſera de plus entiérement réfroidir après qu'on l' aura bien nettoyée en tous ſens.

5.°

Il ne faut ôter la lampe de deſſous la platine que, lorſque le ſouffre ſera tout brulé, & s' il entre du ſalpêtre dans le mélange, il ne ſera pas mal d'y mettre un charbon en feu pour décompoſer ce qui peut en être reſté.

6.°

Les ſubſtances doivent enfin être méſurées exactement, & pour obtenir quelque préciſion dans leur arrangement

ſur

ſur la platine on n' a qu'à paſſer une ratiſſoire ſur la cavité de la même : voici les réſultats des eſſais que j' ai fait avec cette méthode.

EXPÉRIENCES.

I.

Le ſouffre entra en fuſion à 5. vibrations fut entiérement fondu à 10., & s' enflamma à 15.

II.

Le ſalpêtre commença ſe fondre à 25. vibrations, & fut tout en fuſion à 50.

III.

Le charbon commença à prendre feu à 36. vibrations, & fut tout en feu à 50.

IV.

Le ſouffre combiné avec le ſalpêtre, parties égales, commença à ſe fondre à 12. vibrations, s'enflamma régulièrement entre 15. & 20. étant entiérement fondu, & à 25. la flamme changea de couleur, & devint blanchatre, ce qui me fit appercevoir que le ſalpêtre était décompoſé par le ſouffre, en effet aïant examiné le reſſidu je trouvai qu'une partie du ſalpêtre avait été réellement décompoſée. J'obſervais auſſi dans cette occaſion que ſi on ôte la flamme de deſſous la platine auſſitôt que le ſouffre a pris feu, le même brule entiérement ſans que le ſalpêtre ſe décompoſe pour autant, la même choſe ne manque pas d'arriver

ſi on met le feu avec un charbon rouge au ſouffre qu'on a mélé avec du ſalpêtre.

Dans cette expérience les irrégularités dans l'inflammation du ſouffre dépandaient probablement de la diſtribution plus ou moins uniforme des deux ſubſtances.

V.

Le ſouffre mélé à doſes égales avec le charbon ſe fondit à 15. vibrations, s'enflamma à 18.; on vit du charbon en feu à 25. & à 35. tout le mélange fut éteint. Il eſt bon d'obſerver que le charbon ne parait en feu que pendant que le ſouffre l'eſt, à moins qu'il ne ſoit bien légèr. J'ai été obligé de donner un réſultat mitoyen à cauſe des variations qu'il y a eu dans l'inflammation du ſouffre.

V I.

Un mélange de 4. parties de ſalpêtre & une de charbon détonna à 37. vibrations.

V I I.

Un autre de 4. de ſalpêtre ſur une de ſouffre, & une de charbon détonna à 25. vibrations le ſouffre aïant pris feu à 22.

Aprés avoir réitéré avec ſoin cette expérience aïant vû qu'il y avait preſque toujours des différences dans l'inflammation du ſouffre, ce qui en cauſait quelques unes dans la détonnation du ſalpêtre & du charbon, j'ai jugé plus convenable d'employer de la poudre pilée, dans laquelle les compoſans ſont plus uniformément diſtribué en vertu de la longue trituration qu'on lui fait eſſuyer:

La

VIII.

La poudre pilée de 5. parties de ſalpêtre ſur une de ſouffre & une de charbon prit feu à 18. vibrations, le ſouffre aïant pris feu à 15.

IX.

Celle qui eſt faite avec 6. parties de ſalpêtre, une de ſouffre, & une de charbon détonna à 17. vibrations, le ſouffre aïant de même pris feu à 15.

X.

Une autre enfin de de 7. parties de ſalpêtre ſur une de ſouffre, & une de charbon ſe décompoſa à 16. vibrations, le ſouffre s'étant conſtamment enflammé à 15.

Lorſque la poudre eſt grainée l'inflammation du ſouffre eſt retardée, de ſorte que ſi le grainage eſt fort gros il lui faut environ un tiers de plus de tems pour prendre feu qu'il ne lui en faut lorſqu'elle eſt pilée, ce qui fait auſſi que la décompoſition totale de la poudre qui ſuit de près l'inflammation du ſouffre eſt beaucoup moins prompte.

XI.

La poudre ne laiſſe pas de ſe décompoſer entiérement quand même l'on ôte la lampe de deſſous la platine auſſitôt que le ſouffre a pris feu, & la détonnation ſe fait quand le ſouffre eſt preſque tout brulé (a).

(a) Cela arrive auſſi à d'autres combuſtibles; ſi par exemple on met de la poudre dans l'eſprit de vin rectifié qu'on enflamme enſuite, elle ne prend feu que, lorſque celuici eſt entiérement diſſipé; il en eſt de même ſi on met le feu à un linge mouillé dans de l'alcohol, il ne prend feu que quand le même a fini de bruler.

XII.

La poudre fulminante commença à entrer en fusion a 30. vibrations, & détonna à 32. érant toute fondue à ce tems.

20. De tout ce que nous avons dit ci-devant, nous pouvons déduire les vérités suivantes.

Que la flamme du souffre est suffisante (*a*) pour enflammer la poudre, mais qu'il faut que le souffre soit presque entiérement détruit par la combustion, les expériences (VIII. IX. X.) concourent à le confirmer, car l'on voit qu'à mesure qu'il y a plus de souffre dans la poudre, il se passe un plus long tems entre l'inflammation de celui-ci, & la décomposition de la même poudre.

21. La comparaison des résultats (I. IV. VI.) sert à nous faire connaître qu'il faut un plus grand dégré de chaleur pour que le souffre puisse détonner avec le salpêtre qu'il ne lui en faut pour s'enflammer seulement. 2.° qu'il en faut un plus grand encor, pour que le salpêtre soit décomposé par le charbon.

22. La flamme du souffre a cependant assès d'intensité pour mettre en feu le charbon, pour faire entrer le salpêtre en fusion, & pour faciliter la décomposition des deux, c'est donc là la raison, pour laquelle la poudre s'enflamme à 20. 25. vibrations quoique le charbon ne puisse s'enflammer qu'à 38., & que le salpêtre ne soit entiérement fondu qu'à 50.

23. Nous avons vu dans l'expérience (VII.) que le souffre ne prenait pas feu réguliérement après un même nombre de vibrations, & que la décomposition totale des sub-

(*a*) Pour se convaincre avec beaucoup de facilité que la flamme du souffre peut faire décomposer le charbon avec le salpêtre, on n'a qu'à projetter de la poudre dans du souffre enflammé.

ſubſtances ſouffrait auſſi les mêmes altérations, la même choſe arrive auſſi dans la poudre grainée à meſure que le grainage eſt plus gros, comme j'ai fait obſerver après l'exp. (x.) ce qui ſert à nous confirmer que c'eſt en vertu de la flamme du ſouffre que le ſalpêtre & le charbon peuvent ſe décompoſer.

24. Le phénoméne aſsès ſingulier dont j'ai fait mention (16.) ſavoir que la poudre miſe dans des flacons à long col ne pouvait plus s'enflammer non ſeulement au même dégrés de chaleur, auquel elle prenait feu dans des vaſes ouverts, mais même à 7. dégrés de plus, ſemble nous fournir une nouvelle preuve qu'il faut moins de chaleur pour enflammer le ſouffre, qu'il ne lui en faut pour ſe décompoſer avec le ſalpêtre, parceque on ſait d'ailleurs qu'il ne peut prendre feu dans des récipiens à long col.

25. Nous avons de même rendu compte d'un autre phénoméne, qui arrive lorſqu'on fait eſſuyer à la poudre un feu par dégrés pendant long tems, comme quand on met le verre qui la contient dans l'huile en même tems qu'on expoſe celle-ci à un feu lent; il faut pour lors un plus grand dégré de chaleur pour l'enflammer, qu'il ne lui en faut lorſque on lui communique le feu avec plus de vivacité; & ceci a encor plus facilement lieu dans la poudre grainée que dans la pilée: mais il eſt très-plauſible de penſer que cela dépand de ce que le ſouffre ſe diſſipe en pure perte à cette chaleur, puiſque la communication en eſt faite fort lentement par l'huile, & le ſouffre en reçoit aſsès pour ſe ſublimer entiérement avant qu'il ait pu en aquerir autant qu'il lui en faut pour pouvoir s'enflammer; une circonſtance que je n'ai pas indiqué, & que j'ai d'ailleurs obſervé dans ces occaſions ſert à étayer la conjecture que je viens de propoſer, & à la doüer même (on me paſſera l'expreſſion) d'une lueur d'évidence, c'eſt que lorſqu'on laiſſe ainſi la poudre expoſée pendant long

tems,

tems, on lui voit changer de couleur, & elle devient d'un noir très-foncé.

26. Cela posé, on voit clairement que la décomposition totale de la poudre est plus difficile, parceque il faut un plus grand dégré de chaleur pour faire détonner le salpêtre avec le charbon (VI.) qu'il n'en faut pour enflammer le souffre (I.), & par conséquent pour décomposer la poudre qui en contient encor au moment que le dégrés de chaleur communiqué peut suffire pour le mettre en feu.

27. Dans la poudre pilée finement cela n'a pas lieu de la même maniére, & n'arrive pas si aisément, car comme elle forme une espèce de masse, & que le nombre des surfaces est très-fort diminué, la sublimation du souffre ne peut pas être si prompte, ni si facile, de sorte qu'il en reste encore suffisamment pour s'enflammer, & pour causer l'entiére décomposition de la poudre, au tems que le mélange a reçu un dégré de chaleur égal à celui qui fait que le souffre prend feu.

28. La poudre perd de son inflammabilité dans le vuide, de sorte que le dégré de chaleur, qui peut l'enflammer dans l'air libre, n'est pas suffisant à en procurer la décomposition dans les récipiens dont on a pompé l'air; Mrs. HUIGENS, & MUSCHEMBROEK ont fait aussi cette observation. Cette différence ne dépandrait-elle pas aussi de la sublimation du souffre? ceci me parait être d'autant plus fondé, que le vuide sert à la favoriser (*a*), & que, suivant ce que nous avons vu ci-devant, non seulement le salpêtre se décompose plus aisément avec le souffre qu'avec le charbon, mais sa flamme sert à accélérer la détonnation du charbon avec le salpêtre.

29. Si

(*a*) J'ai observé que dans ces occasions il s'éléve une poudre jaunatre qui se cole aux parais du vaisseau, M. BOYLE le dit de même, or cette poudre ne peut être que du souffre sublimé.

29. Si on ne fait pas eſſuyer un dégré de chaleur violent, & avec promptitude à un mélange de ſoufre & de ſalpêtre dans des récipiens vuides, on ne peut parvenir à le faire décompoſer, parceque le ſouffre ſe ſublime bientôt, & le ſalpêtre enſuite quoique fondu ne peut plus détonner faute de phlogiſtique. Tout ceci eſt appuyé aux expériences que j'ai fait ſur ces mélanges dans le vuide, par leſquelles j'ai trouvé, outre ce que je viens de dire, que la poudre qui contient du ſouffre prend feu à peu près au même dégré de chaleur que celle qui n'en a point ce qui ſert à confirmer ce qui a été dit précédemment.

30. Nous pourrons donc rendre aiſément raiſon de ce, que quelques Savants, n'aïant pas pris ces précautions, n'ont pas vu la poudre s'enflammer dans le vuide, & l'ont en conſéquence niée; mais c'eſt probablement parceque où ils ont employé un mélange ſans charbon, ou qu'aïant fait uſage de bonne poudre, ils ont donné un feu trop lent & moindre de celui qui eſt en ce cas néceſſaire pour faire détonner le ſalpêtre avec le charbon.

31. Nous finirons donc ce Chapitre par conclure.

1.°

Que pluſieurs circonſtances contribuent à modifier l'inflammabilité de la poudre, ſavoir le plus ou moins de ſouffre; le mélange plus ou moins intimément broyé; le grainage plus ou moins gros.

2.°

Que l'inflammation eſt très-prompte auſſi ſi le ſouffre peut s'enflammer comme il arrive en plein air.

Qu'elle

3.°

Qu'elle ſera encor augmentée ſi le ſouffre eſt en petite quantité au moment qu'il a aquis le dégré de chaleur néceſſaire pour s' enflammer .

4.°

Que le ſouffre ne pouvant s'enflammer , il faut en ce cas employer néceſſairement un dégrés de chaleur plus grand , & égal à celui qui peut faire décompoſer le ſouffre avec le ſalpêtre .

5.°

Que ſi le ſouffre ſe ſublime avant qu'il ait aquis le dégrés de chaleur qu'il lui faut pour prendre feu, ſoit à cauſe du trop de ſurface , ſoit par la lenteur dans la communication du feu, ſoit par le défaut de preſſion , ou ſoit enfin par quelque autre circonſtance , ou par le concours de pluſieurs à la fois , on ne peut ſe diſpenſer d'employer un dégré de chaleur encore plus grand du précédent pour faire détonner la poudre.

32. J' ai taché d' expoſer avec toute la préciſion poſſible les inductions principales , que nous fourniſſent les réſultats des expériences dont j' ai donné le détail : j' aurais pu en tirer un plus grand nombre , & propoſer même quelques conjectures qui , ſans avoir jamais été démenties par les faits ſemblaient au contraire parfaitement d'accord avec quelques cas particuliers, mais ne m' aïant pas été poſſible d' obvier aux irrégularités qui les accompagnaient quelque fois à cauſe de la complication des circonſtances, dont on ne pouvait les délivrer ; j' ai jugé plus convenable de conſerver trop de reſerve , plutôt que de tomber dans le défaut

faut oppoſé ; d' ailleurs je ſuis aſsès porté à croire que ce que nous avons dit ſur ce ſujet fournit des lumiéres ſuffiſantes pour ſervir de guide à la pratique, & pour nous tirer de l' eſclavage d' une *routine machinale* (*a*), par laquelle nous nous aſſujettiſſons ſans connoiſſance de cauſe à ce que nos Prédéceſſeurs ont jugé à propos d' établir : s'ils avaient fait de même nous ſerions bien plus reculés en certains genres que nous ne ſommes ! Leur exemple nous met donc en droit de pouſſer plus loin nos Recherches ſur les choſes naturelles, & de ſoumettre même ce qu'ils ont fait à l'Analiſe la plus ſcrupuleuſe. C'eſt par là qu'on parvient à découvrir la vérité.

33. Les Recherches que nous avons avons fait pour déterminer la chaleur qui peut enflammer la poudre, peuvent auſſi nous fournir des lumiéres ſur le développement des principes actifs, dont dépandent les effets qu'elle peut produire : La théorie chimique que M. MACQUER en a donné dans ſon excellent Cours ſatisfait amplement pour ce qui regarde les actions inteſtines, & les jeux d' affinité des ſubſtances, & nous renvoyons avec plaiſir nos Lecteurs à cet ouvrage digne de ſon Illuſtre Auteur, nous reſervant ſeulement de rapprocher tout ce qui peut ſervir à donner une idée exacte des cauſes, pour ainſi dire, ſecondaires qui concourent au développement de l'air, en vertu du-

(*a*) Bien des gens ont une idée aſsès obſcure des termes de *théorie* & de *pratique*. *L' application phiſique des principes généraux, & abſtraits à des cas particuliers* eſt ce, qu'on doit entendre par la première. *L' action où les opérations purement mécaniques qui ſont néceſſaires pour cela*, ſont ce que nous entendons par *routine*, or ceux qui n'ont qu'un repertoire de cas particuliers ſans enchaînement & ſans ſiſtéme ne ſavent pas la *pratique*, & cette claſſe comprend le plus grand nombre des hommes dans toutes les profeſſions. Ceux qui outre les principes fondamentaux ſavent encore tout ce qui eſt eſſentiel pour en faire uſage, ceux la ſavent à proprement parler la véritable *pratique*, & ne manqueront tout au plus que de la *routine* néceſſaire pour opérer avec plus de facilité. *La pratique eſt donc l' art propre d' une ſcience*, & à leur tour *les principes généraux & abſtraits ſont les ſciences des arts.*

quel on voit arriver les effets les plus ſinguliers ; nous ne nous arrêterons pas à former des conjectures pour décider ſi on eſt plus fondé à croire que l'air préexiſte dans la poudre, ou s'il eſt produit à l'occaſion de l'inflammation par le nouvel arrangement que prennent entr'elles les parties primitives, ou les élémens des compoſans.

34. Il eſt viſible en premier lieu qu'il faut néceſſairement un dégré de chaleur tel, qui puiſſe fondre le ſalpêtre pour que la détonnation de la poudre ait lieu. 2.° que puiſque la flamme du ſouffre eſt capable de produire cet effet, toutes les fois qu'elle ne pourra pas s'exciter, la détonnation ſera retardée : mais on ſait par les principes chimiques que dans cette occaſion le phlogiſtique du ſouffre & du charbon ſe ſépare de ſa baſe pour ſe diſſiper avec l'acide nitreux, c'eſt donc dans le tems de ces actions & réactions des ſubſtances que ſe développe le fluide élaſtique de la poudre.

35. Il eſt donc clair que le développement du fluide ſera d'autant plus accéléré que le ſalpêtre aura de facilité à ſe décompoſer avec le phlogiſtique, & il n'eſt pas moins évident que la décompoſition ſera d'autant plus prompte que l'acide nitreux trouvera moins de difficulté à attaquer le phlogiſtique : or l'acide nitreux attaque avec plus de facilité le phlogiſtique à meſure qu'il ſe trouve moins fortement uni à ſa baſe, ce qui arrive en effet dans le charbon où l'union n'eſt pas ſi forte que dans le ſouffre ; delà la raiſon pourquoi le ſalpêtre détonne plus aiſément avec le charbon qu'avec le ſouffre, & encor plus facilement avec le foye de ſouffre qu'avec le charbon même. Mém. ſecond p. 137. 145. §§. 43. 64. car le phlogiſtique a plus d'adhérance avec l'acide vitriolique qu'il n'en a avec les terres, mais il en a plus avec celleci qu'avec le tartre vitriolé.

36. Quelques expériences que j'ai fait ſur la poudre fulminante, ſervent à confirmer ce que nous venons de dire,

&

& ce que j' ai avancé ailleurs Mém. ſecond p. 145. §. 64. on me permettra d' en donner un précis.

Expérience.

Je fis du foye de ſouffre que je pilai finément avant qu'il fut tout-à-fait froid pour qu'il ne put pas contracter ſi aiſément l' humidité de l'air, & je le mélai en doſes convenables avec du ſalpêtre, après que le tout parut intimément broyé, j' en mis une partie ſur une pêle que j' expoſai au feu, & il ſe fit une détonnation ſemblable à celle de la poudre fulminante commune.

Expérience.

Au lieu de broyer intimément les ſubſtances enſemble dans ce ſecond eſſai, je me ſuis contenté de fair tomber du ſalpêtre froid ſur du foye de ſouffre liquéfié, ce qui produiſit une fulmination un peu moindre à la vérité que celle de la précédente & de la commune, mais infiniment ſupérieure à la déflagration de la poudre à canon.

37. Une troiſiéme expérience que j'ai fait ſur cette poudre, ſert à nous convaincre que le dégré de chaleur contribue en quelque façon à la plus grande ſimultanéité du développement du fluide, & par conſéquent au plus grand effort, & au détonnement plus violent, je l' ai dit en paſſant dans mon ſecond Mém. p. 144. §. 63.

Expérience.

Si on mêle le ſalpêtre entiérement fondu avec de foye du ſouffre liquéfié on obtient une détonnation qui ſurpaſſe toutes les autres.

Je ne diſſimulerai point que le peu de ſoin que j' ai eu quelquefois à prendre les précautions indiſpenſables pour me garantir des dangers qu'on peut courir dans toutes ces expériences m'a couté un peu cher, je dis ceci pour avertir ceux qui voudront les repeter de n'en négliger aucune.

38. L' action du feu ſur la poudre eſt encore une circonſtance qui favoriſe la décompoſition de l' acide nitreux & du phlogiſtique ſuivant que la quantité en eſt plus ou moins étenduë; & par conſéquent l' inflammation ſera d'autant plus ſimultanée que la flamme de celle qui a pris feu ſera plus *reverbérée* ſur celle qui reſte par la réſiſtance de l' air ou de quelque autre corp comprimant comme nous l' avons démontié dans le premier Chapitre, or comme le développement ſe fait avec la même viteſſe que la décompoſition des ſubſtances donc le développement ſera d' autant plus ſimultané que la reverbération de la flamme ſera plus grande.

39. L'action plus ou moins grande de la poudre dépand de l' élaſticité ou de la denſité du fluide, qui diminueront à meſure que les obſtacles qu'elle doit ſurmonter ſeront plus aiſé à être dérangés, & qu'ils céderont avec plus de facilité, d'où il s'enſuit que, ſi le fluide peut ſe répandre dans un trop grand eſpace pendant que les développemens ſe font, l' effort en deviendra très-fort diminué, parceque l' action de la flamme ſera moins vive, & par conſéquent la ſucceſſion des développemens beaucoup plus lente.

Il réſulte de ceci que dans les cas dont nous avons parlé dans les notes du premier Chapitre (ſavoir lorſque la poudre brule avec promptitude, & que le fluide ſe dilate moins) les effets ſont incomparablement ſupérieurs à ceux qui ont lieu dans des circonſtances contraires.

40. D' ailleurs outre tout ce que nous avons dit juſq'ici pour faire voir que la différence des effets des mêmes

quan-

quantités & qualités de poudre dépand du plus ou moins de viteſſe, avec laquelle le fluide ſe développe, rien ne peut nous fournir une preuve plus complete que les expériences que je donnerai dans le Chapitre ſuivant, par leſquelles je trouve que les quantités de fluide développé ſont toujours dans la raiſon des quantités de poudre qu'on a employé, & qui ſe ſont décompoſées (*a*).

CHAPITRE III.

Des quantités rélatives de fluide développé de différentes quantités de la même poudre.

41. C'Eſt un principe aſsès communement reçu que la quantité de fluide qui ſe développe de la poudre eſt proportionelle aux quantités de la poudre décompoſée; on ſait de plus que le ſouffre & le charbon n'en fourniſſent point : nous ſommes donc fondés à penſer que le principe actif de ce fluide eſt contenu dans le ſalpêtre, & qu'il en eſt développé par l'action des autres ſubſtances, rélativement à la proportion qu'il y a entr'elles; quoique je n'aïe jamais douté de ce principe. J'ai cependant voulu m'en convaincre par l'expérience, & on ne trouvera pas mauvais que j'en donne ici un détail.

EXPÉRIENCE.

Un tuïau de baromètre de la hauteur de 36. pouces, & recourbé dans ſa partie ſupérieure communiquait à un flacon

(*a*) J'ai cru néceſſaire d'ajouter cette expreſſion parceque ſouvent il arrivè que toute la poudre qu'on emploit ne prend pas feu, & cela particuliérement dans les armes à feu, car les obſtacles ne peuvent pas réſiſter au delà d'un certain terme, & il faut ou qu'ils cédent, ou que l'arme créve. Il n'en eſt pas de même ici, où le feu extérieur èchauffe uniformément tous les grains ſans qu'il ſoit beſoin que le feu ſe communique ſucceſſivement, de ſorte qu'elle s'embraſe toute, & je ſuis trés-perſuadé que les effets en ſont plus grands proportion gardée.

con dont le col était de la longueur environ d' un pied, j'en maſtiquai la jonction avec de la cire d'Eſpagne pour plus grande commodité (*a*); l'extremité du tuïau était de forme conique, & l' embouchure avait la même figure, mais elle était renverſée afin que le flacon fut toujours placé de la même maniére: un tuïau de verre hermétiquement ajuſté tenait à la courbure de celui du baromètre, & par cette voie l' on pompait l' air de la machine, l' extrémité inférieure du baromètre trempait dans une fiole de mercure, & une planche, à laquelle on adaptait une graduation mouvante, ſoutenait le baromètre, & mettait l' obſervateur à l' abris de tout danger; la quantité de vuide était toujours la même, ſavoir de p. 26. $\frac{3}{4}$ environ, & pour plus grande précaution, je ne cherchai point à le pouſſer auſſi loin que j' aurais pû, car il reſtait à peu près 8. ligne d' air dans le cas ou j' avais fait monter le mercure à la hauteur ſuſdite, & qui eſt celui où il y avait plus de vuide: je dois de plus avertir, qu'après avoir fait avec la même ſtation autant d'expériences qu'il était poſſible, & dont le terme était fixé par la deſcente du mercure juſqu'au nivau, je changeai la ſtation, & je les repetai de la même maniére ſur celle-ci, il eſt vrai qu'à meſure qu'il reſtait plus d' air la ſuite diminuait de termes: j'avais meſuré, & choiſi enfin pluſieurs flacons préciſément de la même capacité pour ſubſtituer en cas de beſoin: je commençai donc par bruler des quantités de poudre, qui étaient entr'elles dans le rapport des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. &c., & le mercure était à la hauter de 26. $\frac{3}{4}$ pouces; je repetai 6. fois cette expérience avec la même ſtation en conſervant le même rapport entre les quantités, & je trouvai, que les dépreſſions moyennes dans l' inflammation ſuivaient auſſi la même proportion, de même que le fluide refroidi,

(*a*) On pouvait de cette façon mettre la poudre ſans altérer les capacités, & en cas que le flacon eut ſouffert ou pouvait en ſubſtituer aiſément un de ceux que j'avais meſuré.

ſavoir à peu près celle des nombres ci-deſſus, aïant enſuite fait la ſtation du mercure à 26 pouces & demi, & enſuite à 26 j'en eus les mêmes réſultats ; je me ſuis ſervi enſuite du rapport d'1, 2, 4, 8, &c. pour les quantités de poudre que j'emploïais, & les dépreſſions y répondirent.

42 Enfin il eſt très-conſtant que la force où l'élaſticité de pluſieurs quantités d'une même qualité de poudre, & les quantités de fluide permanent ſont proportionelles aux quantités de poudre emploïées, ſavoir ſi elle eſt double, triple, quadruple &c. il ſe dévéloppe 2, 3, 4 fois autant de fluide, & les effets ſont doubles, triples, quadruples &c. pourvû que la preſſion ſoit la même.

43 Ce que nous avons vû ci-devant ſert à nous faire connaître les quantités réelles du fluide après le dévéloppement fait & après ſa parfaite condenſation rélativement aux quantités de poudre emploïée, & l'élaſticité de ce même fluide à l'occaſion du dévéloppement : or en faiſant une ſouſtraction, l'on aura la ſomme de toutes les dilatations, c'eſt-à-dire celle de l'air juſqu'au moment, de l'inflammation celle qu'il ſouffre encore dans cette occaſion, & celle du fluide qui ſe dévéloppe, & comme l'air réſidu eſt conſtant, on peut déterminer à peu près ſa dilatation dans le tems de l'inflammation par la comparaiſon de pluſieurs réſultats. En effet lorſque le fluide eſt réfroidi, la quantité d'air naturel, que l'on a laiſſé dans la machine, agit toûjours de même, puiſque la quantité en eſt ſuppoſée égale, au lieu que cette action eſt différemment altérée par la préſence du feu, & je l'ai conſidérée ſous différens points de vüe ſuivant que la quantité de poudre que je brulais dans la même capacité était plus ou moins grande ; mais la dilatation de l'air qui reſtait dans la machine étant donnée par l'obſervation, on n'a qu'à la déduire, & ce qui reſte comprend ſeulement la raréfaction que ſouffre le fluide, & celle qu'eſſuïent les parties de l'air qui ont un attouchement immédiat,

médiat avec les parties enflammées, de sorte qu'on pourrait sans erreur grossiére les considérer comme faisant partie du fluide qui se produit ; ou si on veut l'apprécier on peut à mon avis poser la dilatation totale de l'air à celle du fluide comme 2 , 3. car il est bon d'observer que le fluide est entiérement confondu dans les parties enflammées de la poudre pendant qu'à l'air la comunication de la chaleur ne se fait que par couches ; quoique cette estimation paraisse tout-à-fait arbitraire , je suis assés porté à croire qu'elle ne s'écarte pas trop de la véritable , mais nous n'oublierons pas de dire que dans les armes à feu elle sera moindre encore , & que l'on peut même la négliger entiérement, vû la petite quantité qu'il s'en trouve eu égard à la quantité de fluide qui se produit, & il est même très-plausible de penser que la plus grande partie en est chassée par la lumiére du moment que le feu se comunique, mais après tout la détermination n'étant pas trop grande les erreurs ne sauraient être de conséquence.

44 Ces expériences nous fournissent encore quelque autre induction ; en prémier lieu que les dilatations de la même quantité d'air qui reste dans la machine à compter du moment qu'on applique le feu jusqu'à celui où la poudre s'enflamme, sont toûjours les mêmes quoique on varie les quantites de poudre ; la quantité de feu qu'on applique extérieurement n'apporte donc aucun changement a cette circonstance, c'est ce qui est assés clair moyennant que la quantité d'air soit constante, & que l'arrangement de la poudre soit à peu prés le même, car s'il faut un dégré de chaleur fixe pour enflammer la poudre, ce même dégré ne peut aussi dilater l'air que jusqu'à un point déterminé, sauf qu'on ne fasse des grandes différences qui dépandent pour lors de ce que nous avons déja dit §. 25, d'ailleurs le feu étant vif le différences évanouissent, & le plus ou le moins n'en fait que dans les viteſſes des effets. En second lieu le

fluide

fluide à l'occaſion de l'inflammation occupe un eſpace à peu prés double de celui qu'il occupe étant condenſé. Nous avons vû Mém. 2.d p. 125. §. 12. que la denſité du fluide dans la poudre eſt environ de 2128, donc en doublant ce nombre nous aurons 4256 pour la dilatation dans l'inflammation: dilatation qui eſt conforme autant qu'on peut prétendre avec celle que AMMONTONS & BELIDOR ont aſſigné.

45 De la méthode que je viens de propoſer il eſt aiſé de conſtruire une echelle de la force du fluide de la poudre lorſque la preſſion eſt conſtante; j'en expoſerai maintenant un autre où cette preſſion va en augmentant, & qui n'exigeant pas à chaque réſultat un nouvel appareil me parait plus commode: j'ai donné la déſcription de cette machine dans le Chapitre premier p. 98. §. 5. & pour l'employer avec plus de ſuccés à l'uſage dont il queſtion j'ai ajoûté une regle graduée qui pouvait ſe mouvoir dans une couliſſe, & qui depuis la ſurface ſupérieure du vif argent cotoyant le long tuïau ſervait à en indiquer la marche, il ne reſtait plus que 8 à 9 lignes d'air dans les deux parties de la machine, chaque boule contenait un grain de la meilleure poudre grainée, & j'avais ſoin de laiſſer parfaitement condenſer le fluide avant que paſſer à l'inflammation de la poudre qui était dans la ſuivante: par le nombre des vibrations d'un pendule je voyais à peu prés de combien la preſſion augmentée pouvait acroitre l'inflammabilité; nous paſſerons ſous ſilence les autres précautions pour ne pas tomber dans des répetitions, on n'a qu'à ſe rapeller tout ce que nous avons dit à l'endroit cité.

46 Les réſultats de ces expériences différent de ceux de l'autre parceque nous avons ſupprimé des conditions, & que nous en avons introduit des autres, elles s'accordent neanmoins dans celles qui ſont communes, en effet nous commençons par obſerver que les quantités de fluide engendré ſont toujours les mêmes; il n'en eſt pas ainſi des variations du mercure

au moment de l'inflammation, car l'intenſité du feu de la poudre devenant toûjours plus grande raréfie d'avantage le fluide & l'air qui comprime, & de la comparaiſon de pluſieurs termes ſucceſſifs de différentes ſuites il réſulte que la force eſt à peu prés en raiſon des preſſions : nous voyons auſſi que la poudre aquiert plus aiſément les dégrés de chaleur qui lui faut pour s'enflammer, car le nombre des vibrations décroit dans une progreſſion dont les différences vont toûjours en augmentant, mais c'eſt une conſéquence de ce que nous avons déja fait obſerver.

CHAPITRE IV.

Méthode dont je me ſuis ſervi pour meſurer l'intenſité de la chaleur de différentes quantités de poudre dans le plein, & les effets qu'elle peut produire: Réflexions ſur les vapeurs du Souffre, de la Poudre, des Méches & des Chandelles allumées &c. & de la méthode dont ont fait uſage dans les expériences ſur ce ſujet.

47 LEs ſentimens des Savans ſemblent être partagés ſur ce ſujet, mais cette diverſité n'eſt dans le fond qu'apparente, & dépand de ce que l'énoncé dans leur manière d'apprécier l'intenſité du feu de la poudre eſt trop vague, car je ne ſaurai penſer qu'il put y avoir lieu à différentes opinions ſur une choſe qui peut être aſſujettie à l'expérience, & je ſuis très-perſuadé que la queſtion propoſée ſous un énoncé rigoureux faira diſparaître toute contradiction : quant à moi je ne diſſimulerai point que je crois que cette intenſité eſt ſujette à baucoup de modifications, & qu'elle eſt plus ou moins grande: 1.° Suivant que on en augmente, ou qu'on en diminue la quantité dans le même eſpace où l'on l'enflamme : 2.° Suivant que les compoſans ſont entr'eux

dans

dans un tel rapport, plûtôt que dans tel autre: 3.° Enfin que l'ordre ou l'arrangement qu'on lui procure peut auſſi y avoir quelque part &c. & je ne doute point qu'on ne puiſſe l'augmenter à l'infini.

48 Ce qui eſt certain d'ailleurs, & que l'expérience nous apprend, c'eſt que le fluide en ſe dévéloppant occupe un eſpace à peu près double de celui où il eſt réduit lorſqu'il eſt condenſé §. 44, donc la chaleur de la poudre dans une arme à feu ne s'écartera pas baucoup de celleci; & cette donnée eſt aſſés exacte pour les problémes balliſtiques.

49 La complication des circonſtances qui concoureut à rendre l'intenſité du feu d'une même doſe de poudre plus ou moins active, & les moyens pour parvenir à la déterminer au juſte, même rélativement, ont été d'aſſés puiſſans motifs pour me contenter des eſſais dont je ferai le rapport & que je reconnais encore fort éloignés de cette préciſion qui ſervant à donner des nouvelles lumiéres ſuffit quelque fois pour bien dévélopper un ſujet, & quelqu'autres à former un enchainement heureux entre pluſieurs, ce que je puis dire de nauvau ne fera que l'enrichir & fournir à quelqu'un qui ait plus de loiſir de nouvelles vûes, & des applications plus complettes à l'avantage de la ſociété en leur épargnant des tentatives inutiles; c'eſt à cet effet que j'expoſerai même ce que j'ai tenté & qui ne m'eſt pas réuſſi.

50 Je me ſuis ſervi en prémier lieu du termométre dont j'ai fait mention dans le ſecond Chapitre de ce Mémoire p. 106. §. 15. mais à la troiſiéme cuillerée de poudre (dont chacune était de demi once, & dont la compoſition était de trois parties de ſalpêtre une de ſouffre & une de charbon le tout humecté) le mercure étant bouillant le verre ſe fondit: au lieu de projetter ainſi la poudre dans un petit creuſet j'ai préféré de ſubſtituer une fuſée de la même compoſition que j'ai mis dans une preſſe, un ter-

mométre était ſoutenu par un pied qui pouvait être baiſſé ou élevé à l'aide d'une vis ſans fin, afin que la boule fut toûjours expoſée autant que faire ſe pouvait à la même quantité de feu, mais à peine en fut il brulé un tiers que le verre fut fondu; les aïant enſuite fait conſtruire ouverts ils n'eurent pas un meilleur ſort: j'abandonnai donc l'uſage des termométres, & je ne fus pas plus heureux en employant le pyrométre, car je ne pouvais pas aſſujettir tellement les circonſtances pour répondre à peu prés de leur identité.

51 Me voyant ainſi contraint de réjetter abſolument tous les moyens connus par leſquels je pouvais me flatter d'obtenir quelque exactitude j'ai tenté de trouver quelque nouvelle méthode pour me procurer au moins des limites, mais c'eſt ce que je n'ai pû faire non plus avec la préciſion que j'aurais déſiré; celle dont je me ſuis ſervi eſt neanmoins aſſés commode & ſimple, & peut être, j'oſe l'eſpérer, poutra-t-elle être employée une autre fois avec plus de ſuccés.

52 Elle conſiſte en ce que je mis ſucceſſivement des lames de différens métaux fort minces & de même poids, dans un creuſet dans lequel je projettai des doſes de poudre de demi once chacune, & de la compoſition déja énoncée; j'étais obbligé de mettre le feu à la premiére, & lorſqu'elle touchait à ſa fin j'en projettais une autre, laquelle était de même ſuivie par une troiſiéme & ainſi de ſuite. Les réſultats que j'en ai eu ſont les ſuivans.

1.°

Le plomb & l'étain ſe fondirent à la fin de la premiere doſe.

Le

2.°

Le zinc s'enflamma à la moitié environ de la seconde.

3.°

Le cuivre jaune, & une monnoie se fondirent & formerent un bouton avant la fin de la quatriéme.

4.°

L'argent fut vitrifié à la sixiéme projection.

5.

Le cuivre rouge commença se fondre lorsque la sixiéme dose touchait à sa fin & fut entiérement fondu avant que la septiéme eut cessé de fuser.

6.°

La limaille de fer parut former un amas informe à la dixiéme dose, mais le fond du creuset fut alors percé par un trou, d'où la flamme sorrait avec une grande impétuosité, son diamétre était de trois lignes, & sa figure paraîssait tout-à-fair uniforme & circulaire.

53 Quoique le dégrés de chaleur ou le feu actuel soit le principal agent dans ces expériences j'avais cependant assés de fondement pour croire, que le souffre y contribuait aussi considérablement, c'est pourquoi j'ai voulu les réitérer de la même maniére en employant un mêlange où il n'en entrait point, & j'ai en effet trouvé quelque différence dans la facilité de la fusion, principalement pour la limaille de fer,

fer, & le cuivre car ils tardaient plus long-tems ; au contraire quelque autre tel que la monnoie ſe fondait plus vite, & l'argent était de même plus facilement vitrifié.

54 Je ne me contentai pas de ces deux procédés je voulus voir encor ſi je pouvais obtenir les mêmes effets pas la ſimple communication de la chaleur, & je mis pour cela les lames dans un creuſet ſuſpendu au deſſus d'un petit baſſin dans lequel je faiſais les projection du mélange ; on ſent aſſés que je fus obbligé d'employer beaucoup plus de poudre, mais malgrés mes ſoins celui de la limaille de fer ne put plus avoir lieu ; je dois cependant avertir que dans ce cas les effets ſont plus prompts ſi on emploit un mélange ſans ſouffre.

55 Je fis enfin une derniére tentative en mettant dans un petit pot (dont l'ouverture était beaucoup plus petite que le ventre & la baſe) une pâte faite avec du ſalpêtre du charbon & un peu d'huile d'olive (*a*), cette compoſition enflammée j'en réverberai la flamme avec un ſoufflet & une lame d'argent plus épaiſſe encore des précédentes fut vitrifiée à la ſeconde doſe, qui était de même que la prémiere d'une demi once comme j'avais toûjours fait.

56 Tout ce que je viens d'expoſer ſur l'intenſité du feu de la poudre ſert à nous faire voir qu'elle peut être augmentée en différentes maniéres juſqu'à l'infini, & nous n'en devons être nullement étonnés, car en conſidérant toutes les circonſtances dont cette flamme eſt toûjours accompagnée nous voyons diſtinctement tous les caractéres du feu le plus violent ; en effet la viteſſe ou la rapidité avec laquelle les parties inflammables ſe communiquent le feu ; la grande réſiſtance que lui oppoſent en conſéquence les parties de l'air

(*a*) Il eſt à propos de faire obſerver que cette pate doit être expoſée pendant quelque tems à un feu lent, pour qu'une partie de l'huile puiſſe s'évaporer, car il y en a toûjours de reſte.

l'air qui en en empechant une trop grande dilatation ſervent à en augmenter la denſité, le dévéloppement ſucceſſif du fluide par lequel ſon mouvement eſt accéléré, ſont tous des ſignes non équivoques de l'activité qui le caractériſe; & c'eſt préciſément à cauſe de la rapidité prodigieuſe avec laquelle ſes parties inflammables ſe détruiſent que le corps ambiens ne peuvent aquérir ſi aiſément un ſi grand dégré de chaleur.

57 Voila un précis de mes recherches ſur ce ſujet, on pourrait aſſûrément le traiter plus métodiquement & lui donner baucoup plus d'étendue; mais les ſoins & le tems qu'exigent de tels eſſais peuvent être employés plus avantageuſement par quelque Artiſte ingenieux qui ſoit dans le cas d'en tirer parti; car quoique la choſe ne préſente en elle-même au prémier coup d'œil rien d'extraordinaire, elle pourra peut-être par cette même raiſon fournir dans le détail des circonſtances dignes d'attention: je n'avance ceci qu'autant que me le permettent les obſervations paſſagéres que j'ai pû faire ſur les faits particuliers que j'ai expoſé; d'ailleurs perſonne que je ſache ne s'eſt encor attaché juſqu'ici à faire un tel examen, & ſi l'exactitude dans le procédé ne répond pas à la grandeur du ſujet c'eſt parceque en prémier lieu il ne tient que par incident à celui que j'ai eu en vûe, & en ſecond lieu pour les motifs dont j'ai rendu compte; il me ſuffit pour le préſent d'en avoir donné le prémier un eſſai, & je paſſerai maintenant à expoſer les phénoménes que j'ai obſervé ſur quelques ſortes de vapeurs qui m'ont fait douter de l'étendue qu'on donne à la doctrine de l'abſorbtion de l'air.

58 L'objet que nous allons donc prendre à tache annonce l'intéret qu'on doit avoir à le ſuivre de prés: il s'agit d'une doctrine qui ſert a rendre raiſon de baucoup de phénoménes ſurprenans, dont la ſolution ſerait obſcure & peut-être inconnue ſans ſon ſecours, elle eſt d'ailleurs

géné-

généralement adoptée, & j'ai même lieu de penſer qu'on y a recours avec un peu trop de facilité : l'aſſertion des Savans les plus diſtingués, & les expériences ſur leſquelles ils ſe ſont appuyés & dont ils nous ont donné le détail paraiſſent nous mettre en droit d'y puiſer les explications les plus heureuſes & les plus faciles, malgré tous ces avantages j'ai obſervé que toutes les vapeurs, auxquelles on a attribué la propriété d'abſorber & de fixer l'élaſticité de l'air, n'en ſont pas effectivement doüées, & il m'a paru d'entrevoir que la méthode dont on a fait uſage dans cette eſpéce d'annalyſe eſt ſujette à quelques inconveniens, de la viennent les équivoques qu'on peut avoir pris : c'eſt ce qui m'a engagé à dire quelque choſe ſur ce ſujet, me reſervant à le traiter à part une autre fois avec plus d'étendue, en attendant quelques réflexions & des procédés plus circonſpects nous mettront en état de juger de la foi que nous devons prêter à ces ſortes d'expériences : je ne prétens pas refuter toute abſorbtion, mais ſeulement faire voir qu'il y a des vapeurs qui pourraient ſembler en être la cauſe quoiqu'elles ne le ſoient pas en effet.

59 Les procédés, que tous les Auteurs plus reſpectables (*a*) ont réguliérement ſuivi pour faire les expériences ſur l'abſorbtion de l'air, ſont ceux, de la combuſtion, de la diſtillation, de la fermentation des ſubſtances, ou des effervéſcences que produiſaient leur mixtion ; l'eau eſt le milieu qui ſervait à intercepter toute communication entre l'air commun des vaiſſaux, & celui de déhors ; dans celles qui ſe faiſaient par la combuſtion & la fermentation (*b*), on plaçait les matiéres toutes enflammées ou en fermentation

(*a*) Halles, Muschembroeck, Hauksbe'e, &c.

(*b*) Telles que les méches ou les chandelles allumées : le ſaffran de Mars fait avec la limaille de fer le ſouffre & l'eau ; le ſel volatil d'ammoniac fait avec la chaux, &c. car on ſait qu'à peine ces ſubſtances ſont mélées il s'éleve auſſitôt des vapeurs, &c.

tion ſous les récipiens, de ſorte que la quantité d'air abſolu qui s'y trouvait était moindre de la quantité qu'il y en aurait eu ſi on les avait enflammé par quelque moyen dans le vaiſſeau même, toute communication étant ôtée, ou ſi on les eut avec cette précaution diſpoſées à la fermentation.

60 Une autre circonſtance dont je n'ai pas encor pû m'aſſûrer parfaitement, mais que j'ai aſſés de fondement pour ne devoir pas diſſimuler, puiſqu'elle peut toute ſeule rendre douteux les réſultats des expériences, c'eſt qu'il m'a paru de voir que l'air étant beaucoup raréfié peut s'inſinuer dans les parties de l'eau, de façon que bien des fois l'abſorbtion ſerait l'ouvrage du milieu qui doit intercepter: quoique on n'ignore pas que l'eau peut ſe charger d'air on ſait auſſi qu'elle ne peut en recevoir qu'une quantité déterminée, mais j'ai eu occaſion d'obſerver comme je l'ai dit que cette vérité peut ſouffrir des reſtrictions.

61 Voici l'expérience qui m'a donné lieu de penſer ainſi.

Expérience.

J'ai plongé dans un vaiſſau de la hauteur de deux pieds environ un tuïau de verre de ſix pieds de long, & du diamétre aumoins de ſix lignes auquel on avait hermétiquement ajoûté un flacon, ou qui était garni d'une boule ſoufflée dans le même verre & qu'on avait précédement approché du feu pour en chaſſer une partie de l'air avec plus d'aiſance; dès que la machine avait aquis la température & que l'eau était montée à une ſtation fixe dans le tuïau je marquais avec un fil ciré le point d'élévation, & comme on ne pouvait pas approcher de la boule, même à quelque diſtance ſans cauſer quelque raréfaction à l'air qui y était contenu, & faire par conſéquent baiſſer l'eau dans le tube, je laiſſais derechef repoſer la machine pendant quelque tems en m'en éloignant comme auparavant, & j'examinais enſuite ſi le fil répondait avec préciſion au nivau de l'eau, toutes ces

précautions étant prises j'approchais une flamme par dégrés de la boule, & aussitôt qu'elle était un peu échauffée & qu'elle ne risquait plus de se fendre je lui ai fait subir une chaleur telle qui fit précipiter la dépression de l'eau, laquelle cependant n'atteignit point à l'extremité du tuïau, afin que l'air n'en fut point chassé : je m'écartai pour lors de la machine de même que j'avais fait auparavant & j'ai vû quelque tems après l'eau s'élever dans le tube au-dessus de la marque que j'avais fait.

62 Cette expérience quoique très-simple exige beaucoup de circonspections & de soin, outre ceux que nous avons déja suggerés il est bon d'ajoûter, qu'il faut la faire dans une chambre où les variations dans l'atmosphére ne soient pas si sensibles, il n'y faut pas du feu, ni qu'elle soit fort ventilée, on ne s'y arretera qu'autant qu'il est indispensable, il faut y laisser le flambeau allumé jusqu'à ce qu'on ait fini d'observer ; on doit enfin avoir un barométre & un termométre fort exacts pour plus grande sûreté ; cependant malgré toutes ces précautions, elle ne réüssit pas toûjours, apparemment à cause de la facilité de l'eau à se mouvoir & que souvent les variations peuvent se compenser, elle a neanmoins réüssi vingt fois pour une ; avec tout cela je me reserve à faire d'ultérieures observations.

63 Ce que nous venons de dire suffit pour nous convaincre que cette méthode est incertaine & même insuffisante, pour faire ces sortes d'expériences, puisque elle peut aisément induire en erreur, car ne sachant pas de combien l'air a été raréfié dans le tems qu'on a intercepté la libre communication entre celui qui est enfermé dans les vaisseaux & l'extérieur, ignorant la quantité qui peut s'en être insinué dans l'eau, on ne peut dire avec fondement qu'il y ait eu d'absorbtion : quelques substances que j'ai soumis à un procédés plus simple, & qui réduites en vapeurs, n'ont point absorbé d'air, quoique traitées de la maniére qui a été adopté

jusqu'

jusqu'ici, passent généralement pour avoir une telle propriété, à servi à me confirmer dans les soupçons que j'avais formé.

64 Je commencerai par rendre compte de la maniére dont je m'y suis pris pour obtenir le même effet en les assujéttissant à un procédé délivré de tout équivoque, ce détail sera suivi de celui des substances que j'y ai soumis, & de ce qui en est résulté.

65 Je mettais les substances qui devaient être enflammées dans des flacons par le moyen d'un bout de tuïau de communication, qui était hermétiquement attaché à côté de leurs cols, & dont l'extremité était jointe de la même maniére à un long tuïau courbé en forme de baromètre qui contenait du mercure & servait à en faire les fonctions; suivant l'espéce de flamme qui devait s'y exciter, & le moyen que je devais employer à cet effet, je laissais tout l'air dans la capacité où j'en faisais sortir une partie, en me servant du feu comme j'ai déja dit; l'ouverture latérale par laquelle j'avais mis les substances étant bouchée avec de la cire d'Espagne, j'excitais la flamme ou avec le miroir ardent comme pour le souffre, ou avec une flamme, je conservais ensuite ces machines en les examinant plusieurs fois le jour, & j'avais mis au même endroit un baromètre, un termométre & un flacon fermé, & portant à son extremité un tuïau recourbé avec du vif argent ce qui faisait une même machine & dans le fond un baroscope.

66 Comme je ne pouvais pas entreprendre un travail de longue haleine, je me suis contenté de choisir le souffre, la poudre & de la méche pour voir ce qui leur arrivait; j'enflammai le souffre avec une lentille, & j'ai vû de même qu' Olaus Borrichius une fumée qui passait au travers des porres du verre à l'endroit où tombent les rayons rassemblés par le foyer, mais le mercure ne fit plus aucun mouvement depuis que l'air du flacon fut refroidi; dans celui où j'avais mis deux grains de poudre j'avais environ

quattre pouces de moins d'air, je la mis en feu à l'aide de la flamme d'un flambeau, & après une demi heure environ aiant marqué le point d'élévation, le vif argent fut immobile, jusqu'à ce qu'il arriva des variations dans l'atmosphére; la même chose est succedée aux méches.

67 Je n'en donne pas d'avantage pour le préſent faute de tems: quant à ce qui regarde les chandelles allumées, M.R le D.R CIGNA notre ami & savant confrére rapportera les expériences que nous en avons fait; si mes devoirs me le permettent je me propose de faire des nouvelles recherches sur ce sujet, de renouveller les expériences qui semblent plus rigoureuses, & particuliérement le Chap. VI. de la Statique des Végétaux, digne ouvragre du Célébre feu M.R HALLES.

68 La délicatesse du sujet ne me permet pas d'ailleurs de dissimuler, que l'on ne saurait être assés sur ses gardes pour obvier aux moindre petits inconveniens, car ils deviennent très-essentiels: en effet avec quelle facilité l'air ne se rarefie-t-il pas? & son élasticité augmentée fait qu'on ne peut pas s'appercevoir que la quantité absolue dans la même capacité est diminuée, ces réflexions posées on conviendra de la facilité qu'on peut avoir à se tromper.

CHAPITRE V.

Examen de la Poudre sans Souffre.

69 CE Chapitre est particuliérement déstiné à quelques réflexions sur l'usage que l'on peut faire dans la pratique de la poudre sans souffre. J'avais déja établi dans mon second Mémoire quèlques uns des principes sur lesquels elles sont appuyées, je pense qu'en y joignant ce qu'on lit dans le Chap. 2.d & 3.e de celuici nous pourrons être en état d'apprécier d'avance les effets qu'on en doit attendre, sans se jetter aveu-

aveuglément dans des eſſais toûjours couteux & trop incertains quand ils ne ſont pas appuyés ſur la théorie. Je dois au reſte avertir ici que l'Auteur de l'article *feux artificiels* dans l'Encyclopédie eſt le prémier qui ait propoſé d'appliquer cette poudre à l'uſage de l'Artillerie; je l'ignorais quand j'écrivis mon ſecond Mémoire, & je n'ai pû en faire mention que dans une note: je ſuis au reſte bien éloigné de lui accorder tous les avantages que cet Auteur ſemble en attendre.

70 Il ſuit à la vérité de ce que nous avons dit juſqu'à préſent qu'on peut avec une moindre quantité de cette poudre que de la commune chaſſer un projectile juſqu'à une diſtance donnée, ce qui peut faire une différence aſſés conſidérable dans la conſommation de la poudre, & plus encore dans la dépence, puiſque toute choſes d'ailleurs égales cette eſpéce de poudre eſt moins diſpendieuſe. Si cependant on réflechit ſur la cauſe de la plus grande force de cette poudre on verra bientôt qu'il réſulte de cet avantage même des inconveniens aſſés conſidérables.

71 La force de la poudre en général ne peut dépandre que de la quantité du fluide qui s'en dévéloppe, & de la plus grande viteſſe & ſimultanéité avec lequel ſe fait ce dévéloppement. Chap. 2.d §. 39. 40. On voit aſſés que la ſupériorité de cette poudre ſur l'autre ne peut dans le cas dont il s'agit être l'effet d'une plus grande quantité de fluide, puiſque le ſalpêtre ſe trouve dans cette charge en moindre quantité que dans l'autre: elle dépand donc abſolument de la plus grande viteſſe avec laquelle ſe fait la propagation du feu & le dévéloppement du fluide Chap. 2.d §. 38. enſorte que dans le cas d'un effet conſtant les quantités des différentes poudres doivent en quelque ſorte être en raiſon inverſe de cette même viteſſe.

71 Cela poſé le dérangement dans la direction ou dans le pointement d'une piéce d'Artillerie ne pouvant être occaſioné

ſioné que par l'action du fluide élaſtique qui fait par ſon dévéloppement reculer le canon dans une ligne différente de la direction qu'on lui avait donné, ſoit à cauſe de l'irrégularité de la piéce plus riche de métal d'un côté que de l'autre, ſoit par l'imperfection des roues, de la platte forme ou de quelque autre cauſe ſemblable : il eſt aiſé de voir que ces dérangemens ſeront plus conſidérables dans le cas d'un dévéloppement plus prompt.

73 En effet en ſuppoſant que l'action des deux charges, ou la viteſſe qu'elles impriment au boulet ſoit la même il eſt évident que ſi le canon ne ſouffrait pas dans ſon recul la réſiſtance du frottement, il eſt évident dis-je que les dérangemens dans la direction ſeraient abſolument les mêmes : mais il n'en va pas ainſi ſi nous voulons faire attention à ces réſiſtances, car l'expreſſion de l'élément de la viteſſe avec laquelle la piéce eſt pouſſée en arriére n'eſt plus alors proportionel à la preſſion qu'exerce ſur elle le fluide élaſtique, mais à cette même preſſion diminuée d'une autre quantité qu'on peut ſuppoſer proportionelle à la viteſſe du recul à chaque inſtant : or ſi dans cette hipotéſe on cherche au moyen du calcul intégral l'expreſſion générale de cette viteſſe, en faiſant, comme la nature du Problème le requiert, que cette viteſſe fut la même quand le fluide élaſtique ceſſe d'agir ſur le canon, fuſſe la même dis-je quelle que ſoit l'élaſticité du fluide, ou ce qui revient au même qu'on ſuppoſa que cette viteſſe doit être la même ſi on n'a pas égard aux réſiſtances, on la trouvera toûjours plus petite quand l'élaſticité eſt moindre (*a*) d'où il eſt aiſé de conclure

(*a*) Une réflexion bien ſimple pourra aider à concevoir ſans calcul cette vérité. (Fig. I. Pl. I.) Quelle que ſoit la loi du dévéloppement du fluide élaſtique il eſt viſible que les viteſſes des boulets chaſſés par les deux différentes charges pourront à chaque inſtant être répréſentées par celle de deux corps qui déſcendraient librement le long de deux courbes quelconques AG, AQ; & que puiſqu'on ſuppoſe les deux portées égales

clure que le recul & par conſéquent le dérangement du pointement ſera toûjours plus grand pour une poudre plus violente quoique les portées ſoient égales.

74 Il eſt évident que ce que nous venons de dire peut également s'appliquer au cas où le bouchon introduit dans le canon avec violence fait une plus grande réſiſtance au fluide, un autre inconvenient fort conſidérable dont nous avons fait mention plus haut, Chap. 1.r p. 102. en note c'eſt le péril de faire crever plus facilement les piéces en ſe ſervant de la poudre ſans ſouffre, je me contente pour cela de renvoyer à l'endroit cité.

75 Je paſſe à décrire les défauts de cette poudre qui ne dépandent pas comme ceux dont nous venons de parler de la force avec laquelle elle ſe dévéloppe, mais plûtot de la nature des principes dont elle eſt compoſée. Pluſieurs expériences que j'ai fait ſur cette poudre à différentes repriſes & par des méthodes diverſes m'ont convaincu qu'elle s'enflamme baucoup plus difficilement que la poudre commune, M.r le Marquis BIRAGUE dont la ſagacité & ſurtout l'amour

égales ces courbes doivent être terminées par l'horizontale BQ. Il eſt encor évident que ſi l'on fait abſtraction du frottement, les viteſſes du canon dans ſon recul à chaque inſtant ſeront proportionelles à celle des boulets, & par conſéquent encor à celles des corps qui déſcendent dans AG & AQ. Cela poſé pour trouver quels changemens le frottement peut cauſer aux viteſſes des reculs dans ces deux cas. Imaginons que ce ſont ces corps eux-mêmes qui éprouvent cette réſiſtance dans leurs mouvement ſelon AG & AQ, & ſuppoſons pour un moment qu'ils aïent une viteſſe égale aux points D, E (ſuppoſition qui eſt vraie en effet pour le point A où la viteſſe des deux corps eſt nulle) il eſt clair en tirant là *c e* infiniment proche de CE que les réſiſtances qu'éprouvent ces corps étant proportionelles aux viteſſes & par conſéquent égales en DE elles agiront plus ſur le corp qui ſe meut ſelon AQ, puiſque E*e* > D*d*. Donc la viteſſe du corps qui ſe meut dans AQ ſera toûjours plus petite dans le cas du frottement, que celle qui ſe meut dans AG quand tous les deux ſeront parvenus à une horizontale quelconque BQ; & par conſéquent quand l'action des fluides ceſſera entiérement ſur le canon, la viteſſe du recul ſera plus petite quand la charge ſera plus lente à ſe décompoſer, même dans le cas où ces reculs ſeraient égaux en faiſant abſtraction de ces réſiſtances, & c'eſt là à peu près le cas que nous avons ſuppoſé des deux portées égales.

l'amour des sciences sont assès connus a été présent à plusieurs des essais que j'ai fait sur cette matiére. Il est vrai qu'on pourrait en quelque sorte remedier à cet inconvénient en se servant d'un charbon plus léger, mais il est facile de s'appercevoir qu'étant dans ce cas nécessaire d'employer une plus grande quantité de charbon pour procurer l'entiére décomposition du salpêtre, cette poudre perdrait alors beaucoup de cette force, qui fait son unique mérite. On déduit facilement de là que la force de la poudre est toutes choses d'ailleurs égales toûjours proportionelle à la plus prompte décomposition du salpêtre, & par conséquent à la difficulté qu'elle a de prendre feu (*b*).

76 On sait combien le grainage est nécessaire à la poudre en général pour l'usage de faction & celleci le soutient difficilement, car quoique on ait différentes méthode de la rendre propre au grainage elles sont toutes impraticables en grand (*c*).

77 En-

(*b*) Comme le charbon n'est composé que par l'union d'une substance inflammable à des parties terrestres, il s'ensuit naturellement que la différence dans la qualité du charbon consiste dans le rapport où ces substances se trouvent combinées entr'elles: cela posé il en doit résulter des différences dans l'inflammabilité & dans l'action qu'il peut exercer sur le salpêtre, d'où il est évident qu'il doit s'en trouver une espéce, telle où ces deux propriétés soient les plus grandes possibles; & ce serait celle qui servirait avec plus de succès dans les armes à feu, l'expérience peut l'assigner avec facilité; d'ailleurs il n'est pas moins aisé de déterminer par ce moyen celle qu'on doit préférer dans les différens usages qu'on se propose. La quantité de charbon nécessaire pour procurer la totale décomposition d'une quantité de salpêtre doit donc être déterminée rélativement à sa qualité.

(*c*) Casimir Simienowicz dans son Grand Art de l'Artillerie rapporte la méthode dont les Payſans Cosaque sont usage pour construire la poudre. Elle consiste à mettre les doses convenables de salpêtre, de soufre & de charbon dans un pôt avec de l'eau qu'on fait bouillir jusqu'à ce que les substances soient épaissies par l'évaporation de l'eau; ils passent ensuite cette pâte au tamis & la réduisent en grains. Cette manœuvre il faut l'avouer est fort commode, parceque on peut faire de la poudre en fort peu de tems & on peut épargner les moulins, de même qu'un nombre d'opérations qui sont indispensables dans celle qu'on fabrique communément, mais elle est sujette à des grands inconveniens: car on ne peut la faire en prémier lieu qu'en petite quantité,

77 Enfin cette poudre attire d'avantage l'humidité de l'air inconvenient très-conſidérable ſans doute, puiſqu'elle eſt par là incapable d'être conſervée long-tems dans les magaſins. D'ailleurs elle ſalit & ronge extrémement les armes à feu, parcequ'il réſulte de ſa décompoſition un alkali fixe qu'on ſait être un des corroſifs les plus violens, & qui lorſqu'il s'humecte à l'air, ronge avec promptitude & avec une grande facilité les métaux.

78 Il ſerait donc néceſſaire d'ajoûter à la poudre ſans ſouffre une ſubſtance, qui dans le tems de ſa décompoſition, ſe ſaiſit de cet alkali & forma avec lui une ſubſtance neutre: or c'eſt préciſément une des fonctions du ſouffre dans la poudre commune, qui ſert auſſi à la délivrer par ſa viſquoſité de l'inconvenient d'attirer ſi facilement l'humidité de l'air, ce qui comme nous l'avons vû plus haut eſt un des défauts les plus eſſentiels de la poudre ſans ſouffre.

79 Répiloguons enfin ici les raiſons que nous venons de rapporter pour préférer la poudre dont on ſe ſert aujourd'hui à celle

& en ſecond, parceque par une manœuvre telle que nous venons de l'expoſer, la poudre que l'on fait eſt baucoup moins forte, & la manufacture en eſt plus dangereuſe, outre qu'elle requiert plus de ſoins & de circonſpection de la part des Ouvriers, & je crois auſſi que la main d'œuvre en ſerait plus couteuſe; ſans entrer cependant dans des telles diſcuſſions, je donnerai un détail des moyens dont je me ſuis ſervi pour délivrer cette méthode de ſes inconveniens, laiſſant à part celui de la manufacturer en grand, puiſque la choſe eſt abſolument incompatible. Prémierement au lieu d'eau j'ai une fois ſubſtitué du vinaigre, & une autre fois de l'urine, parceque principalement le vinaigre ne fait pas une diſſolution intime du ſalpêtre comme fait l'eau, & attaque plûtôt le charbon, de maniére que le mélange eſt plus exact & uniforme, car les ſubſtances ne peuvent pas ſe ſéparer ſi aiſément: le vinaigre enſuite contenant du phlogiſtique loin de délayer celui du charbon contribue en quelque façon à le rendre meilleur; la même choſe à lieu avec l'urine. Mr. le Chev. de Robtlant Major d'Artillerie & Inſpecteur Général des Mines de S. M. dont le mérite, le ſavoir & l'aſſiduité avec laquelle il cultive les différens genres des ſciences ſont également reconnus, m'a communiqué des vûes qu'il avait formé ſur ce ſujet, qui ne pourraient être que fort utiles & inſtructives, & il eſt porté à croire qu'on peut ſe ſervir avec ſuccès du vinaigre pour humecter la poudre lorſqu'on la manufacture dans les moulins; quant

celle que nous venons d'examiner, & soumettons-les d'un coup d'œil au jugement du Lecteur éclairé & impartial.

8o En prémier lieu le soufre par la facilité qu'il a de s'enflammer la rend plus propre à l'usage de toutes les armes à feu, & si son dévéloppement est moins prompt c'est moins un défaut dans presque toutes les circonstances qu'un avantage réel puisque nous avons fait voir qu'un dévéloppement trop simultané ruine facilement les armes à feu, & rend les pointemens trop incertains ; il empeche outre cela l'action de l'alkali fixe, sur les métaux dont elles sont faites, en formant avec lui lors de la décomposition du tartre vitriolé (*d*); enfin le soufre par sa visquosité rend le grainage facile à se faire & à se soutenir, & empeche la poudre d'attirer trop facilement l'humidité de l'air, ce qui la rend supérieure à la poudre sans soufre, même pour l'usage des mines où les autres inconveniens de cette derniére pourraient être considérés comme des avantages réels.

à moi je conviens non seulement avec lui pour le vinaigre en particulier, mais j'opine pour tous les liquides qui contiennent du phlogistique & dont la partie aqueuse peut s'évaporer avec facilité ; quoique en puisse dire quelque Praticien par *routine*. 2. Je ne voulus pas me servir d'un trop grand dégré de chaleur dans l'évaporation, parceque la séparation des deux composans aurait été par là facilitée, & je mis à cet effet une fois le pôt au bain marie de 60 à 70 dégré de Réaumur; & une autre le petit chaudron fut mis à feu nud avec un termométre qui en touchait le fond &c.; 3. je broyai aussi sans discontinuer les substances avec une éspatule de bois, & lorsque la matière était bien épaissie, je levais le chaudron du feu en continuant à broyer jusqu'à ce que la pâte me parusse suffisamment déssechée & propre au grainage, je l'étendis pour lors sur une planche & je la passai ensuite au tamis ; les poudres sans soufre que j'ai fait de cette façon étaient pour le moins aussi fortes que celle que j'ai fait en la broyant sur une pierre comme dit Mr. PERRINET d'Orval, où en la faisant piler pendant dix heures dans un mortier, elle avait même l'avantage de soutenir mieux son grainage, & je ne me suis apperçu d'aucune différence assès considérable, quant à cette propriété, entre celleci & la commune ; mais nous en reviendrons toûjours à conclure, que cela ne pouvant se faire qu'en détail, & eu égard à quelques réflexions que nous avons déja fait, elle ne parait pas propre à l'usage ordinaire.

(*d*) Loin d'obvier avec cette poudre à l'évasement des lumiéres comme je l'avais soupçonné. Mém. second p. 145. §. 57. on le facilite, ainsi que nous venons de le voir.

JOHAN-

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

De frigore ex evaporatione, & affinibus phoenomenis nonnullis.

DE thermometrorum variis liquoribus madentium refrigeratione ex inflato vento nonnulla in superiore Tomo protulimus (*a*) eorum neſcii, quae jamdudum celeberrimus CULLEN hoc in argumento praeſtiterat; qui non modo egregiis experimentis doctrinam hanc ornavit, verum etiam hujuſmodi phoenomenorum cauſam ingenioſe eſt aſſecutus. Hujus ego luculentiſſimam, quam poſtea cognovimus, theoriam (*b*) cum noſtris experimentis contuli; & nonnulla in his, cum minus forte accurate peracta, tum novam in hac diſquiſitione viam patefactam eſſe intellexi. Quare opportunum duxi in eadem experimenta operam diligentiorem impendere, quaeque mihi obſervare contigit, ea hic exponenda adgredior.

1. Obſervavit clariſſimus CULLEN non aqua ſolum (quod a MERANO fuerat animadverſum (*c*)) ſed & aliis liquoribus, qui cum ambiente ad eumdem caloris gradum compoſiti eſſent, perfuſa thermometri bulla, liquorem in thermometro deprimi, & tamdiu deprimi, quamdiu thermometri bulla exſiccata ſit, tumque, ſi iterum madefiat, adhuc inferius deſcendere (*d*), eoque magis, caeteris paribus, quo magis liquor, quo bulla perfunditur, volatilis eſt (*e*), & deſcen-

(*a*) In comment. pag. 20. 21.
(*b*) In ſpecimin. obſerv. phyſic. & litterariar. Societ. Edimburg. edit. anno 1756. tom. 2. pag. 145. quam diſſert. gallic. primum vertit. Cl. Roux in lib. cui tit. *Recherches hiſtoriques & critiques ſur le refroidiſſement des liqueurs.* Egregius hic liber ſub finem anni 1759. nobis demum notus fuit cum ſub initium ejuſdem anni ſpecimina noſtra edita fuiſſent.
(*c*) In diſſert. de Glacie edit. 1749.
(*d*) Recherches pag. 97. & ſequent.
(*e*) Ibid. pag. 99. 100. 101.

deſcenſum majorem eſſe in vacuo, quam in aperto aëre, ex quibus non immerito concluſit liquoris thermometrici deſcenſum ex evaporatione repetendum eſſe, eamque non ſolum vento accelerari, & augeri (*f*), ſed & in rariori aëre majorem eſſe, cum ibidem liquor thermometri magis deprimatur (*g*).

2. Qua tamen in re exceptionem hanc laudatus Auctor adnotavit, quod acida mineralia *concentrata*, quibus thermometrum madefit, non modo liquorem in tubo non deprimerent, quinimmo valde elevarent; idque ex *concentrati* acidi cum humido aëreo calefactione repetendum exiſtimavit (*h*), cum obſervaverit eadem acida duplo aquae dilutą contrarium effectum praeſtitiſſe (*i*); quae quidem Cl. Viri ſententia experimento a nobis allato confirmari videtur: obſervavimus namque oleum tartari *per deliquium*, quod nec humidum aëreum abſorbere, nec niſi difficillime correptam aquam per vapores dimittere poteſt, thermometro nullam mutationem induxiſſe. Equidem narravimus olea tum expreſſa, tum ſtillatitia thermometri liquorem ad majorem altitudinem elevare; at poſtquam in Cullen experimentis olea etiam ſtillatitia (*k*) liquoris thermometrici deſcenſum praeſtitiſſe novimus, repetitis majori diligentia experimentis, & ſenſibilioribus thermometris adhibitis (*l*) experti revera fuimus ab oleis quoque eſſentialibus liquorem thermometricum deprimi, minus tamen, quam ab alio quovis liquore

(*f*) Si humida thermometri bulla vento ejuſdem temperaturæ exponeretur liquorem in tubo deprimi docuerat olim Musschembroeck *eſſai de phyſique* §. 962. quæ jam ab anno 1739. gallico ſermone converſa, & edita fuerant.
(*g*) Recherches pag. 104. 105.
(*h*) Ibidem pag. 102.
(*i*) Ibidem loco cit. fere majus frigus quam aquam excitaſſe; non vacavit explorare, an minus dilutum eumdem effectum productarum eſſet pag. 102.
(*k*) Recherches pag. 100.
(*l*) Thermometro aëreo Cullen uſus eſt pag. 99.

quore (ut laudatus Auctor adverterat), olea autem expressa vix ullam mutationem parere, maximeque dubitandum esse ne alias observata elevatio, tum adhibiti olei *essentialis* vetustati, tum alicui, ex ejus, qui follem agitat, propinquitate communicato calori, adscribenda sit (*m*), ut propterea expressa olea, quae nihil evaporant (*n*) thermometrum non immutent, quod cum CULLEN theoria egregie consentit.

3. Caeterum calorem thermometri acido minerali aspersi ex absorpto humido aëreo produci multa confirmant. Et primo quidem, ut GOULDIUS ostendit, acida *concentrata* in vasis apertis aëri exposita, pondere augentur (*o*), quod ponderis incrementum non aliunde, quam ex absorpto humido atmospherico repeti potest; & quemadmodum pondus paullatim minus augescit, prout humido atmospherico eadem acida saturantur, ac tandem omnino augeri desinit, ita immersa thermometra in acida concentrata majorem in his, quam in ambientibus corporibus calorem ostendunt, qui tamen paullatim imminuitur, ut tandem ambientium corporum calori exaequetur, quod facile est experiri. Acida demum mineralia eo magis intra datum tempus pondere augentur, quo ampliorem habent superficiem aëri expositam (*p*); ita oleum vitrioli, quod in vase cylindrico aperto quatuor tantum gradibus immersum thermometrum calefaciebat, educto thermometro, ut jam per amplam bullae thermometricae superficiem adhaerens oleum ad aërem

(*m*) Thermometrum spirit. vin. aceto, lacte, aqua aspersum refrigerari donec bulla exsiccata sit, contra aspersum oleo olivarum, aut lini calefieri, se observasse affirmat Anonimus ad Auctorem *Du London Kronikle*, & prioris phoenomeni causam perspicuam esse, nempe evaporationem, alterius obscuram. Vid. *Journal Etranger Janvier* 1761. *Nouvelles d'Angleterre* §. 8. *pag.* 110.

(*n*) Diutissime aëri exposita ponderis jacturam ex evaporatione nullam patiuntur. Vid. *Encyclopéd. article* Evaporation.

(*o*) Transf. philosoph. anni 168. $\frac{3}{4}$ n. 156. art. 3.

(*p*) Ibid.

rem pateret, ſeptem inſuper gradibus ipſius calorem augebat; ex quo patet eadem lege acida mineralia a contactu aëris calefieri, qua pondere augentur; proindeque aucti caloris eamdem cauſam eſſe, ac aucti ponderis, abſorptum videlicet aëris humidum (*q*), & ex hac quidem ſola cauſa pyrophori hombergiani incenſionem repetendam eſſe nuper Vir Cl. demonſtravit (*r*).

4. Ex allato ſimpliciſſimo experimento, quod acida *concentrata* ex aëris humido incaleſcant, miri cujuſdam phoenomeni ratio eruitur olim a GEOFROIO propoſiti (*ſ*), quod nempe, ſi oleum vitrioli in ſalem ammoniacum infundatur, efferveſcentia contingat, ex qua immerſum thermometrum refrigeretur, intereadum thermometrum miſcelae vaporibus expoſitum admodum incaleſcit; notum ſiquidem eſt ex hac miſcela acidum marinum extricari eo magis *concentratum*, quo oleum vitrioli eſt vehementius (*t*). Itaque ex hujuſmodi acido marino in vapores abeunte, & ex atmoſpherae humido incaleſcente ſuſpenſi thermometri calor eſt repetendus. Et revera experiundo didici calorem eo ſemper minorem eſſe, quo adhibitum oleum minus eſt *concentratum*, ut tandem ex oleo aqua prius ſaturato in ſalem ammoniacum immiſſo halitus erumperent, abſque ullo ſenſibili calore; cum nempe ex acido marino diluto hujuſmodi halitus fierent, quod cum atmoſphaerae humido incaleſcere non poterat.

5. Ad refrigerationem immerſi thermometri, quod ſpectat, eamdem ſolutioni ſalis ammoniaci in aqua olei vitrioli adſcribendam eſſe multa ſuadent (*u*). Nam primo exper-

(*q*) CULLEN in perfecto vacuo experimentum inſtituere decreverat, ut quaeſtionem accurate reſolveret pag. 102.

(*r*) SUVIGNY Mémoires de Mathématiques & de Phyſique, préſentés à l'Académie des Sciences tom. 3. pag. 180. & ſequent.

(*ſ*) Mémoires de l'Académie 1700. pag. 113.

(*t*) MAQUER Chymie pratique tom. 1. pag. 123. tom. 2. pag. 536.

(*u*) Generatim acidorum mineralium refrigerationem ex admixtis ſalibus variis ab eorumdem ſalium ſolutione in aqua, qua acida diluuntur, repetendam eſſe opinatus eſt. Cl. ROUX p. 42. 43.

expertus ſum, quo oleum vitrioli aquoſius eſt, caeteris paribus, eo majorem exoriri frigoris gradum; contra ſi ſumme concentratum ſit, non frigidam, ſed calidam effervescentiam cum ſale ammoniaco efficere, quod & ab aliis jampridem indicatum videtur (*x*). Deinde ſales alii, alkalici volatiles (*y*), nitrum (*z*), aliique uno verbo omnes, qui aquam refrigerant, oleum vitrioli dilutum ſimiliter refrigerant; *concentratum* calefaciunt, ut tamen, quo frigori cum aqua faciendo minus apti ſunt, quam ſal ammoniacus, eo etiam dilutius oleum vitrioli expoſtulent, ut cum eodem frigus producant (*a*). Caeterum frigus in propoſito experimento ex effervescentia neutiquam eſſe videtur; ſiquidem non ſolum gignitur a ſalibus, qui cum acidis effervescunt, verum etiam ab iis, qui hac dote carent (*b*), id equidem prae-

(*x*) „ Ab excellentibus, ut audio, Florentinis Academicis obſervatum eſt non „ incaleſcere oleum vitrioli, ſed frigeſcere ſali ammoniaco adjectum; „ neque abſimile fuit, quod in rectificato ſpiritu ſulphuris per campa„ nam facto obſervavi: effectum tamen longe alium reperi, quando „ Florentinos imitatus experimentum cum oleo inſtitui. „ Boyle de caloris, & frigoris orig. mech. exper. 23. pag. 314. At Rouviere aperte docuit oleum vitrioli dilutum quidem a ſale ammoniaco refrigerari, *concentratum* contra admodum calefieri. Vid. *Rechtr.* pag. 43. in not.

(*y*) Ex oleo vitrioli duodecuplo aquae diluto, & ſale volatili ſalis ammoniaci effervescentia frigida (Boyle loc. cit. exp. 5. pag. 296.) ex oleo vitrioli non diluto, & eodem ſale volatili calida effervescentia orta eſt. Id. ibid. exp. 7. pag. 296. 297.

(*z*) Drach. iij. olei vitrioli cum drach. j. nitri pulverati calorem gr. 3. auxerunt. Drach. iij. ejuſdem olei triplo aquæ diluti cum drach. ij. nitri calorem gr. 9. minuerunt. Musschenbroek in Cement. p. 209. 210. §. 229. collect. Acad.

(*a*) Hinc idem oleum vitrioli, quod ex ſale ammoniaco refrigerabatur in Musschenbroekianis experimentis (l. c. §. 230.) ex nitro incaleſcebat, niſi diluceretur (vid. not. praeced.) & ex ſale marino (Geoffroy l. c. pag. 113.) Revera aqua ex ſale marino gr. 2. tantum, ex nitro gr. 8, ex ſale ammoniaco gr. 12. refrigerabatur in Elleri experimentis (Acad. de Berlin 1750. p. 85.)

(*b*) Sic ex ſpiritu nitri, & nitro frigus, tum ex aceto, & ſalibus quibuſcumque aquam refrigerantibus (Geoffroy l. c.) contra dilutiſſima acida cum ſpiritibus alkalicis, ideſt cum ſalibus alkalici jam aqua ſoluris effervescunt quidem, ſed frigus non producunt (Boerh. elem. chem. tom. 1. p. 202. exp. 3.

praeſtare videtur efferveſcentia, ut ex inteſtino motu promptior fiat ſalis ammoniaci intra aquam, qua acidum diluitur, ſolutio, ſicque frigus nonnihil intendatur; notum namque eſt ex Cl. Beccarii (*c*) experimentis ſalia neutra intra aquam, ſi quieta fuerint vix, ac ne vix quidem ſolvi, propterea efferveſcentia ſalis ſolutionem accelerando non ſecus, ac agitatio, quae bacillo fit, frigoris gradum augebit (*d*).

6. Quibus poſitis jam corruit Phyſicorum quorumdam hypotheſis, qui per efferveſcentiam ignem ex miſcela fugari opinati ſunt, propterea miſcelam ipſam refrigerari, interea dum expulſus cum vaporibus ignis iiſdem expoſitum thermometrum calefaceret (*e*). Si enim theoria ſtaret, vapores eo calidiores eſſent, quo miſcela frigidior evadit; at contra, ut diximus, in ſumma olei vitrioli vehementia, non refrigeratur, ſed calefit miſcela, & tamen vapores eo tempore maxime calidos emittit; contra ſi oleum vitrioli dilutiſſimum ſit, licet maxime miſcela frigefiat, vapores tamen ſenſibilem ealorem non habent; & generatim aqua, qua oleum vitrioli diluitur ſicut efferveſcentiam eo frigidiorem reddit, quo copioſior eſt, ita vapores non calidiores, ut ex propoſita theoria ſequeretur, ſed frigidiores efficit. Praeterea ſunt aliae efferveſcentiae frigidae, qualis eſt efferveſcentia ſalis alkalini volatilis cum acido quovis, & cum ipſo oleo vitrioli, quae calidos halitus non emittunt, quod nullum inde acidum *concentratum* expellatur, ex quo iterum evincitur calorem halituum non expulſo igni, quod omnibus miſcelis frigoriferis commune eſſet, ſed *concentrationi* erumpentis acidi tribuendum eſſe. Hinc halitus, qui ex ſale

(*c*) Comment. Bonon. tom. 1. p. 405. in opuſc.
(*d*) Boyle tranſaction n. 15. art. 1. ann. 1666.
(*e*) Musschem. in Cement. p. 214. n. 10.

ſale marino, & oleo vitrioli admixtis copioſi erumpunt (*g*) calidos ſimiliter reperi, licet non ex frigida, ſed ex calida effervescentia naſcantur: enimvero oleum vitrioli ex ſale marino idem acidum *concentratum*, quod ex ammoniaco in halitus expellit, qui propterea pariter incalescunt.

7. Sed ut ad refrigerationem ex evaporatione, a qua nonnihil digreſſi ſumus revertamur, quaeſitum eſt, num liquida vaſis apertis infuſa, evaporatione ſuperioris ſuperficiei frigidiora evadant. Id in vacuo contingere Cl. CULLEN experimenta invicte demonſtrant (*h*): in aperto autem aëre ejuſmodi proponitur experimentum, ut non ſatis conſtans videatur. Nam Cl. BEAUMÉ, niſi liquidum immediate thermometro incumbat, nullam mutationem ab ejus evaporatione induci affirmat, & in cucurbitis, aut in lagenis vitreis ſive obturatis, ſive apertis aether continentibus thermometrum paullo profundius in ipſum immerſum, ad temperaturam componi affirmat (*i*). At alibi indiſcriminatim docet, ſi aether tum vitriolicum, tum nitroſum in vitreis vaſis reponatur immerſi thermometri liquorem 4.° infra temperaturam deprimere, inque ea depreſſione ſervare (*k*). Alibi demum thermometrum mercuriale in aether nitroſum immiſſum 1.°; thermometrum autem ex vini ſpiritu $\frac{1^{\circ}}{2}$ deprimi affirmat (*l*). Ego in cylindricis vaſis pollicem pariſinum diametro patentibus, & ſpiritum volatilem ſalis ammoniaci calce paratum continentibus, thermometrum 4.° circiter refrigerari obſervavi, tum quod immediate ſuperficiei liquidi ſubjectam bullam habebat, tum alterum, cujus bulla ad infima vaſis tribus

(*g*) GEOFROY l. c.
(*h*) Recher. p. 106.
(*i*) Diſſertation ſur l'aether p. 98. 99. exp. 12. 13.
(*k*) Ibid. pag. 87. exp. 3.
(*l*) Ibid. pag. 84. 85. exp. 2. Hujuſmodi inconſta iam jam ROUX adnotaverat. *Recher.* pag. 115. 116.

tribus circiter infra primam pollicibus demergebatur; atque utriuſque liquorem ſenſim ſubſediſſe, donec ad quartum infra temperaturam gradum perveniſſet, ibique tamdiu ſubſtitiſſe, quamdiu, diſſiparis volatilioribus ſpiritus partibus, ejuſdem evaporatio minueretur; in vaſis autem aequalem aperturam habentibus, ſed in ampliorem ventrem expanſis multo minorem refrigerationem ex ejuſdem ſpiritus evaporatione productam obſervavi, eoque minorem, quo venter amplior erat; ex quibus conſtat evaporatione tum ſuperiora, tum inferiora liquidi ſtrata aequaliter quidem refrigerari, ſed frigoris producti gradum eo majorem eſſe, quo ſuperficies evaporans ad reliquam ſuperficiem, per quam penetrare nititur ambientium corporum calor, aut ad maſſam refrigerandam, aut etiam ad harum quantitatum productum majorem habet proportionem: quod ſi igitur thermometrum liquido volatili perfuſum magis refrigeratur, quam ſi in liquidum ipſum immergeretur, id ex eo non fit, quod in primo caſu liquidum evaporans immediate thermometrum contingat, ſed ex eo, quod ſuperficies evaporans ad maſſam refrigerandam majorem habet proportionem, eodem modo, quo vidimus, thermometrum acido *concentrato* madefactum magis calefieri, quam ſi in hujuſmodi liquidum patulo vaſe contentum immergatur (3). Hinc thermometrum liquore volatili madefactum ex ipſius evaporatione eo magis refrigeratur, quo bulla minor eſt (*m*), cum eo major ſit proportio ſuperficiei ad maſſam, quo magis bulla imminuitur.

8. Quod ſi evaporatio calorem minuit, eo magis minuat neceſſe eſt, quo major eadem exiſtit, cumque major exiſtat in majori calore, inde conficitur eo magis corpora ex evaporatione refrigerari, quo calidiora ſunt, atque adeo tempus, quo volatilia corpora refrigerantur, non ſolum ex proportione ſuperficiei ad maſſam, juxta generalem legem aeſti-

(*m*) CULLEN l. c. p. 99.

aestimandum esse, verum etiam ex evaporantis superficiei magnitudine. Et quidem ferventem aquam oleo tectam longe tardius refrigerari observavi, quam si caeteris paribus nuda, & aëri aperto exposita relinqueretur, quando intra $\frac{2}{3}$ circiter temporis ad eumdem gradum perveniebat, evaporatione refrigerationem adjuvante. Inde vero ratio repeti posse videtur experimenti a BORRICHIO olim propositi (*n*), quod nempe, si vasa alia aliis inclusa aquam contineant, dum exterioris vasis aqua ebullit, aqua in vasis caeteris ab ebullitionis calore eo magis absit, quo vasa interiora sunt. Et sane instituto experimento, duorum, triumve caloris graduum differentiam, pro vasorum varia crassitie, & materie, inter unius & proxime inclusi vasis aquam thermometrum ostendit: hac arte posset quilibet caloris gradus ebullientis aquae calore minor constanter servari.

9. In vacuo, ut diximus, Cl. CULLEN ex evaporatione majus frigus produci observavit (1), ut tamen adverterit frigus, atque adeo evaporationem cessare, quando bullae e liquore evaporante prodire desierunt (*o*); quid simile ab HOMBERGIO fuerat observatum, liquores nempe volatiles principio in vacuo, quamdiu bullae prodirent, longe majorem jacturam ponderis facere, quam deinceps, bullis jam desinentibus, qui propterea suspicatus est, evaporationem, quae in vacuo fit, prodeuntibus aëreis bullis tribuendam esse (*p*), & huc confugiunt, qui evaporationem ab aëre repetunt (*q*). Verumtamen evaporationem cessare non quod bullae aëreae deficiant, sed quod spatium vaporibus jam refer-

(*n*) Acta Hafnienſia anni 1671. 1672. obſerv. 73.

(*o*) Recher. p. 105. Frigus vero ex evaporatione ſpiritus ſalis ammoniaci in vacuo tantum fuiſſe, ut vaſi circumpoſita aqua in glaciem converteretur.

(*p*) Acad. des Sciences 1697. p. 295. ad 298. Sed eas bullas in pleriſque volatilibus liquoribus ex aëre non eſſe infra conſtabit §. 20. not. 9.

(*q*) In rarefacto aere liquida minus evaporare, in vacuo nihil, aut fere nihil Phyſici plerique ante CULLEN docebant.

refertum, & saturatum sit, sub clauso recipiente aëris pleno institutum experimentum demonstravit. Etenim sub hoc etiam frigus ex evaporatione spiritus volatilis paullatim producebatur, ut immersi thermometri liquor sensim subsideret, qui tamen, postquam ad summam depressionem pervenerat, pedetentim ad temperaturam resiliebat: neque defectu volatilium partium thermometri liquorem resiliisse constitit; nam, sublato recipiente, ex restaurata evaporatione iterum deprimebatur. Frigus vero productum sub eo clauso recipiente aëris pleno, caeteris paribus, eo minus erat, minusve diuturnum, quo recipientis amplitudo minor erat, adeout liquida etiam maxime volatilia, sicut spiritus volatilis salis ammoniaci calce paratus, sub angusto recipiente, ex evaporatione sensibiliter non refrigescerent; ex quo confirmatur frigus illud evaporationi deberi, & demonstratur evaporationem in clauso spatio, sive vacuo, sive aëris pleno tunc demum cessare, quando recipientis capacitas vaporibus referta est, &, ut ita dicam, saturata.

10. In rariori quidem aëre, caeteris paribus, ut frigus multo majus est, ita longe citius cessat, promptiusque thermometri liquor ad externam temperaturam revertitur, quam in densiori, ita ut tempus, quo frigus ex evaporatione perdurat, eo majus sit, quo densitas aëris major est; immo & majori proportione crescat, quam densitas aëris, quantum quidem per experimenta videre licuit hactenus minus accurata. Cum enim in his experimentis spiritu volatili salis ammoniaci uterer, cujus volatilitas, prout subtiliores partes avolant, minor evadit, propterea frigus non solum ex retardata ab ambientibus vaporibus evaporatione, sed etiam ex defectu volatiliorum partium minuebatur. Maxime autem consentaneum esset ope liquoris uniformiter evaporabilis legem eam investigare, ac definire, juxta quam pro varia aëris densitate frigus minus est, ma-

giſque

giſque diuturnum. Interim ex iis, quae attulimus, confici videtur, prout aër denſior eſt, evaporationi magis reſiſtere, eamque reſiſtentiam, caeteris paribus, in majori proportione creſcere, quam aëris denſitatem: hinc & frigus pari ratione minus produci, & in dato recipiente magis diuturnum, quod tardius prodeuntes vapores, tardius etiam tanta copia colligantur, ut erupturos novos vapores cohibere poſſint.

11. Quoniam vero ſpatium datum ſive vacuum, ſive aëre plenum, prout vaporibus refertum, ſenſim novis recipiendis minus aptum efficitur, ut tandem evaporatio omnino cohibeatur, inde intelligitur, cur humida tempeſtate, humida corpora aëri expoſita ex humoris evaporatione minus quam ſicca tempeſtate refrigerentur (*r*); cur ex vento, qui continue aërem circum corpora evaporantia renovat & evaporatio (*ſ*), & frigus ex evaporatione (*t*) augeantur; cur humida corpora, aëre continue circa ipſa ex arte renovato, haud tardius fere, quam ex admoti ignis calore exſiccentur (*u*); cur tandem aqua diſſoluto ſale ſaturata in vacuo ſpatio non concreſcat in cryſtallos (*v*) nec etiam aqua fortis in lixivium ſalis tartari immiſſa (*x*). Etenim non ob defectum aëris, qui ad nitri conſtitutionem requiratur, cryſtalliſationem deficere (*y*), vel ex eo demonſtratur, quod mixtura aquae fortis, & ſalis tartari aërem non abſorbet, ſed magna copia producit (*z*); contra vero defectu evaporationis cryſtalliſationem fieri non poſſe, probat experimentum

(*r*) Notante Meran, & Richman. Vid. Recher. p. 93. 86. §. 9. p. 90. §. 15.
(*ſ*) Musschem. eſſai §. 962.
(*t*) Meran apud Roux exp. 1. p. 93.
(*u*) Desagulier tom. 2. p. 370. 371.
(*v*) "Ex eo, quod vapores nulli e vacuo recipiente elabi queunt.„ Boyle Exper. Phyſico-Mech. continuat. II. art. XI. exp. 2. p. 390.
(*x*) Idem. Tentamen circa partes nitri. Sect. XXIX. pag. 778.
(*y*) Ut Halesius *Statique des Végétaux* exp. 74. p. 162.
(*z*) Boyle contin. II. art. XI. exp. 5. p. 390.

mentum aliud, in quo cum loco lixivii ſalis tartari, ſal tartari ſiccum cum aqua forti admiſceretur, verum inde nitrum, vel in ipſo vacuo paratum eſt (&). Hic enim cum ſal tartari, non aqua ſolutum, ſed ſiccum eſſet, humidi evaporatio neceſſaria non erat, ut inde natum nitrum a modico diluente liquore ſecedere poſſet: acidum quippe nitroſum ex alkali admixtione in nitrum converſum jam minori quantitate ab eadem aquae copia diſſolutum ſervari poteſt; ut nitri ſpecie magna ex parte e liquore ſecerni debeat, & ad altera, ac fundum vaſis deponi.

12. Ex eo porro, quod aër erumpentibus vaporibus reſiſtat facile patet aërem, & vapores difficulter ſecum invicem admiſceri, atque intelligitur, cur gutta aquae intra phialam vi ignis in vapores reſoluta fere omnem aërem ex phiala expellat, & viciſſim irruens in vacuum aër diſperſos vapores contra recipientis parietes cogat (*a*); atque conficitur evaporationem non ab aëre, ſed a cauſa alia, veroſimiliter a ſolo calore liquores expandente repetendam eſſe.

13. Etſi vero perſpicuis adeo experimentis evictum ſit evaporationem ab aëre non pendere, proſtant tamen experimenta alia, quae demonſtrare videntur vapores, in primis aquoſos, vi aëris ſuſtineri: dum enim vacuum paratur vapores hujuſmodi aquoſi per recipientis parietes in levis nebulae ſpeciem conſpiciuntur (*b*), & ab iiſdem recipientis parietes obnubilantur (*c*): hinc HOMBERGIUS licet aquam in vacuo celerius evaporare, quam in pleno recipiente ex humida terra, quae intra datum tempus in vacuo magis dehiſcit, collegiſſet: putavit tamen in aëre altius vapores elevatum

(&) Idem loc. ult. cit. tum in tentamine circa partes nitri ſect. XXX.
(*a*) HALES l. c. p. 233.
(*b*) Etiam abſque uſu humidae pellis. NOLLET *Lezioni di Fiſica lez.* 10. *eſp. I. tom.* 3. *p.* 140. 141. *lez. II. jez.* 2. *eſp.* 3. *p.* 261.
(*c*) BOERHAAVE Chemia tom. 1. p. 247. 248.

vatum iri, quam in vacuo (*d*). Equidem vapores aquoſi in definito caloris gradu certae denſitatis eſſe videntur, propter quam in fluido plus, minuſve denſo vel eleventur, vel in infimum locum deſcendant (*e*) : ſed illa aquae, aut aliorum fluidorum in vapores rarefactio, & expanſio, tum vaporum in aquam condenſatio ab aëris praeſentia, aut defectu non pendet. Quod ſi vapores dum fit vacuum ab aëre ſecedunt, id non propter defectum ſuſtentaculi evenire videtur, ſed quod vapores minus, quam aër ſe dilatare conentur, hinc & minus dilatentur, & aërem deſerant (*f*), niſi quatenus cum ipſo intime admixti, aut adhaereſcentes ab eodem ſe expandente ex parte ſimul abripiuntur. Vapores autem aquoſos in mediocri etiam caloris gradu parum elaſticos eſſe, adeoque exiguum ad expanſionem niſum exerere HUGHENII, & PAPINI experimento conſtat, in quo vapores aquae in vacuo etiam ebullientis, mercurium in appenſo ſyphone ſenſibiliter elevare non potuerunt (*g*).

14. Vaporum vero praeſentiam in vacuo boyleano alio inſuper experimento exploravi: ſcilicet in phialam anguſti colli oleum vitrioli *concentratum* infudi; atque ad latus phialae vitrum cylindricum appoſui, in cujus cavum aptati thermometri bulla pendebat: haec prompte recipiente pneumatico cooperui, tum parato vacuo, omnia in eodem ſitu per horam ſervavi, tandem ope conſueti machinamenti oleum

(*d*) Mémoires de l'Académie des Sciences 1693. p. 321. 322.

(*e*) Hinc ſumus in recipiente etiam aëre pleno, dum refrigeratur paullatim ſubſidet, & ad infimam recipientis partem colligitur (BOYLE Phyſico-Mech. exp. 30. p. 68. 69.) qui non in pleno tantum (Idem l. c.) ſed etiam in vacuo (MUSSCHEM. in Cementinos p. 39. n. 9.) admoto calore iterum expanditur: & liquoris, qui magnam partem ex metallis conſtabat, ſumus, cum in aëre elevaretur, in vacuo infimam recipientis partem occupabat (BOYLE l. c. exp. 29. p. 67.) quod ſignificat eum ſumum aëris preſſione elevatum fuiſſe.

(*f*) Ita NOLLET loc. cit. p. 140. 263.

(*g*) Tranſact. anni 167 $\frac{5}{6}$ n. 122. art. 4.

oleum ex phiala in appoſitum vas cylindricum effudi, & paullatim thermometrum, cujus bulla jam in oleum vitrioli demerſa erat a 16.° ad 21.° reaumur. ſcal. calefactum eſt, in eoque calore per inſigne temporis intervallum perſeveravit. In eo experimento pellibus pingui materia illinitis, non aqua madidis uſus ſum, ut recipiens cum lance pneumatica aptaretur. Ex quo jam patet vapores aquoſos etiam in recipiente jam per horam aëre vacuo adhuc ſuperſtites eſſe, cum oleum vitrioli diu, multumque fuerit calefactum, cujus incaleſcentiam nonniſi ab attractis aquoſis vaporibus repetendum eſſe ſuperius demonſtravimus (3), hiucque confirmatur vapores aquoſos aëris ſuſtentaculo nequaquam indigere.

15. At qui fit, ut vapores, qui ex admixto oleo vitrioli cum ſale ammoniaco in aëre calidi erumpunt, quorumque calorem humidis vaporibus, quibus admiſcentur; adſcribendum eſſe demonſtravimus (4), in vacuo, teſte MUSSCHEMBROEKIO, vix ullum calorem oſtendant (*h*)? An non inde evincitur vapores aquoſos in vacuo vix ullos ſupereſſe, ex quorum miſcela ſalis ammoniaci erumpens acidum incaleſcere poſſit? Juvabit ipſum MUSSCHEMBROEKII experimentum perpendere, quo accuratius ex eodem judicium fieri queat. Porro laudatus Auctor drach. iij. olei vitrioli per horam ſub vacuo recipiente reliquit, priuſquam in ſalis ammoniaci drach. j. effunderet, forte ut ad eamdem cum ambiente caloris temperaturam exigerentur: poſtea affuſo in ſalem oleo vitrioli, vidit expoſitum vaporibus thermometrum nonniſi 3.° fahrenh. ſcal. incaluiſſe, & quidem tarde, efferveſcentia ſcilicet jam deſinente. Thermometrum vero miſcelae immiſſum, primo 21.° ejuſdem ſcalae refri-

(*h*) MUSSCHEMB. in Ciment. p. 210. §. 230. 231. Calidos non eſſe hujuſmodi vapores in vacuo ex MUSSCHENBROEK Cl. LA RATTE Encyclop. tom. 7. art. *froid* p. 319.

frigeratum fuiſſe, poſtea, finita effervescentia, 7.° incaluiſſe; cum contra, ex pari olei vitrioli doſi in duplam ſalis ammoniaci doſim in aperto aëre immiſſa, thermometrum in ipſam immerſum 12.° refrigeraretur; expoſitum autem vaporibus thermometrum 10.° incaleſceret. Quae quidem oſtendunt, in vacuo, ut minus calidi halitus fuerunt, ita frigidiorem effervescentiam fuiſſe quam in aperto aëre. Quod ſi conſideremus oleum vitrioli, prout dilutius eſt, frigidiorem quidem effervescentiam cum ammoniaco ſale producere, ſed quae halitus pari ratione minus calidos emittat (6), pronum eſt conjicere, oleum, quod MUSSCHEMBROEKIUS in vacuo cum ſale ammoniaco commiſcuit, dilutius fuiſſe, quam illud, quod idem experimentum in aëre tentans adhibuerat: cur autem id oleum dilutius evaſerit facile eſt divinare, nam cum in vacuo per horam in aperta ampulla fuiſſet relictum, ex abſorpto humido ſub vacuum recipiens diffuſo dilui facile potuit (§. praeced.) maxime ſi recipiens amplum (*i*), tempeſtas humida, ampla phialae apertura, tum ſi humidas pelles ad recipiens cum lance aptandum adhibuerit, e quibus novi vapores humidi aſſidue prodire, & in eorum, qui ab oleo abſorbebantur, locum ſuccedere poſſent (*l*).

16. Hae me animadverſiones admonuerunt, ut idem experimentum paullo aliter repeterem. Drach. iij. olei vitrioli admodum *concentrati* in phialam anguſti colli infundebam, & drach. j. ſalis ammoniaci immittebam in vas vitreum cylindricum, quod thermometro duplo inſtructum erat, depreſſio-

(*i*) Duae aut tres menſurae *chopines* aëris ſemper tantum aquae continent, ut inde drach. j. ſalis tartari ſenſibiliter humeſcat, & pondere augeatur (NOLLET *leç. tom.* 3. *p.* 140.) Recipiens vero MUSSCHEMBROECKII amplitudinem habebat 284. pollic. rhen. pag. 211.

(*l*) Effervescentia ex oleo vitrioli cum ſale ammoniaco in vacuo mixtis minor, quando ante miſcelam diu in vacuo morabantur. BOYLE contin. II. art. XII. pag. 398. 399.

preſſiore altero, ut in miſcelam demergi poſſet, altero elatiore, ut miſcelae vaporibus expoſitum eſſet: prompte haec omnia excipulo pneumatico obtegebam, cujus limbus ad lancem per interjectas pelles pinguedine oblinitas aptabatur; tum cito, intra 2′ ſcilicet parato vacuo, in eodem ſitu relinquebam, donec hora integra lapſa eſſet: ſolito dein machinamento phialam invertebam, ut oleum vitrioli in ſalem ammoniacum effunderem. Poſtea idem omnino experimentum repetebam, cum hoc ſolo diſcrimine, ut prius aërem in recipiens admitterem, quam miſcela perficeretur. In utroque caſu eumdem omnino caloris gradum vapores oſtenderunt, qui aeque diuturnus, eadem lege, aequalibus intervallis aeque auctus, aut imminutus eſt, ita ut in utroque experimento thermometrum iiſdem expoſitum 6′ aut 7′ a peracta mixtione maximum calorem, 10.° ſcilicet in ſcala reaumuriana praeſeferret, & poſt ſemihoram adhuc 4.° hujuſmodi calorem retineret (*m*). Frigus miſcelae fere idem fuit in utroque experimento, 3.° ſcilicet in vacuo, 2.° in recipiente aëris pleno: in utroque autem, finita effervescentia, thermometrum in miſcelam immerſum, non modo ad temperaturam ambientis revertebatur, ſed 3.° 4.° ve ſupra illam incaleſcere pergebat; adeout dum thermometrum alterum vaporibus expoſitum refrigeraretur, alterum quod in miſcelam immerſum erat contra calefieret. Inde itaque evidens fit ſalis ammoniaci vapores etiam in vacuo calorem oſtendere, & propterea humidos vapores, etiam horam unam poſtquam aër ſubductus eſt, per id vacuum recipiens diffuſos remanere; variumque a Musschembroekio obſervatum experimenti eventum veroſimiliter vaporibus aquoſis tribuendum eſſe, quos, dum oleum vitrioli moraretur in vacuo recipiente, ante mixtionem hauſerat, quibuſque fuerat dilutum.

17. Cum

(*m*) Experimentum inſtitutum eſt hyemali tempeſtate, die ſerena, ac ſicca, mercurio in barometro maximam altitudinem habente.

17. Cum porro finita effervescentia mixtura incalesceret, quando thermometri vaporibus expositi calor jam evanuerat, patet inde thermometri vaporibus expositi calorem in MUSSCHEMBROEKII experimento a miscela incalescente communicatum non fuisse, ut HALESIUS suspicatur (*n*): praeterea vero in eo ipso MUSSCHEMBROEKII experimento thermometrum vaporibus expositum a 67.° ad 69.° fahren. scal. jam incaluerat, quando miscela ad 58.° frigida adhuc erat (*o*); propterea illius thermometri calor a miscela communicari non potuit, quae non modo nondum incaluerat, verom 9.° adhuc ambiente frigidior erat. Facile autem est caloris, quem miscela post finitam effervescentiam concipit, causam reperire, si consideremus duas partes salis ammoniaci requiri, ut una pars olei vitrioli saturetur (*p*); propterea tum in nostris experimentis, tum in experimento, quod MUSSCHEMBROEKIUS in vacuo instituit, in quibus drach. iij. olei vitrioli cum drach. j. salis ammoniaci commixtae sunt, longe minorem fuisse salis ammoniaci dosim, quam saturando oleo vitrioli requireretur: hinc portionem olei vitrioli in his experimentis in salem ammoniacum secretum GLAUBERI conversam quidem fuisse, quod cum ambiente humido incalescere amplius non potest; portionem autem liberam superstitem fuisse, quae, attracto ambiente humido, non secus ac §. 14, &, cessante frigore a salis ammoniaci solutione producto, novum calorem ostenderet. Hinc mirum non est si hujusmodi frigida effervescentia, adjecta aqua, in calidam mutetur (*q*). Cum vero in aëre MUSSCHEMBREKIUS duplam salis ammoniaci dosim cum pari olei vitrioli

(*n*) Statique des Végétaux appendice p. 566. n. 78.
(*o*) Vide MUSSCHEM. l. c.
(*p*) POTT Académie de Berlin. 1752. p. 60.
(*q*) Cimentini p. 184. SLARE in transact. philosoph. n. 150. art. 4. exp. 7. GEOFROY l. c. p. 121.

vitrioli quantitate miſcuerit, inde minor olei vitrioli quantitas poſt finitam eſſerveſcentiam libera ſupereſſe potuit, minoremque calorem praebere, cujus forte ideo non meminit Cl. Auctor (*r*). Jam vero majori poſita in vacuo, & celeriori evaporatione (9. 10.) phoenomena explicantur hactenus obſcura: cur ad exemplum aqua fortis, cui vini ſpiritus admiſceatur, ferrum cum ebullitione in vacuo ſolvat, & interea in aëre nihil ſimile praeſtet (*ſ*); namque vis aquae fortis in ferrum, admixto vini ſpiritu, infringitur (*t*): itaque in vacuo, eodem citius diſſipato, majorem in ferrum efficaciam aqua fortis citius recuperat, dum quae in aëre eſt ex ipſius admixtione impeditur, quominus ſimilem actionem in ferrum exerceat. Caeterum, quoniam vini ſpiritus, qui, admixta aqua forti, vix ullas bullas in vacuo emittit (*u*), celerius tamen ibidem evaneſcit; confirmatur inde, quod ſuperius jam probavimus (9), celeriorem in vacuo evaporationem erumpentibus aëreis bullis tribuendam non eſſe. Forte autem ex ſimilibus cauſis, quod nempe acida, dum vacuum paratur, attracto ambientis humido diluantur (15. 16), tum quod menſtrua alia volatiles nonnullas partes amittant diverſa phoenomena aliarum etiam ſolutionum, quae in vacuo, & aëre fiunt, repetenda ſunt.

18. Fluida alia prae aliis majorem caloris gradum inter ebulliendum acquirere Phyſici obſervarunt, eumque nec denſitati, nec oleoſitati, nec partium tenuitati reſpondere (*v*), ſed varium eſſe, prout liquida plus, minuſve eſſent volatilia (*y*). Revera ſi advertere lubeat, oleum olivarum calorem

(*r*) Etiam in aperto aëre thermometrum primo frigefactum ſub finem nonnihil calefieri obſervaverat Geoffroy l. c. p. 114.
(*ſ*) Boyle Phyſico-Mech. contin. II. art. XI. exp. 13. Papin, & Hughens tranſact. phil. 1675. n. 119. art. I.
(*t*) Boyle experimenta, & notae circa corroſibil. orig. exp. II. p. 378. 379.
(*u*) Papin, & Hughens l. c.
(*v*) Boerhaave Chem. tom. 1. p. 93. 94. 398.
(*y*) Desaguliers tom. 2. pag. 212.

lorem ſummum recipere antequam ebulliat, 600.° ſcilicet ſcalae fahrenheitianae (ζ), olea ſtillatitia 560.°, &, diſſipatis tenuioribus partibus, majorem (&), aquam 212.°, vini ſpiritum 175.° (*a*), ac demum ſpiritum volatilem ſalis ammoniaci calce paratum 150.° (*b*); & frigoris gradum ab iiſdem fluidis in CULLEN experimentis productum eodem ordine majorem fuiſſe (*c*), inde confirmabitur, tum varium ebullientium liquidorum calorem, tum varium frigus ab iis liquidis in memoratis experimentis productum a vario fixitatis, aut volatilitatis gradu dependere; proindeque liquida, tum demum ebullire, quando majorem caloris gradum acquirere non poſſunt (*d*), quando nempe evaporatio eorumdem ex aucto calore ea lege augetur, ut tantum caloris diſſipet, quantum adjicitur. Hinc eſt ut in machina papiniana, coërcitis vaporibus, in indefinitum calefieri poſſint (*e*).

19. Jam vero, quoniam evaporatio aëre cohibetur, eoque magis, quo denſior eſt, in vacuo liberior evadit (9); inde intelligitur, cur liquorum ebullientium calor eo major ſit (*f*), quo mercurius in barometro altior (*g*), in vacuo mi-

(ζ) Vere numquam ebullit; nam ex ſuppoſito igne calefieri pergit donec accendatur. MARTINE *Diſſertation IV. ſur la chaleur art. VIII. p.* 235. 236. 237.

(&) MARTINE l. c. BOERHAAVE l. c. p. 397.

(*a*) MARTINE p. 232. BOERHAAVE p. 396. de alcohole.

(*b*) Ut inſtituto experimento comperi.

(*c*) Recherches p. 99. 100.

(*d*) AMONTON, & FAHRENHEIT apud BOERH. l. c. p. 92.

(*e*) Caloris gradus 36. ultra conſuetum aquam recipere (BOERHAAVIUS l. c. p. 91.) ſtrumen ex ſtamno, & plumbo calore aquae liquefactum in ea machina vidit DESAGULIER (tom. 2. p. 412.) ſtamnum, & plumbum intra aquam poſita NOLLETIUS (lez. tom. 4. p. 85.), aut etiam in media aqua per fila aenea ſuſpenſa MUSSCHEMB. (*eſſai* §. 879.)

(*f*) " Atmoſphaerae incumbentis pondus vapores deprimit, impeditque quo-„ minus aqua ebulliat, donec calorem contraxerit multo majorem, „ quam quo ad ejuſdem in vacuo ebullitionem excitandam opus ſit. „ NEWTON quaeſt. XI. poſt opticam p. 140. ſimilia DESAGUL. tom. 2. p. 212. aliique.

(*g*) BOERH. l. c. p. 92. 93. MARTINE l. c. diſſert. I. §. 9.

minimus habeatur (*h*). Sunt quidem nonnulli, qui ut evaporationem in vacuo (9), ſic celeriorem ebullitionem aëri erumpenti tribuunt: verumtamen inteſtinus motus, qui ex ebullitione eſt, non confundendus cum eo, qui ab erumpente aëre producitur: etſi enim bullas aëreis ſimiles ebullitio excitet, undas tamen nullas facit, quemadmodum aër, qui e liquidis per exantlationem educitur (*i*); praeterea erumpens aër non impedit, quominus liquida majorem calorem acquirere poſſint (*k*); at liquida etiam in vacuo ebullientia ulterius calefieri nequeunt (*l*), & generatim eo majorem calorem adipiſci poſſunt, quo majus eſt incumbentis atmoſphaerae pondus (*m*), in montibus minorem recipiunt (*n*); demum ebullitio in vacuo etiam promtior, tardiorve eſt, prout liquida plus, vel minus volatilia (*o*); hincque fit, ut liquida quaedam in vacuo ex ingenti calore non

(*h*) Aquam in vacuo gr. 96. ſcalae fahrenheitianae ebullire. BOERHAAVE l. c. MUSSCHEM. §. 879. Vid. inf. not. 9.

(*i*) MUSSCHEMB. §. 879.

(*k*) Vide ſupra notam *h*. Eatenus tamen majorem calorem acquirunt, quatenus in vacuo vaſe clauſo collecti vapores ebullitionem cohibent, ut cohibent evaporationem (§ 9.); hinc alterna ebullitio aquae in vacuo, alterne erumpentibus, iterumque condenſatis vaporibus; hinc immiſſo in frigidam recipiente, ut vapores condenſentur ebullitio vehementior evadit (HUGHENS, & PAPIN tranſact. n. 122. art. IV.) continuato emboli motu diuturnior (BOYLE exper. Phyſico-Mech. exp. 43.)

(*l*) Sic in aperto aëre prodire incipiunt ex aqua aëreae bullae calore gr. 150. fahrenheit. (Acad. de Berlin 1750. p. 69.), pergit adeo calefieri per gr. 72. In vacuo aër ex aqua prodit gr. 50. ejuſdem ſcalae (MUSSCHEMB §. 881.) pergit adeo calefieri antequam ebulliat per gr. 46. forte ex obſervato motu hoc bullarum aërearum erumpentium factum eſt ut NOLLETIUS doceret aquam in vacuo gr. 60. fahrenheit ebullire (tom. 4. lez. 12. ſez. 1. exp. 2. p. 31.)

(*m*) Vide ſupra notam *g*.

(*n*) Ex TURY, & MONNIER experimentis NOLLETIUS l. c. exp. 3. p. 35.

(*o*) Ita aqua, vinum, oleum terebintinae, ſi tepentia vacuo committantur vehementer adeo ebulliunt, ut per os vaſis effundantur; contra oleum olivarum etiam maxime calidum, ad ebullitionem perduci non poteſt (BOYLE Phyſico-Mech. exp. 43. p. 117. 118.); ſpiritus vini in vacuo citius, quam aqua ebullit (PAPIN, & HUGHENS tranſact. n. 122. art. IV.), non ſic aqua fortis, aut vini ſpiritus, cui aqua fortis admiſta fuit (Idem tranſact. n. 119. art. 1.)

non ebulliant; etsi copiosum aërem emittant (*p*), dum liquida alia parum, nihilve aëris continentia, & aqua etiam, quae praecedente ebullitione aëre repurgata est (*q*) exiguo calore ad ebulliendum adigitur.

20. Porro quaesitum est, cur corpora aliqua solida tardius in vacuo, quam in aëre; fluida contra quaedam, ut aqua tardius in aëre, quam in vacuo refrigerentur (*r*). Ejus vero quaestionis solutio ex praecedentibus perspicua est; scilicet solidorum, fixorumque corporum refrigeratio, quae ex aequabili tantummodo caloris diffusione dependet, in vacuo minor est; liquidorum autem refrigeratio, cum non tantum ex aequabili caloris diffusione, verum etiam ex evaporatione proveniat (8), evaporatio autem in vacuo augeatur (9), idcirco in vacuo refrigeratio celerior, quae ex evaporatione nascitur tarditatem alterius, quae ex aequabili diffusione caloris oritur compensare non modo poterit,

(*p*) Ut oleum olivarum, quod forte præ omnibus liquidis copiosissimum aërem continere Boyleus testatur (l. c. exp. 24.) & tamen ex ingenti calore in vacuo non ebullit, ut dictum in nota superiore.

(*q*) De aqua aëre per ebullitionem repurgata Boyle (l. c. exp. 43.) de spiritu vini Papin (l. c.); de spritu volatili salis ammoniaci Cullen (l. c. p 106.); etsi vini spiritus parum aëris contineat (Hales l. c. exp. 66.); spiritus volatilis, tum aqua, quae ebullit nihil penitus (Boer. l. c. p. 273.). Praeterea aqua etiam nativa vix $\frac{1}{54}$ volum aëris continet (Hales l. c.), hinc in vacuo ebulliens mercurium in appósito syphone sensibiliter non deprimit (Hughens transact. n. 122. art. IV.); ex quibus constat bullas, quas e vini spiritu, & spiritu volatili in vacuo prodeuntes vidit Cl. Cullen (9) magnam partem ex aëre non fuisse, sed ex liquore ipso vi ignis, aut caloris expanso (confer. Musschem. §. 987. n. 3.) ut enim hi liquores in aëre citissime ebulliunt (§. praeced.) ita verisimile est in vacuo solo ambientis calore, nisi pertrigidum sit, ad ebullitionem adigi, quae tamdiu duret, donec collectis vaporibus coërceatur (vid. not. *k*.)

(*r*) Aquam calidam celerius in vacuo refrigerari Sgravesand §. 2521. Galeatius Com. Bonon. tom. 2. part. 1. p. 314. Caeteris paribus virgam pyrometri paullo tardius contrahi sub vacuo recipiente, quam sub eodem aëre pleno Musschemb. in Ciment. p. 137. 138. Hinc quaestionem proposuit. *Essai* §. 959. *Pourquoi l'eau se refroit-elle plus vite dans le vuide tandis que le fer y reste plus long-tems chaud qu'en plein air?*

terit, verum etiam ſuperare. Enim vero cum intra ſphaeram vitream thermometri mercurialis bullam incluſiſſem, ut ſphaerae centrum teneret, per tubulum, qui ad latus ſphaerae erigebatur eamdem aëre evacuavi, dein in ebullientem aquam immiſi, ut aequabiliter calefieret, tandem, mercurio ad 70.° ſcalae reaumurianae exiſtente, in aquam eamdem cum aëre caloris temperaturam habentem, 10.° ſcilicet ſupra 0 immerſi: mercurius ad 20.° deſcendit tempore $14' \frac{1}{4}$. Eodem experimento repetito cum hoc ſolo diſcrimine, quod aër in ſphaeram admiſſus fuiſſet, tempus refrigerationis fuit $9' \frac{1}{2}$ circiter (ſ). Ex quo patet mercurium, quo thermometrum conficitur, ſecus ac aquam tardius in vacuo, quam in aëre refrigerari, tum quod magis fixus eſt, tum quod in vitro thermometrico clauſus, ſi vel maxime volatilis eſſet evaporare non poſſet: hincque veroſimile fluida etiam alia, vel fixa, ut oleum expreſſum, vel etiam volatilia, dummodo vaſis coërcita evaporare non poſſint, adinſtar ſolidorum corporum, tardius in vacuo, quam in aëre frigefactum iri.

21. Quoniam refrigerationis ex evaporatione ratio in eo ſita videtur, quod celerius liquorum volatilium calor per vapores diſſipetur, quam ab ambientium corporum calore ejuſdem jactura reparari poſſit (8): libuit inveſtigare quaenam corpora calori tranſmittendo aptiora eſſent, quod non ſolum huic quaeſtioni illuſtrandae, verum etiam ipſius caloris theoriae perficiendae aptum videbatur. Itaque cum aequalia olei olivarum, alcoholis, aquae, ac mercurii volumina in pocula terrea aequalia, & ſimilia infudiſſem, & ad eumdem cum ambiente caloris gradum componi ſiviſſem, qui

(ſ) Simile experimentum NEWTONUS memorat, in quo duo thermometra paria paribus cylindris vitreis cavis, altero vacuo, altero aëre pleno includebantur, aitque in vacuo cylindro nihilominus, neque fere tardius thermometrum incaleſcere, quam in aëre pleno, ſi e frigido in calidum cubiculum ambo deferantur. Quaeſt. XVIII. poſt Opticam p. 142.

qui eo tempore 10.° ſupra o ſcalae reaumur. erat ; thermometrum mercuriale ad 70.° ejus ſcalae calefactum ſucceſſive in ſingula haec liquida immiſi, atque obſervavi tempus, quo a 70.° ad 20.° mercurius deſcendebat, in aperto aëre fuiſſe 10′ & 20″; in oleo olivarum fuiſſe 99″, vel 100″; in alcohole 44″; in aqua 25″; in mercurio 11″: repetitum experimentum vix 1″, aut 2″ varietatem obtulit (*t*). Aequae cito etiam refrigerabatur thermometrum in oleo olivarum ſive nudo, ſive tenui alcoholis ſtrato obtecto: fuerunt adeo tempora refrigerationis in aëre, oleo olivarum, alcohole, aqua, mercurio fere uti numeri 224, 20, 9, 5, 2. Ex quibus primo patet permeabilitatem horum liquidorum a calore non eſſe in ratione volatilitatis, aut denſitaris eorumdem: patet deinde eam fere legem obtinere, ut corpora, prout magis pinguia, calori deferendo minus apta evadant, ut aqua calorem citius deferat, quam liquida inflammabilia, ut demum mercurius etiam citius aqua eumdem tranſmittat; quae novam, eamque magni momenti caloris proprietatem electrico fluido communem patefaciunt: quod nimirum corpora, prout igni electrico deferendo aptiora, eadem aptiora quoque ſint deferendo calori. Una hactenus exceptio tantum ſe offert, quam §. ſuperiore indicavimus; corpora nimirum in vacuo tardius calorem amittere, cum electricitatem citius diſperdant. Interim ex dictis intelligitur, cur lana, pili, & ſimilia corpo-

ribus

(*t*) Martine l. c. p. 112. 123. Corpora in aëre nonniſi octuplo tardius refrigerari, quam in aqua, in mercurio nonniſi 2″ celerius, pro ſingulis minutis quam in aqua; ſed Vir Cl. & minus calefecit thermometrum, & fere uſque ad ambientis temperaturam refrigerandum reliquit: ego & magis calefeci, & temporis tantum rationem habui, quo mercurius ad gr. 10. ſupra temperaturam perveniebat: hinc diſcrimen obtinui magis perſpicuum; eodem modo, quo diſcrimen inter permeabilitatem corporum metallicorum, & aquae reſpectu fluidi electrici, quod, quamdiu electricitas exigua eſt, vix percipi poteſt, ſatis perſpicuum fit, quando vehementior adhibetur.

ribus circumpoſita eorum calorem diutius ſervent (*u*); cur ſimiliter circumpoſitum goſſipium frigus ſervet ex arte productum (*v*); cur glacies citius in aqua, tardius in oleo terebinthinae, tardius adhuc in oleo olivarum, tardiſſime in aëre diſſolvatur (*y*): cum enim haec in glaciem non agant vi corrodente, manifeſtum eſt ipſam citius, tardiuſve diſſolvere, prout calori communicando plus, minuſve apta ſunt. Sed de pulcherrimo hoc argumento fuſius alias, & ex propoſito erit agendum.

22. Obſervavit laudatus Cl. CULLEN liquorem in thermometro ſub excipulo pneumatico ſuſpenſo, educto aëre, 2.° aut 3.° deprimi; poſtea in ipſo vacuo ad temperaturam reſtitui; admiſſo demum aëre 2.° adhuc, aut 3.° elevari (*z*). Hujuſmodi porro phoenomenon nihil cum prioribus commune habet, ut quiſque facile intelligit: neque enim ulla ratio eſt, propter quam irruens in vacuum aëris unda thermometrum calefaciat, intereadum lenis ejuſdem motus dum ſubducitur frigus inducat. Ad deſcenſum quidem quod ſpectat, jam obſervatum a Cl. GALEATIO liquorem in thermometris, ſubducto aëre, nonnihil deprimi, ejuſque phoenomeni cauſam hanc eſſe opinatus eſt, quod aër ex omni parte vitro incumbens ipſum conſtringat nonnihil, qua conſtrictione ſublata vitrum relaxetur, eoque fiat, ut incluſus liquor deprimatur (*&*). Hanc Cl. Viri ſententiam experimentis conſentaneam deprehendi: perinde enim liquorem thermometri aëre vacui deprimi obſervavi, quando, aperto ſuperius tubo, aditus concedebatur externo aëri, ut liquorem comprimeret, & cum aëre externam vitri ſuperficiem premente ad aequilibrium componeretur. Cum enim thermometri liquor incom-

(*u*) MUSSCH. Eſſai tom. 1. p. 474.
(*v*) FAHRENHEIT apud BOERH. l. c. p. 88.
(*y*) Ex BOYLIO ROUX l. c. p. 29. 30.
(*z*) Recher. p. 104.
(*&*) Comment. Bonon. tom. 2. part. 1. p. 318. 319.

compreſſibilis ſit, omnis in hoc experimento obſervata depreſſio vitri dilatationi erit adſcribenda. In apertis autem hoc pacto thermometris in vacuo recipiente conſtitutis liquor non deprimebatur, quod ſcilicet, facto vacuo, preſſio ex interna, externaque vitri parte aeque tolleretur (*a*). Demum BOYLEUS in aperto etiam tubo ad ovale vitrum cavum connexo aquam $\frac{1}{4}$ digiti deprimi obſervavit, quando incluſo ſub excipulo pneumatico ovali vitro, & tubo per excipuli verticem prodeunte, ſubductoque demum aëre, preſſio in ovalis vitri externam faciem minuebatur, & interea aër liquori incumbens in tubo ipſum contra internam vitri faciem premere pergebat: hinc, reſtituto aëre, ad priorem altitudinem liquor reſiliebat (*b*). Ex quibus omnibus evincitur Cl. GALEATIUM veram propoſiti experimenti cauſam inveniſſe; ſed cum etiam in vacuo, Cl. CULLEN obſervante, ad priſtinum locum thermometri liquor reverteretur, id indicio eſt calorem eo tempore nonnihil auctum fuiſſe; hincque factum eſt, ut, reſtituto aëre, tantumdem elevaretur ſupra eum locum liquor, quantum eodem educto ſubſederat.

(*a*) In apertis thermometris, extracto aëre, liquorem nonnihil aſcendere, quod aër in liquoribus ipſis deliteſcens, aëris preſſu ſublato, ſe ſe exerat. TABERRANUS Comment. Bonon. l. c. p. 320.

(*b*) Exper. Phyſic. Mech. exp. 39. p. 47.

EJUSDEM.

De cauſſa extinctionis flammae, & animalium in aëre intercluſorum.

IN ſuperiore Tomo argumenta protulimus, quibus demonſtraremus ignem, & flammam in intercluſo aëre nec propter erumpentes fumos, nec propter imminutam ab iiſdem aëris elaſticitatem ſuffocari (*a*), quin & probabili conjectura ducti, ne alios quidem vapores ſuffocationis cauſſam eſſe putavimus, ſed potius quod aër a flammae calore perverteretur. Cum vero ab animalibus vitiatus aër flammam repente extinguat, hinc utrumque phoenomenon ab eadem cauſſa produci opinati ſumus, quae gradu tantummodo diſcreparet: at poſtquam non minus a ranis calore propemodum deſtitutis, quam a caeteris animalibus aërem pervertì obſervavimus de conjectura noſtra dubitare coepimus, aliaque experimenta meditari, quibus propoſita quaeſtio accurarius dirimi poſſet (*b*). Quum in hujuſmodi experimentis inſtituendis verſarer eorum nonnulla, quae antea protulimus, caſtiganda eſſe comperi, & ex conſideratione eorum, quae in praecedenti diſſertatione circa vapores dicta ſunt, his multo plus memoratis in phoenomenis tribuendum eſſe cognovi: quapropter idem argumentum retractandum ſuſcepi, eo quidem, ni falior, ſucceſſu, ut minus dubia, & minus indefinita in eam rem mihi videar prolaturus.

1. Relatum eſt in ſuperiore tomo aërem, in quo flamma ſponte fuerit extincta, ita perverti, ut immiſſam aliam ſubito ſuffocet etiam diu poſtquam fuerit vitiatus (*c*): idipſum

(*a*) In Commentariis p. 22. & ſeq.
(*b*) Ibid. a p. 48. ad 51.
(*c*) Ibid. p. 36. §. 38. Reaccenſa candela in aëre, in quo mox ſuffocata eſt, tamdiu ac antea non perdurat (BOYLE nova exp. circa relat. inter aërem, &

idipſum in aëre ab animalium reſpiratione vitiato contingere ex BOYLEO retulimus, qui aërem in quo animal ante quatuor horas interierat immiſſo alteri animali trium minutorum ſpatio mortem attuliſſe ſcribit (*d*). Hujuſmodi BOYLEI experimentum, quo animalia in eumdem aërem ſucceſſive immittuntur hunc in modum iterandum ſuſcepi. Campanam vitream ſexdecim circiter librarum aquae capacem ita ſuſpendi, ut tres tranſverſos digitos limbo ſuo in aquam ſubjecti vaſis demergeretur: ad internam, ſuperioremque campanae partem trochleam aptaveram, per quam funiculus trajiciebatur, cujus alteri extremo exigua cavea adnexa erat, dum extremum alterum per aquam ſub campanae limbum traductum ita ad manus erat, ut cavea per aquam elevari poſſet. Funiculus alter caveae fundo adnexus, ſimiliterque ſub campanae limbum traductus caveae deprimendae, & e recipiente per aquam educendae inſerviebat: eo pacto cavea cum incluſa avicula in aërem ſub recipiens poſitum per aquam induci, aut educi poterat, quin aër mutaretur, prohibente aqua, quae campanae limbum undique obtegebat. Rebus hunc in modum diſpoſitis carduelis primum cavea incluſus per aquam in recipiens immiſſus eſt: avis primis duabus horis aërem abſorpſit, ut aquam uno circiter pollice ſupra libellum elevaret; poſtea vero tardius, tardiuſque hujus altitudinem adauxit; principio bene ſe habuit, dein conſuetas laeſae reſpirationis viciſſitudines paſſa eſt, quibus in fine horae quartae cum quadrante ſublata fuit. Hac educta carduelis alius eodem modo

& flam. vital. animal. tom. 3. p. 168.) ſub quintuplum tempus (HALES exp. 106. p. 201.) momento ipſo, quo in eum aërem immittitur, extinguitur (Helmont. *magnum oportet* p. 130. n. 59. Confer tom. praec. l. c. in not.). Aërem per flammam ex vini ſpiritus in vacuum trajectum immiſſam flammam confeſtim ſuffocare (HAUKSBEE exper. phyſico-mech. tom. 1. art. X.); aut trajectum per flammam carbonum (DESAG. tom. II. p. 439.)

(*d*) Exper. phyſico mechan. cont. II. art. V. exp. 11.

do in recipiens immissus est, qui statim magna, ac frequenti respiratione correptus duobus minutis interiit (*e*). Tertius carduelis unico minuto mortuus est; quartus demum paullo ultra semi-minutum vitam traxit. Posteriores aves, quae, aëre jam valde depravato, in recipiens immissae sunt vehementibus convulsionibus, vomitu, sopore occupabantur. Aqua post primas quatuor horas sensibiliter amplius non ascendit.

Post haec infusa exterius aqua est, sicque aër sub campana ita condensatus, ut aqua ad libellam restitueretur, tum carduelis alius in recipiens immissus: ne minutum quidem vixit, nec aëris elaterium amplius imminuit.

Ex quibus confirmatur aërem ab animalibus ita vitiari, ut immissa animalia alia citissime extinguat.

2. Neque solum flamma, & animalia in aëre ab alia flamma, aut animali vitiato suffocantur, sed ipsae quoque stirpes, ut ex aëris intercluſione paullatim languent (*f*), sic citissime intereunt, si aër ille ab inclusis antea stirpibus fuerit vitiatus, & cum aëris elasticitatem infringant, similiter infringere desinunt, si aër, cum quo intercluduntur ab immissa antea stirpe elasticitatis jacturam jam fecerit (*g*).

3. Porro diuturnitas vitae animalium in aëre intercluſorum, caeteris paribus, esse solet in ratione directa voluminis aëris, inversa numeri animalium, ut Cl. Veratti observavit (*h*). Anomaliam tamen quamdam in ranis se deprehendisse testatur, quae sive plures, sive pauciores, aeque tamen cito interirent (*i*): Idemque animadvertit ne ulla quidem difficultate respirandi in iis angustiis ipsas labo-

(*e*) Bullae aliquot aëris, dum traduceretur cavea, per aquam in recipiens penetraverant.

(*f*) Confer Cl. Hallerum in Boerh. tom. 2. par. 1. pag. 89. not. 38. elem. phyſ. tom. 3. p. 315. n. ſ. g.

(*g*) Hales Statiq. des Végétaux exp. 122. n. 7. p. 278. 279. 280.

(*h*) Com. Bon. t. 2. par. 2.

(*i*) Ibid. p. 275. 276.

laboraſſe (*k*), quamquam & aëris elaſticitatem infringant (*l*), & ex intercluſione aëris, ut ipſe exiſtimat, inſtar aliorum animalium perimantur (*m*).

Equidem, ut alia praetermittam, ranas aërem vitiare, ex eo confirmari videtur, quod aërem flammae alendae imparem non minus reddant, quam caetera animalia (*n*); in vitiato autem aëre diutius vivere non poſſe, vel inde conſtat, quod artificiali aëre tam cito laedantur (*o*).

4. Cum itaque haec phoenomena quid miri, ac ſingularis praeſeferant, placuit eadem per experimenta perſequi: & primum libuit experiri, quantum reſpiratio ranis eſſet neceſſaria. De iis quidem legimus 10′ in vacuo torricelliano ipſas interire (*p*), in boyleano autem tribus horis ita torpeſcere, ut vitam recuperare adhuc poſſint (*q*), ſex autem (*r*), aut ad ſummum ſeptem horis (*ſ*) penitus extingui quamquam alias, aut horis duabus extinguerentur (*t*), aut ad horas viginti ſeptem, & ultra in ipſo boyleano vacuo languidam vitam producerent (*u*). Verumtamen dubium eſſe poteſt an ranae in vacuo defectu preſſionis, an reſpirationis intereant: idcirco quamdiu ſub aquis vivere poſſint explorandum ſuſcepi; & quoniam ad aquae ſuperficiem reſpirandi cauſſa identidem feruntur, propterea ipſas vinculis ſub aquis coëgi. Poſt horam unam jam mortuae videbantur, ut concuſſae hac illac cadaverum inſtar moverentur abſque ullo proprii motus indicio: cum vero ipſas attentius obſervarem depre-

(*k*) P. 277.
(*l*) P. 276. (*m*) p. 274.
(*n*) Miſcel. tom. praeced. p. 48. §. 45.
(*o*) Boyl. phyſico mech. cont. II. art. V. exp. 4. 5. 7.
(*p*) Florentini p. 51. col. Acad.
(*q*) Boyl. nov. exp. pneum. tit. 2. exp. 1. & in tranſ. n. 62.
(*r*) Id. l. c. exp. 2.
(*ſ*) Id. l. c. exp. 5.
(*t*) Id. exp. phyſico-mech. cont. II. art. VI. exp. 7.
(*u*) Mussch. in Ciment. p. 51. 52.

deprehendi poſt octavum, aut decimum quodque minutum aliquot reſpirationis motus ſub ipſis aquis edidiſſe, dein conatas fuiſſe, ut a vinculis ſeſe expedirent, poſtremo morruarum inſtar iterum jacuiſſe, donec poſt idem tempus eadem phoenomena recurrerent. Quinta ab immerſione hora cum jam nullus hujuſmodi motus appareret unam eduxi; cum vero poſtea adhuc in reliquis motum aliquem reſpirationis mihi videre viſus ſim cunctatus ſum horam alteram, ut ſecundam ab aquis elicerem: ſeptima demum elapſa hora cum jam motus nullus amplius cerneretur, quae ſub aquis adhuc erant tres reliquas eduxi; ſingulas diſtinctis locis ſepoſui, atque poſt horas aliquot priores duas, quae quinta, & ſexta ab immerſione hora eductae fuerant vitam recuperaſſe comperi; poſtremas autem tres, quae per ſeptem horas ſub aquis permanſerant nec ſponte, nec admoto calore, aut ſtimulis in vitam revocari amplius potuiſſe. Experimenta autem haec menſe ſeptembri, liquore in thermometro ad 15°. circiter ſupra o ſcalae reaumurianae exiſtente, inſtituta ſunt, quod utique monendum cenſeo, cum videam in aliis experimentis (*v*) ſex diebus, aut diutius ranas ſub aquis vixiſſe, & contingere poſſit, celeberrimo HALLERO notante, ut ranae, quemadmodum caetera animalia, frigore torpentes abſque reſpiratione vitam diutius conſervent (*x*).

5. Quae autem in aëre intercluſo phoenomena ranae exhibuerunt hujuſmodi ſunt. Ex ranis quatuor unam in vaſe incluſi, quod uncias duodecim; ſecundam in vaſe alio, quod duplum; tertiam in vaſe, quod quadruplum aquae recipere potuiſſet; quartam in libero aëre reliqui: thermometrum tunc indicabat gradum 20. caloris in ſcala reaumuriana. Poſt 48. horas vivebant adhuc omnes; poſt horas 60. omnes ita mortuas inveni, ut vitam recipere amplius non poſſent:

(*v*) BROWNE erreurs populaires lib. III. p. 315.
(*x*) Elem. phyſiol. tom. III. p. 266.

ſent: laeſae reſpirationis indicia ante mortem in his ranis in aëre intercluſis aut nulla, aut dubia extiterunt, cum earum reſpiratio a ranae in libero aëre relictae reſpiratione ſenſibiliter non differret.

6. Cum porro viderem aequali propemodum tempore ranas & in aperto, & in intercluſo aëre periiſſe, inde ſuſpicio mihi nata eſt, eas non tam intercluſione aëris, quam aliqua alia cauſſa, imprimiſque aquae defectu interiiſſe; ſiquidem notum eſt ranas in aqua etiam puriſſima abſque alimento ad hebdomadas, imo & ad menſes vitam protrahere poſſe (*y*). Hinc ranas una cum aqua in aëre intercludendas putavi, ut ſublata altera mortis cauſſa, quantam vim habeat intercluſi aëris vitium ad ipſas enecandas tutius judicare liceret.

7. Itaque in vaſorum vitreorum aequalium altero ranam unam, in altero tres cum aqua incluſi: (ſpatium ab aqua relictum, & ab aëre occupatum tantum erat in utroque vaſe, ut uncias 20. aquae capere adhuc potuiſſet) ranam aliam cum pari aëris quantitate abſque aqua intercluſi; aliam demum in aperto aëre reliqui: thermometrum tunc erat ad 5° ſupra o ſcalae reaumurianae. Poſt quindecim horas vivebant adhuc omnes: poſt horas 20. ranas tres cum aqua, & aëre ſimul intercluſas mortuas inveni, quae, aperto vaſe, vitam non recuperarunt; rana quae cum aqua, & aëre ſola fuerat intercluſa poſt quinquaginta quinque horas adhuc vivebat, hora ſexageſima tertia mortua erat; quae cum aëre abſque aqua fuerat intercluſa poſt viginti ſex horas adhuc vivebat, vigeſima octava hora mortuam inveni, datoque aëre amplius non revixit; quae demum in aperto aëre relicta fuerat quinto die langueſcebat quidem, adhuc tamen vivebat. Eodem experimento repetito ex tribus cum aqua intercluſis ranis una per horas viginti, altera per horas triginta;

(*y*) SWAMERDAM. Bib. natur. p. 170. col. Acad. Idipſum ſaepe obſervavi.

ginta; tertia poſt tringinta quinque jam mortua erat; ſic ſingularum vita in ſummam collecta ultra octuaginta quinque horas non perduravit; quae rana ſola cum aqua, & aëre fuerat intercluſa poſt ſeptuaginta quinque horas jam mortua videbatur, aperto tamen vaſe vitam recuperavit; quae abſque aqua in aëre fuerat intercluſa poſt horas viginti quatuor jam mortua erat; quae demum in aperto aëre fuerat relicta decima die adhuc vivebat.

8. Ranae porro cum aqua intercluſae principio ſub aquis deliteſcebant, nec niſi identidem reſpirandi cauſſa ad ſuperficiem innatabant; progreſſu tamen temporis frequentius ad aquae ſuperficiem ferebantur; ac tandem ſub finem perpetuo innatabant, & perpetuo reſpirabant. Reſpiratio primo frequens, & parva erat, dein frequens, & magna, ac laborioſa; quando ad extremum pervenerant vix ſe amplius ſuſtinere ad aquae ſuperficiem poterant, & capite ſub aquis demergebatur; identidem tamen magno niſu innatabant, & magnas aliquot, vehementeſque reſpirationes edebant. Frequentes quoque eo tempore convulſiones apparuerunt. Quae in aëre abſque aqua intercludebantur ranae, convulſiones nullas paſſae ſunt, & minus evidenter laeſam reſpirationem habuerunt.

9. Ex his itaque patet ranas cum aqua in aëre intercluſas vitam fere ducere, quae ſit ut quantitas aëris ſimul intercluſi; eaſdemque non ſecus ac caetera animalia ex difficultate reſpirandi interire, quodque rem conficere videtur jam morituras, & dyſpnoea, ac convulſionibus laborantes ſimiliter renovato aëre reſtitui.

10. Quandoquidem vero, ut dictum eſt, in poſtremis experimentis (7) ranae, quae in aperto aëre relictae fuerant multo diutius vivebant illis, quae in aëre abſque aqua fuerant intercluſae ſecus, ac in primo experimento (5) contigiſſet, ſive id a peculiari ranarum conſtitutione, ſive a tempeſtatis varietate reperendum eſſet, placuit iterum ranas abſque aqua numero vario in vaſis ejuſdem capacitatis cum aëre inter-

tercludere; & iterum obſervavi, perinde ac quando cum aqua intercludebantur, vitae durationem longiorem fuiſſe ubi pauciores ranae erant, etſi inverſam numeri ipſarum rationem minus exacte ſequeretur, & quaſdam mortuarum inſtar jacentes, aëre renovato, reſtitutas vidi.

11. Quoniam igitur ranae, quando citius in intercluſo aëre, quam in aperto intereunt, intereunt etiam eo citius, quo plures ſunt in pari aëris quantitate (9. 10.) patet vel ab alia cauſſa, quam ab intercluſione aëris ipſarum interitum accelerari, vel certe earum vitam eſſe in ratione quantitatis aëris: quemadmodum autem hujuſmodi anomaliae frequentes ſunt, ſi ranae abſque aqua intercludantur (3. 5.), ita, conceſſa iiſdem aqua, & nulla hujuſmodi inconſtantia apparet, & ex aëris intercluſione pereunt, & eo citius, quo minorem aëris quantitatem habent, iiſdemque demum ſymptomatibus, quibus caetera animalia, perimuntur, ſimiliterque perituraе ex aëris renovatione refocillantur (7.8.).

12. Quemadmodum vero animalium, ita & flammarum durationem in eodem recipiente inverſam fere numeri ipſarum rationem ſecutam fuiſſe experimento comperi, dummodo candelae eſſent aequales, & aeque arderent: & in aequalibus quidem recipientibus, ex aequalibus candelis accenſis diutius ardere illam, quae in ampliori intercluſa ſit, docuit HALESIUS; ſin autem recipientia eſſent aequalia, candelae inaequales, majorem flammam citius extingui (*a*); ut appareat flammas, caeteris paribus, non ſecus ac animalia in intercluſo aëre citius extingui, quando minorem aëris quantitatem habent. Equidem idem monuit HALESIUS in ampliori recipiente aequalem flammam minus durare, quam pro ratione quantitatis contenti aëris debuiſſet, ſed cum ſimul adnotaverit parem candelam in majori recipiente aëris quantitatem longe majorem abſorpſiſſe (*b*), hinc

(*a*) Exp. 103. p. 198.
(*b*) Exp. 106. 107. p. 200. 201. 202.

hinc verosimile sit candelam in majori recipiente positam paullo magis arsisse, ideo & minus perdurasse: enim vero postea constabit absorpti aëris quantitatem flammae magnitudini, quam proxime respondere (30). Quod vero opinionem nostram confirmat illud est, pondus amissum sive ab una, sive a pluribus candelis homogeneis fere secutum fuisse rationem capacitatis vasis, seu quantitatis aëris, cum qua intercludebantur: similiter Cl. Beccaria expertus est (ut ipse mihi narrabat) cum limaturam stamni, aut plumbi in vitris hermetice clausis calcinationi subjiceret, portionem tantum limaturae ex subjecto igne in calcem redigi potuisse, at eo majorem, quo vacui in vase vitreo spatii amplitudo major erat.

13. Cum vero hactenus expositа experimenta in aëre ejusdem densitatis fuerint instituta, illud praeterea dignum consideratione videbatur, quantum pro varia aëris densitate simul intercluforum animalium vita brevior, diuturniorve evaderet. Cum itaque phialam haberem vitream quinquaginta librarum aquae capacem, cujus collum cochlea cuprea munitum erat, latera autem utrimque tubulum vitreum continuum habebant, horum alteri syphonem vitreum hermetice adglutinandum curavi, ut ex immissi in ipsum mercurii altitudine variam aëris intercluſi densitatem cognoscerem; alterum ad machinam pneumaticam aptavi: dein passerculum in phialam immisi, eademque cochleae ope firmiter obturata, aërem cito hausi, donec mercurius in syphone pol. 16. lin. 10. supra libellam elevatus esset: tunc commercium inter antliam, & phialam intercepi; eo autem tempore 2′ ab immisso passerculo erant praeterlapsa.

Passerculus principio vomuit (*c*) convulsiones nonnullas passus

(*c*) Similiter alauda in aëre ad dimidium rarefacto ter vomuit, dein melius se habuit, ut post horae $\frac{1}{4}$ mortis periculum adhuc abesset. Boyl. nov. exp. pneum. tit. XI. exp. 4. & in transf. n. 63.

paſſus eſt, poſtea aliquamdiu bene ſe habuit. Reſpiratio ipſi primum parva erat, & frequens (*d*), dein minor adhuc, & frequentior evaſit, poſtea frequens, ac magna, poſtremo magna, & rara, quando, ſupervenientibus convulſionibus, ſublatus eſt: mercurius paullatim in ſyphone elevabatur, ut mortis tempore lin. 4. $\frac{1}{2}$ circiter ejus altitudo adaucta eſſet. Vixit paſſerculus a clauſo tubo, qui cum antlia pneumatica commercium faciebat 35′. Cum poſt mortem paſſerculi tantum novi aëris in recipiens admiſiſſem, ut 3. pol. mercurius ſubſideret poſt horas 1. $\frac{1}{2}$ iterum paullo ultra lineam unam mercurium elevatum fuiſſe obſervavi; ſed non auſim affirmare alicui caloris viciſſitudini eam mutationem adſcribendam non eſſe; etſi mercurius in proximo thermometro nullum ejus rei indicium praebuerit.

Poſt haec paſſerculum parem in eamdem phialam prius lotam ſimiliter immiſi: aërem ſimiliter exantlavi, ut tamen mercurius in ſyphone pol. 13. lin. 5. tantummodo elevare. tur, & phialae commercium cum anthlia intercepi, quae omnia pari celeritate, 2′ ſcilicet ab immiſſo paſſerculo abſoluta ſunt. Paſſerculus eadem paſſus eſt, quae prior: vixit 70′, cum mercurius ſeptem lineis ſupra priorem locum mortis tempore altior eſſet.

Demum in eadem phiala cum aëre nativae denſitatis par paſſerculus intercluſus (altitudo mercurii in barometro tunc erat pol. 27. lin. 6.) eadem paſſus eſt praeter convulſiones, quae nullae fuerunt: vixit horas 3. $\frac{1}{2}$; mercurius in ſyphone mortis tempore pol. 1. lin. 1. $\frac{1}{8}$ circiter altius conſcenderat.

14. Porro in hujuſmodi experimentis quantitates aëris intercluſi erant uti numeri 128. 169. 330., adeoque fere uti

(*d*) Etiam in rariſſimo aëre montium peruvianorum reſpiratio frequens, anhelofa (Bouguer *Mém. de l' Acad.* 1744. *p.* 261.) in aëre condenſato contra reſpiratio rarior (Boyl. phyſico-mech. cont. II. art. 4. exp. 6.)

uti 3. 4. 8., duratio autem vitae fuit uti 35. 70. 210., seu uti 1. 2. 6., ex quo primo patet in aëre diversae densitatis durationem vitae non respondere quantitati aëris; sed majori in proportione augeri, quam aëris quantitas, quando densitas major evadit; adeoque eamdem aëris quantitatem diutius animalium vitam sustentare quum condensata, quam quum fuerit rarefacta.

Quod autem in aëre nativo rariori experti sumus, id in densiori expertus similiter est BOYLEUS, qui cum mures duos in paribus recipientibus inclusisset, in quorum altero aër nativam, in altero duplam densitatem habebat vidit in duplo densiori mus 15. vicibus diutius vixisse, quam in nativo aëre, etsi concluſi aëris quantitatem duplam tantummodo haberet (*e*).

15. Illud deinde ex hisce experimentis deducitur, imminutionem elasticitatis aëris majorem esse, caeteris paribus, quando aëris densitas major est, & quantitatem imminutionis densitatis fere rationem sequi: imo novi admissi aëris, post animalium mortem, elasticitatem iterum imminui ex iisdem probabiliter deducitur.

16. Quod vero de animalibus dictum est; idipsum de flamma observavit HALESIUS; in aëre nimirum ad dimidium rarefacto eamdem flammam multo minus quam dimidium tempus perdurare; adeoque ipsius durationem concluſi aëris rationem nequaquam sequi (*f*).

17. Quum igitur eadem aëris quantitas, prout addensatur eo tardius flammae, aut animalibus exitialis evadat; inde intelligitur, cur 522. pollices aëris, qui in nativa densitate hominis respirationi per $2' \frac{1}{2}$ tantum inservire possunt (*g*) in campana urinatoria aquae pondere compressi, &

(*e*) Loco ult. cit.
(*f*) Statiq. des Végét. p. 234.
(*g*) Ibid. append. exp. vi. p. 372.

& condenſati per 5′, & ultra reſpirationi apti ſint (*h*), inde etiam veroſimile ſit eamdem aëris quantitatem campana urinatoria incluſam eo diutius reſpirationi inſervire poſſe, quo profundius demiſſa campana, ex incumbentis aquae pondere aër in anguſtius ſpatium adigitur (*i*).

18. Ex his etiam eruitur rariorem aërem ob raritatem animalibus, aut flammae nocuum non eſſe, ſed quod cito ob hanc ipſam pervertatur, idcirco nocuum celeriter fieri: enimvero animalia in eo aëre per aliquod tempus optime reſpirant (*k*), & reſpiratio pedetentim laeditur, & eo tardius, quo recipientis amplitudo major eſt, & eodem demum modo, quo in nativo aëre intercluſo laedi ſolet (13); at ſi propria raritate aër noceret, aeque cito nocere deberet, quacumque poſita recipientis amplitudine: patet ergo vitium ipſius raritati non eſſe adſcribendum: praeterea vero manifeſtum eſt tantam denſitatem aëris reſpirationi ſuſtentandae ſufficere, quae apta ſit preſſione ſua dilatandis pulmonibus; preſſio autem dilatandis pulmonibus neceſſaria tanta eſt, quanta requiritur pulmonum vi contractili ſuperandae (nullus enim eſt aër thoracicus, qui reſiſtentiam augeat), adeoque preſſionem 2. pol. mercurii vix ſuperat (*l*), ex quo conficitur aërem etiam praetermodum rarum preſſione quidem ſua mechaniſmo reſpirationis perficiendo aptum eſſe.

19. Ut

(*h*) Nam centum pollices pro 1′ ſufficiunt Halley philoſ. tranſ. n. 349. Desagul. *leçons* t. II. p. 236. 473.

(*i*) Docet tamen Desagul. l. c. p. 236. tempus quo aër pervertitur eſſe uti ipſius volumen, quaecumque fuerit ejuſdem denſitas.

(*k*) Si excipias frequentiam majorem, quae etiam in montano aëre obſervatur. Vid. §. 13. n. *d*.

(*l*) Hales l. c. exp. 112. p. 214. 215. in mortuis quidem brutis experimentum inſtitutum; & iterum exp. 113. p. 216 217. applicito ad apertum canis latus ſyphone, vidit in ordinaria inſpiratione vix ſex pollicibus, in vehementiſſima ad ſummum triginta poll. in ſyphone vini ſpiritum elevatum fuiſſe: tanta igitur erat vis, qua diſtentus pulmo inſpirati aëris preſſionem ſuſtinebat.

19. Ut vero eo certius cognoſcerem quantam nam aëris raritatem animalia tolerare poſſint ſequens experimentum inſtitui. Paſſerculum in phialam vitream immiſi, cujus aperturam flaceſcente ampla veſica arcte ad collum phialae circumligata obturavi: phialam cum paſſerculo alio ſub recipiens pneumaticum poſui, aëremque exantlavi, donec mercurius ad 19. pollic. altitudinem in appenſo ſyphone elevaretur (altitudo ejuſdem in barometro tunc erat poll. 27. $\frac{1}{2}$) dein tantum aëris per epiſtomium admiſi, ut mercurius duobus pollicibus ſubſideret; mox parem aëris quantitatem prompte iterum exantlavi, ſicque alterne, & celeriter eamdem aëris menſuram & haurire, & reddere continuavi per horae dimidium: hoc pacto uterque paſſerculus ſemper verſatus eſt in aëre adeo raro, ut 7. $\frac{1}{2}$ ad ſummum 9. $\frac{1}{2}$ mercurii pollices ſuſtinere poſſet, cum eo tamen diſcrimine, quod paſſerculus phiala incluſus eumdem ſemper aërem haberet, extra phialam ſub recipiens poſitus aſſidue renovatum: ille principio vomitu correptus eſt (*m*), poſtea bene ſe habuit, ut finita ſemihora integer, alacerque educeretur; hic dyſpnoea ſenſim ingraveſcente, & convulſivis demum motibus correptus, non multo poſt quam eductus eſſet, interiit.

20. Ex his confirmatur aërem ſub recipiente pneumatico etiam admodum rarefactum vitae, ac reſpirationi ſuſtentandae aptum eſſe, dummodo renovetur, indeque fit, ut animalia majores mutationes denſitatis tollerent, quando denſitas nativa intercluſi aëris augetur, quam cum imminuitur (*n*), inde

(*m*) Et reſpirationem minorem, frequentioremque perpetuo habuit; vomitus repentinae mutationi aëris (vid. not. *c*. §. 13.), reſpiratio frequentior ipſi aëris raritati adſcribenda (vid. ib. n. *d*, & §. 18. n. *k*.)

(*n*) Homines in campana urinatoria aërem ferunt novem vicibus denſiorem (Mussch. *eſſai* §. 1411.) & animalia in machina compreſſoria ex aëre etiam octuplo denſiore nullum incommodum paſſa ſunt (ex Birch. Hallerus l. c. p. 194. not. *o*.) alauda contra in aëre quadruplo tantum rariore 2' interiit (Boyle nova exp. pneum. tit. XI. exp. 3.)

inde etiam ratio pendet, propter quam in rariori altiſſimorum montium aëre, & flamma ardet, & animalia oprime ſe habent (*o*), in aëre contra per antliam ad parem raritatem perducto cito extinguuntur (*p*): ille ſcilicet aër apertus eſt, & ſponte renovatur, hic intercluſus brevi perverti debet; veroſimile propterea eſt aërem montanum intercluſum aeque cito laethalem futurum, ac ille, qui in aequali recipiente ad parem raritatem eſt perductus.

21. Jam ſi comparemus phoenomena expoſita cum phoenomenis liquorum in clauſo ſpatio evaporantium iiſdem accurate reſpondere comperiemus: vidimus nimirum primo. Evaporationem in clauſo ſpatio paullatim imminui, ac tandem omnino deſinere, ut novi vapores in id ſpatium erumpere amplius non poſſint. 2. Durationem autem evaporationis, caeteris paribus, fere eſſe ut amplitudinem recipientium. 3. demum, ſi aër rareſiat, evaporationem accelerari, & recipiens vaporibus multo citius repleri; ita ut tempus, quo repletur majori in proportione imminuatur, quam denſitas aëris (Differt. praec. §. 9. 10.): quae quidem omnia etiam in flamma, & animalibus in aëre intercluſis vera eſſe obſervavimus; nam & paullatim illa languere vidimus, ac tandem extingui, & immiſſam novam flammam, aut novum animal tunc ſtatim ſuffocari (1), & durationem utriuſque in eadem aëris denſitate eſſe, uti quantitatem aëris concluſi (3. 11. 12.), in diverſa hanc rationem non amplius ſequi; ſed eo celerius deſinere, poſita aequali aëris intercluſi quantitate, quo rarior aër eſſet, eo tardius, quo

(*o*) Vid. HALLERUM l. c. p. 189. not. *i*, k, p. 193. not. *b*, *c*, p. 197. not. *o*, *p*, *q*.

(*p*) Vid. not. *n* praeced. inde forte factum eſt, ut plerique doceant aves aërem $\frac{2}{3}$ leviorem ferre non poſſe; ſed diſcrimen hujuſmodi inter aërem montanum, & aërem antlia rarefactum jamdudum eſt adnotatum. Vid. HALLER. l. c. p. 193. not. *t*.

quo denſior (14. 15.). Dum vero flammam, & animalia in intercluſo aëre vaporibus ſuffocari concludimus, nondum aut eorum naturam licet definire, aut peculiarem modum, quo noceant; num ſcilicet novis tantummodo coërcitis vaporibus, an potius mutatis phyſicis, aut mechanicis aëris qualitatibus; ſed de his deinceps nonnulla erunt addenda.

22. At ſi vapores flammae nocent, qui fit, ut in propoſitis alibi experimentis aër non per candens tantummodo metallum, ſed & per vitrum trajectus flammam extingueret (*q*), & ex admoto extrinſecus ad vitream phialam igne contentus aër flammae deinceps alendae ineptus evaderet (*r*)? Ad primum, quod ſpectat experimentum, in quo, flamma intra recipiens binis verticalibus foraminibus pertuſum conſtituta, ad inferius foramen candens vitrum admovebatur, non prava qualitate ex vitro contracta, ſed impetu, & unda ſua aërem vitri calore rarefactum flammam extinxiſſe cognovi; aliter enim experimentum ceſſit, quando cautum eſt, ne aëris a vitro rarefacti, & nimio impetu ad flammam impulſi unda in eamdem irrueret. Ad alterum, quod attinet experimentum maxime dubito ne per tenues vitri parietes (*ſ*), aut per latentem rimulam halitus admoti extrinſecus ignis in ipſius cavum penetraverint, vel fortuita alia adfuerit erroris cauſſa; quandoquidem craſſioribus vitris in caſſum deinceps tentavi: nec diſſimulatum eſt a nobis in ſuperiori tomo frigidis etiam animalibus corruptum aërem alendae flammae imparem fieri, unde de prioris opinionis veritate dubitare coepimus (*t*): caeterum & DESAGULIERIUS monuit aërem per candentia metalla trajectum non perverti, niſi quatenus aut ipſorum metallorum (*u*), aut

(*q*) Tom. praec. §. 32. 34. 35.
(*r*) Ib. §. 36.
(*ſ*) Vid. BORRICHIUM Act. Hafn. tom. 2. pag. 137. 138.
(*t*) L. c. §. 45. 46. 47.
(*u*) Ut aër, qui a candente auricalco lapidis calaminaris halitus recipit. *Leçons* tom. 2. p. 467. 468.

aut prunarum, in quas immerſa metalla ſunt vaporibus (*v*) inficitur, & HAUKSBEI experimenta eſſe caſtiganda: expertus demum ſum aërem phiala incluſum per menſes in praecalido hypocauſto ſervatum nullam noxiam qualitatem contraxiſſe. Atque haec quidem de hujuſmodi experimentis: argumenta caetera, quae vaporum hypotheſim nobis oppugnare videbantur (*x*) minoris momenti eſſe deinceps conſtabit.

23. Verum ſi phoenomena conſideremus imminutae ab animalibus imprimis aëris elaſticitatis luculentius conſtabit vapores in cauſſam ſuffocationis eſſe adducendos. Conſtat enim aëris elaſticitatem a vaporibus iis infringi, qui vehementer adeo ad ejus particulas adhaerent, ut interpoſitione ſua mutuam ipſarum vim repulſivam imminuant (*y*). Hinc 1.° vis elaſtica aëris principio a vaporibus magis imminuitur, dein ſenſim minus, prout aër vaporibus onuſtus novis recipiendis minus aptus efficitur, ut demum 2. Aëre vaporibus jam ſaturato ejus elaſticitas infringi amplius non poſſit (*z*). Tunc vero 3., novo aëre in recipiens admiſſo nova fit elaſticitatis deperditio (*a*). Hinc 4. aër factitius, qui vaporibus jam ſaturatus prodit, in vacuum, aut aërem vaporibus jam ſaturatum emiſſus nullam elaſticitatis jacturam patitur (*b*), quam tamen in purum aërem emiſſus pati vi-

(*v*) Ut in HAUKSBEI experimentis immiſſo in prunas ferro, aut aere. Ibid. p. 439.

(*x*) §. 24. 25. 28. 33.

(*y*) Ita DESAG. l. c. p. 42. 43, HALES. paſſim.

(*z*) HALES exp. 106. p. 202.

(*a*) Et novus aër cum impuro effervescit. Id. append. exp. 3. p. 342., & ſequent.

(*b*) Si ſubitam eam excipias, quae ex ipſius aëris geniti, aut admixtorum vaporum refrigeratione dependet. Sic aër factitius ex cornu cervi in vacuo per ſpeculum cauſticum combuſto poſt horam nullam amplius patitur elaſticitatis jacturam (BOYLE contin. II. art. VIII. exp. 2. p. 375.) imo vero nec aër ipſe ex charta ſulphurata in vacuo combuſta (Id. l. c. exp. 1. p. 374. 375.), nec aër ex aquâ forti, & nitro fixo in vacuo mixtis (Id. l. c. art. XI. exp. 5. p. 390.), aut ex aqua forti, & cupro (PAPIN. tranſ. an. 1675. n. 119.)

videtur, ex eo, quod vaporibus ſuis hujus elaſticitatem imminuat (*c*): ex quibus 5. intelligitur, cur corpora quaedam, quae in vacuo, aut aëre vaporibus jam ſaturato aërem emittunt, in aëre nativo, puroque intercluſa, aliquando videantur abſorbere (*d*), quod ſcilicet decrementum elaſticitatis intercluſi aëris ex vaporibus majus ſit ejuſdem incremento ex novo aëre adjecto: cur item 6. corpora quaedam in aëre intercluſa aërem alterne gignere, & abſorbere videantur, quando, harum cauſſarum altera alteram alterne ſuperante, elaſticitas intercluſi aëris alterne adaugetur, vel imminuitur (*e*): cur tamen 7. corpora etiam, quae principio aëris intercluſi elaſticitatem imminuebant, poſtremo adaugeant, quando intercluſi aëris vaporibus jam onuſti elaſticitas ab erumpentibus novis vaporibus ita imminui amplius non poteſt, ut ejus decrementum ex hac cauſſa incrementum ſuperet, quod ab erumpente novo aëre producitur (*f*).

24. Et haec quidem phoenomena maxime conſentanea ſunt iis, quae ab intercluſis in aëre animalibus producuntur. 1. Enim ab iiſdem vis elaſtica aëris principio celerius, dein tardius, tardiuſque imminuitur (*g*), ut demum 2. aëre iis vaporibus jam ſaturato ejus elaſticitas imminui amplius non poſſit; tunc vero 3. novo aëre admiſſo,

(*c*) Hales l. c. exp. 76. p. 163.

(*d*) Sic ſulphur in vacuo fluidum elaſticum vi ignis emittere, cum aërem in Hallsii experimentis abſorpſiſſet adnotat Mussch. in Ciment. pag 31. Similiter ſpiritum nitri cum ferri limatura in vacuo fluidum elaſticum gignere ut pol. 4. $\frac{1}{2}$ mercurius deprimeretur (Mussch. l. c. p. 201. §. 166.), contra ſub recipiente aëre pleno aërem abſorpſiſſe (Hales exp. 94. p. 190.), etiam repetito, ſi novus aër in recipiens admitteretur (Id. append. exp. 3. n. 6. p. 344.)

(*e*) Hales p. 256.

(*f*) In quinque rubis ſucceſſive admixto minerali *de Walton* cum aqua forti ſub eodem recipiente immoto aëris pleno, priores tres miſcelae aëris elaterium imminuerunt, poſteriores duae auxerunt (Id. append. p. 350.)

(*g*) Veratti l. c. p. 277.

miſſo, ex admixtis cum eodem vaporibus, nova elaſticitatis deperditio fieri nobis viſa eſt (15). Quoniam vero, aëre vaporibus ſemel ſaturato, ejus elaſticitas ab iiſdem debilirari amplius nequit, ex eo fit, ut 4. quantitas imminutionis non animalium numero, ſed intercluſi aëris quantitati reſpondeat (§. cit.), & in eadem aëris quantitate, quovis numero fuerint animalia, par fere elaſticitatis imminutio fiat (*h*), quod nempe, quovis fuerint numero, ultra certam vaporum quantitatem in aërem illum effundere; atque adeo ejus elaſticitatem ultra certum terminum enervare non poſſint: hinc 5. ſi animalia in aërem aliorum halitibus jam ſaturatum immittuntur, cito pereunt, quin aëris elaterium ſenſibiliter amplius imminuant (1), quinimo 6. animalia, quae per aliquod tempus in aëre vaporibus ſaturato ſupervivere poſſunt (4), in aëre intercluſa, ſub finem ejus elaterium non modo non pergunt enervare, ut contra novum aërem ante mortem gignant (*i*), quemadmodum de miſcelis quibuſdam dictum, quae cum purum aërem abſorbere videantur, in aëre propriis halitibus ſaturato novum producunt (n. 7. §. praeced.)

25. Quare cum admixti animalium vapores ii ſint, qui aëris elaſticitatem infringunt, perperam nonnulli ex abſorpto per pulmones aëre, & in ſanguinem tradu&to hujuſmodi elaterii imminutionem repetendam putant: etſi enim vel maxime per pulmones aër in ſanguinem penetret, neceſſe nihilominus

(*h*) Ex uno cypſelo in aëre intercluſo mercurius digit. 1. lin. $\frac{1}{2}$ deſcendit, ex duobus ſub eodem recipiente lin. 10, ex tribus digit. 1.; ſcilicet fere aequaliter deſcendit in experimentis Veratti, quod ut Cl. Au&or advertit numerus ipſorum vitae brevitate compenſetur (l. c. p. 271. 172.) Eamdem legem in ranis deprehendit (p. 276.), videtur tamen aliquanto diverſam obſervaſſe in coturnicibus (p. 272.) Haleſius quoque in majoribus recipientibus abſorptionem aëris, proportione habita ad capacitatem, minorem obſervavit, ſed ejuſdem ſpeciei animalia non adhibuit, exp. 7. p. 202. 203.

(*i*) De ranis idem Cl. Veratti p. 277. 278.

nus erit, ut aequalis aëris quantitas per pulmones ipsos, aut per viam aliam e sanguine erumpat; adeoque nullus hujusmodi effectus apparebit (*k*). Dein si vera hypothesis, sequeretur in eodem recipiente plus aëris a pluribus, quam a paucioribus animalibus absorberi (vid. n. 4. §. praec.): postremo constitutis in rariori aëre animalibus nulla fieri deberet elasticitatis deperditio; quinimo erumpens e sanguine, & humoribus densior aër elasticitatem ambientis aëris augere deberet, cum tamen contrarium evenire experimenta ostendant (15).

26. Juxta easdem generales leges (23) imminuitur etiam aëris elaterium ab intercluſis stirpibus; dum enim hae per intercluſum aërem vapores disperdunt ejus elaterium paullatim enervant, &, imminuta pari passu evaporatione, languescunt, & demum ante interitum eousque aëris intercluſi elasticitatem vaporibus suis imminuunt, ut imminſa nova stirps, & cito pereat, & eam aëris elasticitatem debilitare amplius non possit (2).

27. Equidem phoenomena imminutae a flamma aëris elasticitatis non parum a prioribus discrepant 1. enim flamma in aëre intercluſa principio ejus elasticitatem non modo non minuit, quin potius adauget, dein sensim imminuere incipit, haecque imminutio ea lege augetur, ut, extincta flamma, maxima evadat (*i*) 2. flammae, quo majores, aut plures in eodem recipiente, etsi pari proportione minus perdurent, & ponderis decrementum idem patiantur (12), quod innuit parem halituum quantitatem in eum aërem diffundere; eo tamen magis aëris elaterium enervant (*l*), & con-

(*k*) Enormis certe aëris quantitas intra sanguinem accumularetur, si 100. grana, seu 353. pollices aëris quavis hora in ipsum penetrarent, quemadmodum ex Halesii computatione, l. c. exp. 110. p. 211. 212.

(*i*) Hales exp. 106. p. 200.

(*l*) Majores candelas in eodem recipiente plus absorbere, Hales exp. 106. p. 201. Pluribus flammis cum animali intercluſis hydrargiri descensus majores, celeriosque fuerunt, Cl. Laghi Comment. Bonon. tom. 4. pag. 82.

contra in recipientibus utcumque inaequalibus par propemodum elaſticitatis imminutio ab aequalibus flammis producitur (*m*), ut adeo non quantitati aëris, aut durationi flammae, ſed ejus magnitudini abſorptio reſpondeat: hinc 3. flamma in aëre alterius flammae halitibus jam infecto, etſi cito extinguatur, & ſub quintuplum tempus ad ſummum perduret (*n*) haud minus tamen, quum prior flamma ejus elaterium enervat (*o*). Quin 4. in aëre fervidae fumis referto, etſi flamma minus perduret $\frac{1}{5}$ plus ipſius elaterium debilitat (*p*).

28. Quae omnia demonſtrant elaterii imminutionem, quae a flamma producitur aëris rarefactioni tribuendam eſſe, quae a pari flamma, quaecumque fuerit recipientis amplitudo, aequalis producatur; a majori, aut pluribus, in eodem quamvis recipiente, major exiſtat; & aequalis iterum ſit, ſive flamma in purum, ſive in infectum aërem immergatur, major vero, quo aër humidior, atque adeo ex calore magis dilatabilis eſt: quando enim flamma languere incipiet, multoque magis quando extinguetur, aër minus, minuſque calore rarefactus ſeſe contrahet, unde ejus elaterium pari ratione decreſcere videbitur, ac calor imminuitur.

29. Ut vero rarefactionis effectus ab effectibus effluviorum aëris elaterium imminuentium ſecernerem, hujuſmodi experimentum tentavi. In aqua vaſe contenta accenſum cereo-

(*m*) Equidem HALESIUS monuit flammam ſub majori recipiente aliquanto plus abſorbere, ſed cum ſimul adnotaverit & abſorptionem, & durationem minorem fuiſſe, quam pro ratione contenti aëris eſſe debuiſſet: hinc veroſimile flammam paullo majorem extitiſſe, unde & plus abſorberet, & minus perduraret, quemadmodum innuimus §. 22.

(*n*) Confer. §. 1. n. *c*.

(*o*) HALES exp. 106. p. 201. exp. 103. p. 198.

(*p*) In hujuſmodi aëre flamma 64″ perduravit, cum in pari quantitate aëris puri 70″ perduraret, & tamen in priori experimento $\frac{1}{5}$ plus aëris abſorpta fuit. Id. exp. 121. p. 256. 257.

reolum fulcro ſuſtentatum collocabam , poſtea campana vitrea tegebam , & ſyphonis ope aqua prius ad libellam compoſita , ſtatim ſyphonem in aquam immergebam , ut ablatae inter aërem externum , & aërem campana incluſum communicatione , ex aquae ſub campanam aſcenſu decrementum elaſticitatis aëris dimetiri poſſem. Cum primum flamma contrahi , ac minui incipiebat , aqua elevabatur , & multo celerius eo momento , quo interibat : aliquamdiu poſt aſcendere pergebat aqua , donec aër penitus refrixiſſet : tunc altitudinem ſummam , ad quam aqua pervenerat accurate metiebar.

Poſtea idem experimentum repetebam , applicito cereolo accenſo ad crus ſyphonis , quod ſub campana recipi debebat : cereolum autem ad ejus cruris latus ita adplicitum erat , ut , inclinato ſyphone , primo crus , & ſtatim poſtea flamma ſub aquas demergeretur , atque extingueretur. Res ita peracta erat eo conſilio , ut vix dum ablata communicatione inter aërem campana incluſum , & externum aërem , a quo jactura elaſticitatis a flamma producta reparari poterat , flamma ſtatim extingueretur , nulla mora temporis conceſſa , qua aërem conſumere poſſet ; adeout aſcenſus aquae campana incluſae ſupra libellam exterioris aquae poſt flammae extinctionem ex toto fere aëris condenſationi eſſet tribuendus , quin abſorptioni , aut imminutae aëris elaſticitati quidpiam adſcribi poſſet : verumtamen non minus in hoc , quam in praecedente experimento aqua aſcendit , etiamſi in illo flamma diu perdurans aërem abſorbere potuerit , ſi revera abſorbet ; aliqua dumtaxat anomalia obſervata eſt pro varia flammae magnitudine , quam prout accuratius aequalem in utroque experimento eſſe curabamus , minus etiam inaequalis erat aquae aſcenſus (*q*).

30. Ex

(*q*) Hujus experimenti ſocium habui Cl. Comitem SALUTIUM.

30. Ex quibus jam patet aëris elaterium a flamma quidem ex cera vix, ac ne vix quidem debilitari, & elevationem aquae ſub recipientibus, ſub quibus flamma extinguitur, condenſationi aëris a flamma prius rarefacti potius quam elaterii imminutioni tribuendum eſſe, & demum decerni non poſſe utrum flamma magis, vel minus quam animalia aëris elaterium infringat, donec effectus rarefactionis ab imminutae elaſticitatis effectibus non fuerint ſecreti.

31. Quoniam vero phoſphorus etiam cauſtico vitro intra recipiens accenſus, aut accenſus in clauſo vaſe ex admoto extrinſecus calore (*r*) aëris elaterium enervat, & enervat etiam pyrophorus, dum intra recipiens clauſum ſponte incaleſcit, aut accenditur (*ſ*); quoniam fumi ſulphurei etiam frigefacti per circumpoſitam frigidam, ſi iterum circumfuſa fervida caleſiant, iterum aëris elaſticitatem infringunt (*t*); quoniam imminutio elaſticitatis ab incenſo ſulphure, aut flamma etiam communi producta poſt viginti, aut triginta horas ab eadem extincta fieri perſeverat, multo ſcilicet poſtquam omnia refrigerata ſint (*u*), & demum ſulphur (*v*), aut etiam communis flamma (*x*) per vitrum cauſticum intra vitreum recipiens accenſa aëris elaterium imminuunt, inde ſequi videtur flammas ſaltem aliquas, forte etiam communes aëris elaterium nonnihil enervare. Et quidem pro varietate pabuli modo aëris elaterium infringi, modo

(*r*) Hales pag. 147. 257.
(*ſ*) Id. exp. 54. p. 151. 152. Boyl. noctiluc. obſ. 10. p. 11.
(*t*) 13. pol. aëris quinque diebus abſorpſit. Hales exp. 101. p. 196.
(*u*) Id. p. 147. & exp. 106. p. 200. Si tamen conſideremus aërem tardiſſime refrigerari, probabile fit in amplioribus recipientibus vel permultas horas requiri prius quam ad ambientis temperaturam ſe reſtituat: quam tarde autem frigeſiat aër thermometrum amontoſianum oſtendit.
(*v*) Accenſum ſulphur ultra 2 menſuras *pintes* aëris a detonante prius nitro producti abſorbebat. Id. exp. 121. p. 257.
(*x*) Accenſa eſt per chartam ſulphuratam, & nitratam. Id. p. 201. Sed quantum aëris elatetium imminuerit non narrat.

modo novum aërem a flammis produci demonſtrare videntur experimenta HALESII, qui ex corporibus quibuſdam inflammabilibus diſtillatis aëris elaterium infringi obſervavit, cum corpora alia ſimiliter inflammabilia, & olea ipſa copioſum aërem producerent (*y*).

32. Verum ex iis ipſis experimentis, quae memoravimus conſtat imminutionem elaſticitatis a flammae vaporibus productam imminutione ea, quae ex refrigeratione, & condenſatione aëris fit, longe minorem eſſe: nam & ſulphur diſtillatum multo minus, quam accenſum aëris elaterium imminuit (*z*), & duo grana phoſphori accenſa, & ſub recipiens immiſſa viginti octo pollices aëris abſorbebant, cum intra vas clauſa, dein accenſa ex admoto extrinſecus igne tredecim tantum conſumerent (*&*), quae rurſus oſtendunt, quam imperfecte imminuti elaterii menſura ab aquae, aut mercurii aſcenſu exhibeatur.

33. Caeterum quando flammae aëris elaterium imminuunt, id non abſorpto aere efficere, ſed vaporibus ſuis, qui vim repulſivam partium aëris, cum quibus admiſcentur, imminuunt (23), vel eo conſtat, ut notat Cel. HALESIUS, quod poſt ſulphuris deflagrationem, nonniſi terra ſicca ſuperſit, quae certe aërem nullum continet (*a*).

34. Poſtquam vero evictum eſt vapores eſſe, qui flammam, & animalia in intercuſo aëre ſuffocant, illud primum quaerendum ſeſe offert, num vapores iidem ſint, qui flammae, & animalibus nocent. Et vidimus quidem aërem animalibus, ſive calidis, ſive frigidis (*b*) corruptum, immiſſam flammam ſtatim ſuffocare. Vidit etiam PAPINUS flammam in vaſe clauſam, ut nonniſi per tubum aër circum ipſam reno-

(*y*) De oleis exp. 62., de cera exp. 64.
(*z*) Id. exp. 76. p. 163.
(*&*) Id. exp. 54.
(*a*) Exp. 120. p. 256.
(*b*) Tom. praec. l. c. §. 44. 45.

renovari poſſet, extinctam fuiſſe quotieſcumque loco puri aëris aërem ab homine exſpiratum recipiebat (*c*) : at aër flamma vitiatus, quocumque demum pabulo alatur, etſi flammam aliam quamvis confeſtim ſuffocet (*d*), non perinde animalibus nocet, ſed pro varietate pabuli modo noxius admodum, modo vix notabiliter moleſtus eſt : ſic Cl. LAGHIUS obſervavit animalia cum flammis communibus intercluſa diu iiſdem ſupervixiſſe (*e*), & licet animalia aliquanto citius interiiſſe adnotaverit, quando flamma ſimul intercluſa erat (*f*), cum tamen etiam citius periiſſe animadverterit, quando plures flammae ſimul intercludebantur (*g*), ex hoc ipſo erui videtur flammas eas halitibus ſuis animalibus non nocuiſſe ; nam a flammis ſive pluribus, ſive paucioribus in idem ſpatium eadem quantitas halituum diſperditur, cum eo citius finiant quo plures, & idem ponderis decrementum patiantur (12). Veroſimilius igitur ideo animalibus nocuiſſe, quod aërem rarefacerent, eoque magis, quo plures, unde & paucior aër intra recipiens relinqueretur, & aqua altius aſſurgeret (*h*), pari prorſus modo, quo paſſerculus in recipiente, in quo aër exteriori calore fuerat rarefactus, ne horam quidem vixit, cum par paſſerculus in eodem recipiente, cui calor ſimiliter admotus fuerat, ſed ita, ut aër undique intercluſus rarefieri non poſſet, ad 73′ vitam protraxerit (*i*). De flamma vero ex vini ſpiritu

(*c*) Act. lipſienſ. ann. 1689. p. 466. Col. Acad.
(*d*) Vid. §. 1. n. *c*.
(*e*) Comm. Bonon. tom. 4. p. 88. Mus ſub eodem recipiente cum cerea candela accenſa intercluſus, & novies, aut decies diutius quam vixiſſet flamma ſub recipiente relictus, laeſus non apparuit (BOYL. de relat. inter aërem, & flammam vital. animal. tom. III. exp. 1. p. 168.
(*f*) Paſſerculus ſub recipiente halitibus candelae referto vixit horas 4. 48′, cum ſub eodem nativo aëre pleno vixerit hor. 5. 24′, l. c. p. 81.
(*g*) Modo ſingulae aeque arderent p. 82.
(*h*) Id. l. c.
(*i*) Id. l. c. p. 87.

ſpiritu BOYLEUS narrat (*k*), & ſaepe etiam ſum expertus, aviculam cum ea flamma in aëre intercluſam huic diu ſupervixiſſe: lignorum etiam quorumdam flamma animalibus parum noxia (*l*), dum aliorum infenſa admodum (*m*), ut & flamma prunarum, quae aperto igne parantur parum animalibus nocet, cum carbonum ligneorum, aut lithantracis flamma iiſdem pernicioſiſſima ſit (*n*). Admodum etiam pernicioſus halitus ſulphuris, aut pulveris pyrii (*o*) incenſorum.

35. Quod ſi igitur flammarum quarumdam halitus, qui flammae manifeſte quidem nocent, animalibus vix, ac ne vix quidem moleſtiam afferunt, inde concludi poſſe videtur diverſos omnino halitus eſſe, quibus flamma, & animalia ſuffocantur (*p*); ac propterea flammas, quae animalia ſuffocant ſimul cum halitu flammam extinguente caeteris flammis communi, halitum alium emittere, qui animalibus perniciem afferat: & in carbonibus quidem halitum animalia extinguentem diſtinctum ineſſe, & ab illo diverſum, quo flamma perimitur, demonſtrare videtur ſpiritus carbonis, qui cum animalia ſuffocet, flammam non modo non extinguit, ut imo ab admota flamma incendatur (*q*). Jam vero hujuſmodi halitus ignem, & animalia extinguentes conjunctos adeſſe patet tum in reſpirato aëre, tum in aëre facti-

(*k*) Quinquies, aut ſexies diutius quam vixiſſet flamma ſub recipiente relicta avicula laeſa non apparuit (loc. ult. cit. p. 167.) Aërem tamen, qui per flammam ex vini ſpiritu in vacuum penetrat linariam intra 2' ſuffocare, DESAG. t. II. p. 467. 468.

(*l*) HALES exp. 121. p. 237. Déſcriptions des arts & mêtiers par Mrs. de l'Acad. Art du charbonier p. 3.

(*m*) De flamma ligni quaercus viridis MUSSCH. *eſſai t. II.* §. 1330. *n.* 3.

(*n*) Art du charbonier p. 2. 3. & alibi.

(*o*) Mus ſuffocat $\frac{1'}{4}$ BOYLE phyſico-mech. cont. II. exp. 8.

(*p*) Flammam vulgarem, & vitalem diverſis ſubſtantiis ali, aut ſaltem eo alimento multo magis indigere flammam vulgarem, BOYLE l. c. exp. 2. Similia Cl. LAGHIUS l. c. p. 88.

(*q*) Tranſ. philoſ. n. 452.

factitio plurium corporum, tum demum in aëre plerarumque mephitidum; cum contra alias hujuſmodi halitus ſingillatim erumpant, ut e flammis, quae animalibus non nocent, aut e corporibus, quae cum animalia ſuffocent, viciſſim flammam non laedunt (*r*), aut etiam inflammabilem halitum emittunt (*ſ*).

36. Quae cum ita ſint minus tutum indicium eſt quo ex quantitate pabuli dato tempore a flamma conſumti de aëris ſalubritate, aut inſalubritate judicium fertur, cum aeque aptus alendae flammae eſſe poſſit aër animalibus admodum infenſus, & contra.

37. Ignis porro, & flamma aërem animalibus vitiatum, aut halitibus aliis, non quidem corrigunt, ſed eumdem expellunt, ut novus in ipſius locum ſuccedere poſſit (*t*); hinc quando aër halitibus hujuſmodi ſaturatus eſt igne non modo emendari non poteſt, ut imo hunc ipſum extinguat (*u*).

38. Si vero de eorum halituum natura, qui flammam, aut animalia in clauſo aëre ſuffocant, quaerere libeat, illud primum manifeſtum eſt, fumos non eſſe, qui flammae noceant; nam & aër flamma infectus diu id vitium retinet poſtquam fumi ſubſederunt (*v*), & percolatione per liquida varia, quibus fumi retinentur, aër hujuſmodi corrigi non poteſt (*x*), & flamma etiam, quae fulgines nullas emittit, qualis ea eſt, quae alcohole nutritur, in clauſo aëre non minus

(*r*) Aut minus manifeſte (Laghi p. 84. 85.): certe ſpiritus ſanguinis humani animalibus infenſiſſimus (Ibid.) flammae non nocuus, quum contra ejus halitus admota flamma accendatur. Vid. inf. §. 40.

(*ſ*) Aëris factitii inflammabilis exempla Halesius habet exp. 57.

(*t*) De renovatione aëris, quae per ignem fit fuſe diximus tom. praec. a §. 5. ad 17. Et ignem quidem ad aërem renovandum utiliter adhibent in fodinis (tranſ. phil. n. 5.) & in locis aliis. Ibid. n. 462. 463. Sutton in libro in eam rem conſcripto. Duhamel *art de préſerver a p.* 121. *ad* 128.

(*u*) Quemadmodum notat Desag. l. c. p. 475.

(*v*) Tom. praec. §. 28.

(*x*) Ibid. §. 24. 25.

minus ſuffocatur (*y*), & demum combuſtibilium corporum fumi flammam non ſuffocant, cum ipſi inflammabiles ſint (*z*). Igitur non phlogiſto, ſed vapore eo, qui fit ex phlogiſto, ſeu ignis pabulo vi ipſius ignis permutato, flamma in intercluſo aëre ſuffocatur.

39. Ad halitus quod ſpectat, quibus animalia in aëre intercluſa perimuntur perſpicuum eſt eoſdem ex perſpiratione, inprimiſque pulmonali provenire; nam & vitri interna ſuperficies iis mortuis obnubilatur, & aperto recipiente odor putidus ſtomaco infenſus percipitur (*a*): ex his vero conſtat halitus hujuſmodi non mere aquoſos eſſe (*b*), tum etiam ex eo, quod aëris elaterium infringant (24), quod mere aquoſi halitus non praeſtant (*c*); demum ex eo, quod aqua ſaepe majori quantitate in aëre communi adſit, quam in reſpirato, quin tamen veneficam qualitatem praeſeferat (*d*).

40. Cum vero ab allatas rationes putrido vapori ſimilis ſit is, qui animalia in intercluſo aëre ſuffocat, ob idipſum ex alkalino volatili ſale inprimis conſtare videbatur, eo vel maxime, quod Cl. LAGHIUS obſervaverit intercluſa animalia ex hujus ſalis vapore, cujuſmodi eſt ſpiritus ſanguinis humani multo celerius ſublata fuiſſe: placuit vero ejus etiam ſalis vim in flammam experiri. Itaque in intercluſum aërem, qui jamdiu exhalantis ſpiritus ſalis ammoniaci calce parati halitibus fuerat ſaturatus, flammam immiſi totumque ſtatim aërem illum concepta flamma deflagraſſe obſervavi; idemque fuit eventus quando flammam immiſi in intercluſum

(*y*) Ibid. §. 2.
(*z*) Hoc argumento utitur HELMONTIUS l. c.
(*a*) Cl. LAGHI l. c. p. 82. 83.
(*b*) Ex aqua fiunt oleoſo volatili halitu praegnante, olente, non acida, nec alkalina, & praecipua cauſſa ſunt vitii, quod ex reſpirantium hominum turba in anguſto ſpatio aër contrahit HALLER el. phyſ. tom. II. p. 37. 38. tom. III. p. 353. 354.
(*c*) HALES. exp. 121. p. 260.
(*d*) Hoc argumento utitur idem HALESIUS p. 375.

ſum aërem halitibus tincturae ſulphuris volatilis ſimiliter ſaturatum; quoniam vero aër reſpiratus flammam non modo non concipit, verum etiam extinguit (34), inde conficitur halitus, quibus aër reſpiratus foedatur, vel a ſalis volatilis halitibus diſcrepare, vel cum iiſdem alios admiſceri, qui & flammam ſuffocent, & ipſorum inflammationem impediant: ex his vero inſuper confirmatur quod aliis jamdudum experimentis fuerat evictum pinguem ſubſtantiam ad ſalis volatilis conſtitutionem requiri, & intelligitur, cur putridorum corporum vapor aliquando inflammabilis ſit, alias contra alkali volatili jam diſſipato, aut vapore alio cum eodem admixto, vel eidem ſuccedente flammam extinguat (*e*).

41. Aër autem hujuſmodi ex flamma immiſſa accendebatur etiam aliquot menſes, poſtquam dictis halitibus fuerat ſaturatus, ut propterea vapores ſemel per aërem diſperſi diutiſſime eidem inhaereant, unde intelligitur quando aër flamma infectus, aut reſpiratus, aut artificialis id vitium diutiſſime retineat (*f*).

42. Dum vero dicimus halitus, quibus intercluſa in aëre animalia ſuffocantur ad putridorum halituum naturam accedere ſimul notandum innumeros alios eſſe, qui animalibus noceant; idque demonſtrant Cel. Hauksbei, Desagulierii, Laghii experimenta, & ingens multitudo ſtirpium noxios halitus emittentium, & venefica vis factitii aëris ex tot diverſis corporibus prodeuntis; indeque fit ut halitus venefici aliquando aëre ſint leviores (*g*), alias fere graviores (*h*) aliquan-

(*e*) Vid. Haller elem. phyſ. tom. III. n. k. *l.*

(*f*) Tom. praec. §. 28. 46

(*g*) Hujuſmodi eſſe videntur halitus omnes, qui in aperto, tranquilloque aëri innocui, in intercluſo admodum pernicioſi ſunt, ut halitus animalium: hinc in noſocomiis, in quibus foeror purum gravis eſt, vix tolerabilis evadit, ſi prope laquear conſcendas, Duhamel l. c. p. 77. 277.

(*h*) Tales eſſe videntur halitus mephitidum quarumdam, quae aperto aëri expoſitae ſunt: hinc ex phiala in phialam ita transfundi poſſunt, ut interpoſitam flammam in tranſitu extinguant. *Sauvages effets de l'air* §. 119.

aliquando ſonum intercipiant (*i*), alias non item (*l*), olentes demum aliquando ſint, alias vix ullum odorem praeſeferant (*m*).

43. Illud nunc inquirendum, quomodo collecti flammae, aut animalium vapores eadem in intercluſo aëre ſuffocent: & ut primo de flamma dicamus, imminutam a vaporibus aëris elaſticitatem in extinctionis cauſſam adduci non poſſe alibi demonſtravimus (*n*): ſimpliciſſima vero ratio in eo ſita videtur, quod aër flammae vaporibus ſemel ſaturatus novorum vaporum, in quos per combuſtionem ignis pabulum fuiſſet reſolvendum, eruptionem cohibeat, pari modo, quo in caeteris evaporationibus contingit (diſſ. praec. §. 9.). Sane intercluſae in aëre flammae aeque diuturna duratio eſt, ſive ſuperiora, ſive inferiora recipientis teneat, & non aër ſolum inficitur, qui ipſam ambit, aut ſupra ipſam eminet, ſed totus aër undequaque aequabiliter vitiatur, ut immiſſa nova flamma in limine ſuffocetur (1); quod argumento eſt ut dicamus non a calore (22), ſed ab halitibus quaquaverſum diffuſis vitium illud proficiſci: caetera etiam phoenomena evaporationis in clauſo vaſe ſuppreſſae cum phoenomenis ſuffocationis flammae in aëre intercluſae apprime convenire ſuperius oſtendimus (14).

44. Nec diſſimilis ratio eſt ob quam ſtirpes in intercluſo aëre pereunt; nam & aëris elaterium infringunt paullatim minus, & pari paſſu langueſcunt, adeo ut, quando demum perierunt, immiſſa ejuſdem generis ſtirps & cito pereat, & aëris elaterium infringere amplius non poſſit (2. 26.), quae ſane oſtendunt vapores, ex quibus aëris elaterium imminuitur paullatim cohiberi, hinc aëreae elaſticitatis jactu-

ram

(*i*) Sauvages l. c. §. 160.
(*l*) Saggio delle tranſ. filoſof. tom. 5. p. 10. 11.
(*m*) Vid. Cl. HALLER l. c. p. 113. n. *f.*
(*n*) Tom. praec. §. 2. 3.

ram minorem fieri, & ſtirpem languere, tandem vero omnino ſupprimi, hinc & elaſticitatem aëris non amplius infringi, & ſtirpem interire: ſtirpibus enim neceſſaria exhalatio eſt, ut novum ſuccum per radices haurire poſſint, ex cujus jugi affluxu earum vita, & incrementum dependet: ex quibus facile eſt intelligere cur ſtirpes ſolitariae ramos undique aequabiliter diffundant, altiores, gracilioreſque ſint quae in ſylvis adoleſcunt (*o*); nam ſolitariae ſtirpes aequabiliter undique exhalant; & propterea aequabilis ſit nutritii laticis affluxus, & aequabile incrementum; in iis vero, quae confertae in ſylvis ſunt lateralium ramorum evaporatio minor eſt, quod ambientium ſtirpium halitibus refertus aër eamdem cohibeat: hinc ad verticem copioſius affluens nutritius humor eaſdem in altitudinem magis, quam juxta aliam dimenſionem expandit.

44. Obſcurius aliquanto eſt, quo pacto infectus ex intercluſione aër animalibus perniciem afferat: illud quidem facile eſt demonſtrare, perinde ac de flamma diximus (43), vapores non ideo iiſdem nocere, quod aëris elaſticitatem imminuant: nam in aëre aliorum animalium halitibus jam infecto intereunt, etiamſi aut, aperto vaſe, aditus externo aëri concedatur, ut ad aequilibrium ſe componat, aut adjecta aqua, ſicque condenſato intra recipiens aëre, ad nativam elaſticitatem reſtituatur (1): mihi etiam aliquando obſervare contigit ut immiſſa in recipiens avicula interiret, immoto mercurio in appoſito ſyphone, quod indicio fuit hiatum aliquem patuiſſe, per quem aër & inſinuari, & renovari etiam ex parte potuerit, quod & paullo conſueto diuturnior animalis vita confirmavit (*p*), quo quidem in caſu cum non elaſti-

(*o*) Hales l. c. p. 300.

(*p*) Boyleo etiam aliquando contigit, ut in aëre intercluſa animalia interirent, etſi mercurius in indice immobilis perſtaret (nov. exp. pneum. tit. XV. exp. 1. 2. & in tranſ. n. 63. art. 1.), aut exterior aër admitteretur, aperto vaſe (Ibid.).

elaſticitate, ſed pondere aër ageret, manifeſtum eſt imminutam a vaporibus aëris elaſticitatem in mortis cauſſam adduci non poſſe. Porro demonſtravit Cel. HALLERUS animalia ex perenni inſpiratione ob eamdem rationem ſuffocari, propterquam in intercluſo aëre pereunt (*q*), id autem, vel inde confirmatur quod, caeteris paribus, inſpirationem eo breviorem edant, quae rarior aër citius inficitur, eo tardiorem, quo denſior aër eſt, tardiuſque pervertitur (13), atqui tamen dum in aperto aëre animalia inſpirant, aëris pulmone contenti elaſticitas tanta eſſe debet, ut cum aëris adglottidem incumbentis pondere aequilibretur, atque adeo immutata eſſe debet; ergo nec animalia ſpiritum retinentia, nec propterea in aëre intercluſa ob imminutam ipſius elaſticitatem ſuffocantur.

46. Si aër infectus per pulmones permearet, alter eſſet modus mechanicus, quo reſpirationi ineptus poſſet evadere; at in cuniculis, quos ejus rei experiundae cauſſa, in intercluſo aëre ſuffocaveram, detecta pleura, pulmonem ei undique contiguum obſervavi, eademque ſub aquis perforata, nullas bullas aëreas prodiiſſe vidi, manifeſto argumento, aërem etiam reſpiratione corruptum pulmonem non permeare: ex quibus jam conſtat, mechanicis quidem qualitatibus, aërem reſpiratione corruptum dilatando pulmoni aptiſſimum eſſe, nec dubium quin machina, quae reſpirationis functionem imitatur (*r*), hanc aeque feliciter in hujuſmodi aëre exhibere poſſit.

47. Quod ſi in phyſicos modo inquiramus, quibus inquinatus aër animalia ſuffocet primo quidem occurrit imminuta, aut etiam ſuppreſſa perſpiratio a ſimilibus vaporibus, quibus aër jam refertus ſit, ac ſaturatus, cum ejus elaſticitas ab immiſſis aliis animalibus infringi amplius non poſſit

(24),

(*q*) Elem. phyſ. tom. III. p. 258. 359. 260.
(*r*) Vid. apud HALLER. l. c. p. 236. 237.

(24), & ex ea ſane cauſſa fieri videtur ut homines, qui ex puro in infectum aërem, etiam frigidiorem ſe transferrunt, ſenſu caloris corripiantur, qui faciem imprimis invadit (*f*): verumtamen adeo neceſſaria non videtur perſpiratio, ut animalia, hac etiam ſuppreſſa, brevi adeo debeant ſuffocari (1), & aliae evacuationes ejus defectum ad tempus ſaltem poſſent compenſare, & demum in aëre admodum denſo, in quo perſpiratio tantopere imminuitur, animalia commode vivunt (20).

48. Alia vero, quae ſeſe offert phyſica cauſſa eſt nervoſi ſyſtematis a deleteriis in aëre congeſtis vaporibus irritatio, ac perturbatio, unde bronchia, & pulmones contrahantur, & aëri expanſuro negent cedere. Hujuſmodi vim ſulphureis vaporibus BOERHAAVIUS tribuit (*t*), & Cl. SOVASIUS mephitico cuidam vapori etiam adſcribit (*u*), etſi odore, & ſapore deſtituatur (*x*): eo igitur veroſimilius tribui poſſe videtur vaporibus, quibus reſpiratus aër inficitur, quique, Cl. LAGHIO notante, foetent adeo, ut ſtomachum moveant (*y*); & reſpirationis quidem viciſſitudines, quae intercluſis in aëre animalibus contingunt, conjecturae favere maxime videntur: principio enim, quando aër vaporibus foedari incipit, reſpiratio paullatim frequens, ac parva evadit, quod vix inſpiratus aër moleſtia ſua ad expirationem ſtatim ſollicitet; deinde vero, pluribus collectis vaporibus, ex brevi, & parva in brevem, magnamque mutatur (*z*), & in aëre vaporibus jam foedato hujuſmodi reſpiratione animalia ſtatim afficiuntur (1), quod ſignificare videtur, aërem illum non ſolum moleſtum eſſe, ſed etiam bronchia vi ſua irritante conſtringere; ita ut eidem ingreſſuro magis reſiſtant, unde

(*f*) DUHAMEL l. c. p. 28. 29.
(*t*) De morb. nervor. p. 259.
(*u*) L. c. §. 148. eaque ſententia Cl. HALLERO placuit l. c. p. 254. n. *d*.
(*x*) Id. l. c. §. 144.
(*y*) L. c. p. 82. 83.
(*z*) LAGHI l. c. p. 82. VERATTI l. c. p. 269.

unde anxietas naſcatur, quam laborioſa, ac magna inſpiratione animal ſuperare conetur: quoniam vero effectus idem eſt, ſive vis aëris in pulmonem irruentis imminuatur, ſive reſiſtentia pulmonis adaugeatur, inde forte factum eſt, ut imminuta aëris elaſtica preſſio a multis accuſaretur; aſt non imminutae preſſioni aëris, ſed auctae pulmonis reſiſtentiae hanc reſpirationis laeſionem tribuendam eſſe tum ſuperius dicta (45. 46.) ſuadent, tum confirmant HALESII, & BOYLEI experimenta: hic enim cum aërem corruptum, in quo animal laborabat, condenſaret, nihil levatum fuiſſe obſervavit (*a*); ille autem, compreſſa veſica, quae ad ſectam vivi canis trachaeam adnexa erat, etſi aërem non renovaret, animal tamen refocillari perſpexit (*b*). In primo nimirum experimento vis omnis aëris in pulmonem irruentis a dilatatione thoracis pendebat, ita ut, quacumque poſita aëris denſitate, ejus in pulmonem impetus tantus ſemper eſſet, quanta vis erat, qua pectoris cavum dilatabatur (18. not. l.), mirum propterea non eſt animal inde minus laborioſam reſpirationem aſſecutum non fuiſſe; ſecus vero in altero experimento, compreſſa veſica, aëris in pulmonem vis augebatur, quin neceſſe eſſet majorem niſum a pectoris parietibus exerceri, inde magis dilatabatur pulmo, & animal minori cum labore reſpirabat.

49. Ex his vero intelligitur, cur HALESIUS ex veſica (*c*), aut recipiente flexilibus parietibus inſtructo (*d*) aërem reſpirans perfocationis ſenſum perceperit, & canis, cui veſica ad trachaeam adnexa erat, reapſe fuerit ſuffocatus (*e*), & animalia intra vaſa flacceſcentibus veſicis obturata non minus intereant (*f*), etiamſi in hiſce adjunctis aër exterior veſicarum,

(*a*) Ita tamen, ut novum aërem non adderet, cont. II. art. IV. exp. 18.
(*b*) L. c. exp. 114. p. 217.
(*c*) Exp. 108. p. 204. 205.
(*d*) Exp. 116. p. 225. 227. 228.
(*e*) Ib. exp. 114. p. 257. & ſeq.
(*f*) LAGHI l. c. p. 83.

rum, aut flexilis vasis parietibus incumbens eos ita comprimere debeat, ut incluſi aëris elaſticitas cum atmoſpherae pondere perpetuo aequilibretur; intelligitur etiam cur animalia in condenſato aëre intercluſo intereant, quando ipſius elaſticitas nativi aëris elaſticitate adhuc major eſt, quemadmodum barometrum indicat (*g*): cur in nativo aëre intercluſo intereant, etſi mercurii deſcenſus in barometro minor ſit, quam a mutata tempeſtate produci ſoleat (*h*): cur contra in montano aëre, aut etiam in aëre per antliam rarefacto, dummodo renovetur, optime ſe habeant, etiamſi ipſius in pulmonem preſſio longe minor ſit (20): cur demum aër mephiticus (*i*), aut artificialis (*k*), qui eodem fere modo ac aër intercluſus animalibus infenſus eſt, etiam in aperto loco animalia ſuffocet, ubi tamen non elaſticitate, ſed pondere aëris pulmones dilatantur, quod a vaporibus hujuſmodi immutari nequit, ut facile apparet, & barometrum oſtendit (*l*): cur hujuſmodi aër citius etiam, quam vacuum animalia ſuffocet (*m*), & animalia etiam, quae diu vacui vim tolerare poſſunt (*n*).

50. Vi-

(*g*) Musschen. in Ciment. p. 59.

(*h*) Notante Cel. Hallero l. c. p. 208. 209. Profecto Halesius (append. exp. 6. pag. 371.) perfocationis ſenſum percepit, quando in recipiens, ex quo aërem reſpirabat, 18 pollices aquae penetraverant: recipientis vero diameter erat 9. pol., adeoque altitudo ejus aquae ſupra libellam 3. lin. circiter eſſe debuit; hinc preſſio elaſtica reſpirati aëris tantumdem; hoc eſt 3. lin. aquae, aut $\frac{3}{14}$ lin. mercurii imminuta tantum erat.

(*i*) Vid. *Encyclop. artic. gas.*

(*k*) Hoc argumento Halesius inductus eſt ut crederet, artificialem aërem neutiquam nocere ob elaſticitatis defectum l. c. p. 370. 371.

(*l*) Vid Haller. l. c. pag. 213: n. h.

(*m*) Vacuum torricellianum aviculas $\frac{1}{2}'$ interimit (Cimentin. p. 49. 50.) aër ex paſta $\frac{1}{4}'$ (Boyl. conf. II. art. V. exp. 5.) tum ex uvis ad ſolem exſiccatis (Ibid. exp. 10.)

(*n*) De ranis ib. exp. 7. p. 371., de cochleis exp. 6. p. 367.

50. Videtur utique reſpiratus aër ea in re a mephitico diſcrepare, quod convulſiones nullas producat (*o*), quas tamen nullas obſervari veroſimilius eſt, quod pedetentim halitibus aër ſaturetur, ſicque intercluſa animalia vel iiſdem paullatim aſſueſcant, vel paullatim debilitata, aut ſtupefacta minus ab iiſdem afficiantur: etenim in aërem ab aliis animalibus jam infectum immiſſa animalia gravibus convulſionibus torqueri obſervavimus (1), & in aëre rariori, qui citius inſicitur, ex convulſionibus interiiſſe (13) (*p*), & demum in nativo etiam, puroque aëre intercluſa animalia ex convulſionibus periiſſe vidi, quando recipiens adeo anguſtum erat, ut cito foedatus aër eadem promte ſuffocaret (*q*).

51. Quum igitur nocua aëris vis ab admixtis vaporibus proveniat, mirum non eſt aërem corruptum directione quavis agitatum, aeque tamen nocere (*r*), imo vero cum vapores tenaciter plerumque aëri adhaereant (23. & ſeq.), inde eſt ut percolatione per liquida varia aër hujuſmodi hactenus depurari non potuerit (*ſ*): frigore potius vehementi vapores cogente corrigi potuit (*t*). Equidem ſi peculiaris vaporum natura perſpecta eſſet forte, aut liquores hujuſmodi reperiri poſſent, qui vapores nocuos abſorberent, reti-

(*o*) Cl. Laghi l. c. p. 88.

(*p*) Quae convulſiones non confundendae cum iis, quibus principio animal corripiebatur ex repentina mutatione denſitatis aëris, quaeque paullo poſt ſedabantur. Vid. §. 13. not. c.

(*q*) In anguſto recipiente nativo aëre pleno intercluſos cuniculos intra dimidiam horam graviſſimis convulſionibus correptos interiiſſe vidi. Boyleus etiam murem obſervavit in recipiente nativo aëre pleno, ſed adeo anguſto, ut 24′ tantum vixerit, ex convulſionibus periiſſe. cont. II. art. IV. exp. 6.

(*r*) Flamma in intercluſo aëre extinguitur, quacumque directione agitetur (tom. praec. §. 21.), & accenſae prunae licet intercluſus aër rapidiſſimo motu adverſus illas inſuffletur (Shaw *leçon de chym. leç. 2. exp.* 5.) & animalia (Tabor exerc. medic. p. 173.)

(*ſ*) Tom. praec. §. 25.

(*t*) Ib. §. 39. Vel ipſe ſpiritus ſalis ammon. calce paratus uſque adeo volatilis frigore artificiali ex nive, & nitri ſpiritu in glaciem denſatur (Martine diſſ. IV. art. VI p. 211.)

retinerentque, maxime si aër infectus per eosdem percolaretur; aut corpora alia invenirentur, quorum salutares halitus vel nocuos vapores ab aëre separarent, vel cum his coalescentes, eosdem in mediam, minimeque noxiam naturam converterent, quae quidem hactenus occulta, penitusque incomperta esse videntur (*u*). Sed alius suppetit aërem depurandi modus, qui, etsi in usum revocari vix possit non parum tamen facit ad confirmandum noxiam aëris vim vaporibus esse adscribendam. Cum enim vapores minus quam aër elastici sint, & aëre rarefacto minus quam ipse dilatentur, semel autem ab eodem separati, nonnisi lente, ac tarde cum ipso iterum permisceantur (Dissert. praec. §. 12. 13.), propterea alterna, ac repetita rarefactione, ac condensatione aër maxima ex parte vaporibus expurgatur. Et hoc quidem artificio passerculum in eodem aëre alterne, & repetito ad dimidium rarefacto, ac ad nativam densitatem restituto per hor. 3. 50′ vivum servavi (*v*), cum in aëris immoti aequali quantitate par passerculus h. 1. 21′ interiisset. Sed de peculiaribus quibusdam hujus experimenti adjunctis, deque aliis aërem depurandi modis accuratiora alias me spero prolaturum.

(*u*) De Halesii experimentis sale tartari institutis dubitationes nostras proposuimus tom. praec. §. 46., quae eo firmiores videntur, quod vapores nocui aquosi non sint §. 39. tum quod oleum tartari, aqua jam saturatum minorem quidem quam sal tartari, aliquem tamen effectum produxerit (exp. 116.), qui nullus esse debuisset, si in humidi absorptione vis corrigens posita esset: similiter in recipiente induto tela lanea oleo tartari imbuta flammam aeque perduravisse vidit, ac in nudo, etsi $\frac{1}{9}$ recipientis a tela occuparetur (exp. 117. p. 231.) verum & absorptus aër $\frac{1}{3}$ minor significare videtur flammam tantumdem minorem fuisse (§. 12. 30.) ideo in angustiori spatio aeque perduravisse.

(*v*) Scilicet passerculus inclusus erat phiala, cujus orificium flaccida ampla vesica obturabator: phiala vero ipsa sub recipiente pneumatico posita erat, quemadmodum §. 19. Hujusmodi experimentum a Boyleo olim in alium finem fuerat tentatum, ut scilicet decerneret num animalia rariori aëri assuescere possent (nov. exp. pneum. tit. XIV. & in transf. n. 63. arr. 1. eodem tit.), idque sibi alias repetendum proposuerat (ib. in post scripto.)

FOELICIS

FELICIS VALLE TAURINENSIS FLORULA CORSICAE EDITA A CAROLO ALLIONO.

*Scripsi olim * periisse totam illam suppellectilem herbarum, quas in Insula Corsicae legit Cl.* Valle, *& fasciculum maritimarum Stirpium, quas acquisieram, ad Savonae territorium pertinere. Certior factus cum fuerim hasce stirpes etiam in Insula Corsicae circa S. Fiorenzo ab eodem fuisse collectas, in Botanicorum commodum eas recenseo, additis rariorum icone & descriptione.*

Achillea foliis lanceolatis obtusis acute serratis. *Linn. syst. p.* 1224.
Balsamita minor. *Dod. pempt.* 295.
Agrostemma glabra, foliis lineari lanceolatis, petalis emarginatis coronatis. *Linn. syst. p.* 1038.
Lychnis foliis glabris calyce duriore. *Bocc. sic.* 27.
Alisma foliis ovatis acutis, fructibus obtuse trigonis. *Linn. syst. p.* 993.
Plantago aquatica. *Cam. epit.* 264.
Allium caule planifolio umbellifero, foliis inferioribus hirsutis, staminibus subulatis. *Linn. syst. p.* 977.
Moly angustifolium umbellatum. *Bauh. pin.* 75.

Alo-

* V. Rar. ped. spec. pag. 23.

ALOPECURUS panicula villoſa oblonga folio involuto. *Linn. ſyſt. p.* 871.

Gramen alopecurum minus, ſpica longiore. *Bauh. pin.* 4.

ANDRYALA *Ger. galloprov. p.* 171.

Sonchus villoſus luteus major, & minor. *Bauh. pin.* 124.

ANTHYLLIS herbacea foliis quaterno pinnatis, floribus lateralibus. *Linn. ſyſt. p.* 1160.

Trifolium halicacabum. *Cam. hort.* 171. *t.* 47.

ANTHYLLIS fruticoſa foliis pinnatis aequalibus, floribus capitatis. *Linn. ſyſt. p.* 1160.

Barba jovis pulchre lucens. *Bauh. hiſt.* 1. *p.* 885.

ANTIRRHINUM foliis ternis ovatis. *Lin. ſyſt. p.* 1160.

Linaria triphilla minor lutea. *Bauh. pin.* 212.

ANTIRRHINUM foliis haſtatis alternis, caulibus procumbentibus, corollis calcaratis. *Linn. ſyſt. p.* 1110.

Elatine folio acuminato in baſi auriculato, flore luteo. *Bauh. pin.* 253.

ANTIRRHINUM procumbens ramoſum, foliis alternis ovatis acuminatis integerrimis, floribus candatis axillaribus. *Miſc. Taurin. tom.* 1. *p.* 88.

Hujus brevem deſcriptionem dedimus l. c., modo iconem exhibemus. Tab. I.

ARENARIA foliis ſubulatis ſubtus hiſpidis. *Linn. ſyſt. p.* 1033.

ARUM acaule, foliis cordato-oblongis, ſpatha inflexa, ſpadice incurvo. *Linn. ſyſt. p.* 1250.

Ariſarum latifolium majus. *Bauh. pin.* 196.

ASPHODELUS caule nudo, foliis ſtrictis ſubulatis ſtriatis, ſubfiſtuloſis. *Linn. ſyſt. p.* 982.

Aſphodelus minor. *Cluſ. hiſt.* 1. *p.* 197.

ASTER foliis lanceolatis integerrimis carnoſis glabris, ramis inaequalibus, floribus corymboſis. *Linn. ſyſt. p.* 1216.

Tripolium majus caeruleum. *Bauh. pin.* 267.

ASTRAGALUS cauleſcens procumbens, leguminibus ſubulatis recurvatis glabris. *Linn. ſyſt. p.* 1174.

Securidaca lutea minor corniculis recurvis. *Bauh. pin.* 349.

ASTRAGALUS caulescens procumbens leguminibus capitatis cordatis acutis hirsutis complicatis. *Linn. syst. p.* 1174.

Astragalus hispanicus siliqua epiglottidi similis flore purpureo major. *Herm. lugdb. t.* 75.

BELLIS caule subfolioso. *Linn. syst. p.* 1220.

Bellis leucanthemum annuum Italicum. *Mich. gen. p.* 34.

BRIZA spiculis cordatis, flosculis septendecim. *Linn. syst. p.* 875.

Gramen tremulum maximum. *Bauh. pin.* 2. *Scheuch. gram.* 204.

BUNIAS siliculis ovatis laevibus ancipitibus. *Linn. syst. p.* 1136.

Eruca maritima italica, siliqua hastae cuspidi simili. *Bauh. pin.* 99.

BUPLEURUM involucris universalibus nullis, foliis perfoliatis. *Linn. syst. p.* 953.

Perfoliata vulgatissima arvensis. *Bauh. pin.* 277.

BUTOMUS. *Linn. syst. p.* 1010.

Juncus floridus major. *Bauh. pin.* 112.

CALENDULA seminibus radii cymbiformibus echinatis, disci bicornibus. *Linn. hort. cliff.* 425.

Caltha arvensis. *Bauh. pin.* 275.

CAMPANULA caule dichotomo, foliis sessilibus utrinque dentatis, floralibus oppositis. *Linn. syst. p.* 295.

Rapunculus minor foliis incisis. *Bauh. pin.* 92.

CAMPANULA foliis radicalibus reniformibus, caulinis linearibus. *Linn. syst. p.* 925.

Campanula minor rotundifolia vulgaris. *Bauh. pin.* 93.

CARDAMINE foliis pinnatis, axillis stoloniferis. *Linn. syst. p.* 1131.

Nasturtium aquaticum majus, & amarum. *Bauh.* 3. *pin.* 104.

CATANANCHE squamis calycinis inferioribus ovatis. *Linn. syst. p.* 1197.

Chondrilla caerulea, cyani capitulo. *Bauh. pin.* 130.

CENTAUREA calycibus setaceo spinosis, foliis decurrentibus sinuatis spinosis. *Linn. syst. p.* 1232.

Carduus galactites. *Bauh. hist.* 3. *p.* 54.

CHRYSANTHEMUM . . . . . .

Chrysanthemum latifolium. *Bauh. hist.* 3. *p.* 105. *Tota planta leviter pilosa est. Folia amplexicaulia cum auriculis; inferiora spatulata, superiora fere linearia, omnia brevibus, & acutis dentibus simplicibus secta. Squamae calycis membranaceae, ut in* chrysanthemo segetum, *sed sub hirsutae. Semiflosculi lutei longiores, & graciliores quam in* chrysanthemo segetum, *viginti circiter.*

CISTUS arborescens foliis linearibus sessilibus, utrinque pubescentibus trinervis, alis nudis. *Linn. syst. p.* 1077.

Cistus ladanifera monspeliensium. *Bauh. pin.* 467.

CISTUS herbaceus exstipulatus, foliis oppositis trinerviis, racemis ebracteatis. *Linn. syst. p.* 1078.

Helianthemum flore maculoso. *Col. ecphr.* 2. *p.* 78. *t.* 77.

CISTUS arborescens, foliis oblongis tomentosis incanis sessilibus supra enerviis. *Linn. syst. p.* 1077.

Cistus mas folio oblongo incano. *Bauh. pin.* 464.

CISTUS . . . . . .

Chamaecistus luteus torosо folio hispanicus. *Barrel. ic.* 436.

CISTUS frutescens foliis ovatis petiolatis utrinque hirsutis, alis nudis. *Linn. syst. p.* 1077.

Cistus foemina folio salviae. *Bauh. pin.* 464.

CISTUS suffruticosus stipulatus, erectus, foliis oblongo ovatis, acuminatis, subtus subincanis, minime ciliatis. *V. Tab. II. Plurimum accedit ad* Helianthemum vulgare flore luteo C. B. *a quo distinguitur foliis ex ovato sensim acuminatis, nec ellipticis, obscure virentibus, brevissime pilosis, nullis ciliatis. Caules duri lignosi, subrubentes, rotundi, subincani,*

cani , & aliquantulum piloſi ſunt in hac ciſti ſpecie.

CLYPEOLA perennis ſiliculis bilocularibus ovatis diſpermis. *Linn. ſyſt. p.* 1130.

Thlapſi narbonenſe centunculi anguſto folio. *Tabern. ic.* 461.

CNEORUM. *Linn. ſyſt. p.* 867.

Chamaelea tricoccos. *Bauh. pin.* 462.

CONVOLVULUS foliis palmatis cordatis ſericeis, lobis repandis, pedunculis bifloris. *Linn. ſyſt. p.* 922.

Convolvulus argenteus folio althaeae. *Bauh. pin.* 295.

CONVOLVULUS foliis linearibus acutis , caule ramoſo ſubdichotomo, calycibus mucronatis piloſis. *Linn. ſyſt. p.* 923.

Convolvulus linariae folio. *Bauh. pin.* 295.

CONVOLVULUS foliis reniformibus, pedunculis unifloris. *Linn. ſyſt. p.* 924.

Soldanella maritima minor. *Bauh. pin.* 295.

CORIS. *Linn. ſyſt. p.* 931.

Coris caerulea maritima. *Bauh. pin.* 280.

CYNOSURUS paniculae ſpiculis ſterilibus pendulis ternatis , floribus ariſtatis. *Linn. ſyſt.* 836.

Gramen barcinonenſe panicula denſa aurea. *Tournef. inſt.* 523.

CYTISUS floribus ſubſeſſilibus, pedunculatiſque , foliis conduplicatis tomentoſis , caulibus fruticoſis. *Linn. ſyſt. pag.* 1167.

Trifolium argenteum, floribus luteis. *Bauh. hiſt. 2. p.* 359.

ECHIUM caule ſimplici erecto, foliis caulinis lanceolatis hiſpidis , floribus ſpicatis lateralibus. *Linn. ſyſt. p.* 916.

Echium vulgare. *Bauh. pin.* 254.

ECHIUM calycibus fructeſcentibus diſtantibus, caule procumbente. *Linn. ſyſt. p.* 916.

Echium creticum latifolium rubrum. *Bauh. pin.* 254.

EUPHORBIA umbella multifida : dichotoma , involucellis ſubcordatis : primariis triphyllis, caule arboreo. *Linn. ſyſt. p.* 1050.

Tithy-

Tithymalus dendroides. *Cam. epit.* 965.

EUPHORBIA umbella quinquefida: trifida, dichotoma, involucellis diphyllis reniformibus, foliis amplexicaulibus, cordatis ſerratis. *Linn. ſyſt. p.* 1049.

Tithymalus characias, folio ſerrato. *Bauh. pin.* 290.

EUPHORBIA umbella quinquefida, trifida, bifida, involucellis ovatis, petalis integris, fol. lanceolatis ſubpiloſis apice ſerrulatis. *Linn. ſyſt. p.* 1049.

Tithymalus paluſtris villoſus mollior erectus. *Barr. rar.* 41. *t.* 885.

EUPHORBIA dichotoma; fol. integerrimis ſemicordatis, floribus ſolitariis axillaribus, caul. procumbentibus. *Linn. ſyſt. p.* 1048.

Peplis maritima folio obtuſo. *Bauh. pin.* 293.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma, involucellis lanceolatis, foliis linearibus. *Linn. ſyſt. p.* 1048.

Tithymalus S. Eſula exigua. *Bauh. pin.* 291.

EUPHORBIA umbella ſubquinquefida ſimplici, involucellis ovatis: primariis triphyllis, foliis oblongis integerrimis, caule fruticoſo. *Linn. ſyſt. p.* 1048.

Tithymalus maritimus ſpinoſus. *Bauh. pin.* 291.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma, involucellis ovatis, fol. integerrimis obovatis petiolatis. *Linn. ſyſt. p.* 1048.

Peplus S. Eſula rotunda. *Bauh. pin.* 292.

EUPHORBIA umbella ſuboctifida: bifida, involucellis ſubovatis, fol. ſpathulatis patentibus carnoſis mucronatis margine ſcabris. *Linn. ſyſt. p.* 1050.

Tithymalus myrſinites legitimus. *Cluſ. hiſt.* 2. *p.* 189.

EUPHORBIA umbella quadrifida: bifida, foliis cuneiformi-linearibus tridentatis. *V. Tab. III.*

Procumbere videtur haec Euphorbiae *ſpecies, quae ex radice alba ſimplici tortuoſa varios fundit cauliculos ſemipalmares. Folia glabra habet ſeſſilia ſublinearia in fine ampliora, & tridentata. Umbella quadrifida. Involucri univerſalis folia*

quatuor

quatuor ex cordato ampliori principio, deinde linearia apice tridentato. Umbellula bifida. Involucella diphilla foliis amplioribus. Fructus glabri.

EUPHORBIA umbella quinquefida : dichotoma involucellis cordatis acutis, foliis lineari-lanceolatis, ramis floriferis. *Linn. hiſt. p.* 1049.

Tithymalus annuus lunato flore linariae folio longiore. *Mor. ox.* III. *p.* 339.

EUPHRASIA foliis dentato-palmatis, floribus ſubcapitatis. *Linn. ſyſt. p.* 1107.

Euphraſia tertia latifolia pratenſis. *Col. ecphr.* 200. *t.* 202. *f.* 2.

FILAGO floribus ſeſſilibus terminalibus, foliis floralibus majoribus. *Linn. ſyſt. p.* 1235.

Gnaphalium roſeum hortenſe. *Bauh. pin.* 263.

FRANCHENIA foliis obovatis retuſis ſubtus pulveratis. *Linn. ſyſt. p.* 989.

Frankenia maritima quadrifolia ſupina, chamaeſyces folio, & facie. *Mich. gen.* 23.

FUMARIA pericarpiis monoſpermis racemoſis, caule diffuſo. *Linn. ſyſt. p.* 1153.

Fumaria officinarum, & dioſcoridis. *Bauh. pin.* 143.

GALIUM foliis verticillatis lineari-ſetaceis, pedunculis folio longioribus, *Linn. ſyſt.* 892.

Galium nigropurpureum montanum tenui folium. *Col. ecphr.* 1. *p.* 298.

GALEOPSIS internodiis caulinis aequalibus : verticillis omnibus remotis. *Linn. ſyſt. p.* 1100.

Sideritis arvenſis anguſtifolia rubra. *Bauh. pin.* 233.

GENTIANA corollis octofidis, foliis perfoliatis. *Linn. ſyſt. p.* 952.

Centaurium luteum perfoliatum. *Bauh. pin.* 278.

GERANIUM pedunculis multifloris calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis cordatis ſublobatis. *Linn. ſyſt. p.* 1143.

Gera-

Geranium folio althaeae. *Bauh. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis ternatis lobatis. *Linn. syst. p.* 1143.

Geranium acu longissima. *Bauh. pin.* 319.

GLOBULARIA caule fruticoso, foliis lanceolatis tridentatis, integrisque. *Linn. p.* 888.

Alypum monspelienſium, s. Frutex terribilis. *Bauh. hist.* 1. *p.* 598.

GLOBULARIA caule herbaceo, foliis radicalibus tridentatis, caulinis lanceolatis. *Linn. syst. p.* 888.

Bellis caerulea, caule folioso. *Bauh. pin.* 262.

GNAPHALIUM foliis linearibus, caule fruticoso ramoso, corymbo composito. *Linn. syst. p.* 1210.

Elichryſum s. Staechas citrina anguſtifolia. *Bauh. pin.* 264.

GNAPHALIUM caule erecto dichotomo, floribus pyramidatis axillaribus. *Linn. sp. pl.* 857.

Gnaphalium minimum alterum noſtras ſtoechadis citrinae foliis tenuiſſimis. *Pluk. alm.* 172. *t.* 298. *f.* 2.

GNAPHALIUM caule ſimpliciſſimo foliis amplexicaulibus lanceolatis denticulatis, corymbo compoſito terminali. *Miſc. Taurin. tom.* 1. *p.* 95. *cum deſcript.*

Hujus iconem exhibet Tab. IV.

HIPPOCREPIS leguminibus ſeſſilibus ſolitariis. *Linn. syst. p.* 1169.

Ferrum equinum ſiliqua ſingulari. *Bauh. pin.* 349.

HYOSCYAMUS foliis petiolatis, floribus ſeſſilibus. *Linn. syst. p.* 932.

Hyoſcyamus albus major. *Bauh. pin.* 169.

HYOSERIS fructibus ſubgloboſis glabris, caule ramoſo. *Linn. syst. p.* 1196.

Hedypnois annua. *Tournef. inſt.* 478.

HYOSERIS ſcapis unifloris nudis, foliis glabris lyrato-haſtatis angulatis. *Linn. syst. p.* 1196.

Dens

Dens leonis minor foliis radiatis. *Bauh. pin.* 129.

ILLECEBRUM floribus bracteis nitidis obvallatis, caulibus procumbentibus, fol. laevibus. *Linn. ſyſt. p.* 943.

Paronychia hiſpanica. *Cluſ. hiſt.* 2. 183.

INULA foliis dentatis hirſutis; radicalibus ovatis, caulinis lanceolatis amplexicaulibus, caule paucifloro. *Linn. ſyſt. p.* 1218.

Aſteris altera ſpecies apula. *Col. ecphr.* 1. *p.* 251. *t.* 253.

INULA foliis oblongis integris hirſutis caule piloſo corymboſo floribus confertis. *Linn. ſyſt. p.* 1218.

Conyza 3. auſtriaca. *Cluſ. hiſt. xx.*

LAGURUS ſpica ovata ariſtata. *Linn. ſyſt. p.* 878.

Gramen ſpicatum tomentoſum longiſſimis ariſtis donatum. *T. Scheuch. gram.* 58.

LAPSANA calycibus fructus undique patentibus, radiis ſubulatis, foliis lanceolatis indiviſis. *Linn. ſyſt. p.* 1197.

Hieracium ſiliqua falcata. *Bauk. pin.* 128.

LATHYRUS pedunculis unifloris cirrho terminatis, cirrhis diphyllis: foliolis linearibus. *Linn. ſyſt. p.* 1164.

Lathyrus anguſtiſſimo folio, ſemine anguloſo. *Tourneſ. inſt.* 395.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis aphyllis, ſtipulis ſagittato-cordatis. *Linn. ſyſt. p.* 1164.

Vicia lutea, foliis convolvuli minoris. *Bauh. pin.* 345.

LAVANDULA foliis lanceolato-linearibus, ſpica comoſa. *Linn. ſyſt. p.* 1097.

Staechas brevioribus ligulis. *Cluſ. hiſt.* 1. *p.* 344.

LAVATERA caule arboreo, foliis ſeptemangularibus tomentoſis plicatis, pedunculis confertis unifloris axillaribus. *Linn. ſyſt. p.* 1147.

Malva arboreſcens. *Dod. pempt.* 653.

LEPIDIUM foliis lanceolatis amplexicaulibus dentatis. *Linn. ſyſt. p.* 1127.

Draba umbellata, ſive draba major capitulis donata. *Bauh. pin.* 109.

LINUM calycibus ſubulatis, foliis lanceolatis ſtrictis, mucronatis, margine ſcabris. *Linn. ſyſt. p.* 968.

Paſſerina lobelii. *Bauh. hiſt.* 3. *p.* 454.

LOTUS leguminibus ſubquinatis, arcuatis compreſſis, caulibus diffuſis. *Linn. ſyſt. p.* 1179.

Lotus peculiaris ſiliquoſa. *Cam. hort.* 91. *t.* 25.

LOTUS capitulis aphyllis, foliis ſeſſilibus quinatis. *Linn. ſyſt. p.* 1179.

Dorycnium monſpelienſium. *Lob. ic.* 51.

LOTUS capitulis dimidiatis, caule diffuſo ramoſiſſimo, foliis tomentoſis. *Linn. ſyſt. p.* 1179.

Lotus ſiliquoſa maritima lutea cytiſi facie. *Barrel. ic.* 1031.

LYSIMACHIA calycibus corollam ſuperantibus, caule erecto ramoſiſſimo. *Linn. ſyſt. p.* 919.

Linum minimum ſtellatum. *Bauh. pin.* 214.

LYTHRUM foliis alternis linearibus, floribus hexandris. *Linn. ſyſt. p.* 1045.

Salicaria hyſſopi folio latiore. *Hall. jen.* 147. *t.* 2. *f.* 3.

MEDICAGO pedunculis racemoſis, leguminibus cochleatis ſpinoſis, caule procumbente tomentoſo. *Linn. ſyſt. p.* 1180.

Medica marina. *Cluſ. hiſt. p.* 243.

MEDICAGO leguminibus reniformibus, margine dentatis, foliis pinnatis. *Linn. ſyſt. p.* 1180.

Loto affinis ſiliquis hirſutis circinnatis. *Bauh. pin.* 333.

MEDICA pedunculis multifloris, leguminibus cochleatis ſpinulis hamatis, ſtipulis integris. *Ger. Galloprov. p.* 518.

Medica echinata hirſuta. *Bauh. hiſt. p.* 386.

MENYANTHES foliis cordatis integerrimis, corollis ciliatis. *Linn. ſyſt. p.* 918.

Nymphaea lutea minor, flore ſimbriato. *Bauh. pin.* 194.

MYOSOTIS ſeminibus nudis, foliis hiſpidis, racemis folioſis. *Linn. ſyſt. p.* 913.

Echium luteum minimum. *Bauh. pin.* 255.

ONONIS pedunculis unifloris filo ſubterminatis, foliis ternatis ſtipulis dentatis, *Linn. ſyſt. p.* 1160.

Anonis puſilla villoſa, & viſcoſa purpuraſcente flore. *Tourn. inſt.* 408.

ORCHIS rad. ſubrotundis, galea longiſſime roſtrata, labello vomerem referente *Hall. orch. n.* 6.

Orchis macrophilla. *Col. ecphr. p.* 321.

ORCHIS radicibus ſubrotundis labello holoſericeo emarginato, medio proceſſu breviſſimo *Hall. orch. n.* 5.

Orchis fucum referens major foliis ſuperioribus candidis, & purpuraſcentibus. *Bauh. pin.* 83.

ORNITHOPUS foliis ternatis ſubſeſſilibus, impari maximo. *Linn. ſyſt. p.* 1168.

Scorpioides poſtulacae folio. *Bauh. pin.* 287.

ORNITHOPUS foliis pinnatis, leguminibus ſubarcuatis, *Linn. ſyſt. p.* 1168.

Ornithopodium minus. *Bauh. pin.* 350.

OTHONNA foliis pinnatifidis tomentoſis, laciniis ſinuatis, caule fruticoſo. *Linn. ſyſt. p.* 1235.

Jacoboea maritima. *Bauh. pin.* 131.

PAPAVER capſulis ſubgloboſis toroſis hiſpidis, caule folioſo multifloro. *Linn. ſyſt. p.* 1072.

Argemone capitulo breviore. *Bauh. pin.* 172.

PASSERINA foliis carnoſis extus glabris, caulibus tomentoſis. *Lynn. ſyſt. p.* 1004.

Thymelaea tomentoſa, foliis ſedi minoris. *Bauh. pin.* 463.

PHILLYREA foliis lanceolatis integerrimis. *Lin. hort. Cliff.*

Phillyrea anguſtifolia. *Bauh. pin.* 476.

PISTACIA foliis abrupte pinnatis: foliolis lanceolatis. *Linn. ſyſt. p.* 1290.

Lentiſcus vulgaris. *Bauh. pin.* 399.

PISTACIA foliis impari-pinnatis: foliolis ovatolanceolatis. *Linn. ſyſt. p.* 1290.

Tere-

Terebinthus vulgaris. *Bauh. pin.* 400.

PLANTAGO fol. linearibus dentatis, ſcapo tereti. *Linn. ſyſt. p.* 896.

Coronopus ſylveſtris hirſutior. *Bauh. pin.* 190.

PLANTAGO caule ramoſo ſuffruticoſo, foliis integerrimis, ſpicis aphyllis. *Linn. ſyſt. p.* 896.

Pſyllium majus erectum. *Bauh. pin.* 191.

PLANTAGO foliis lanceolatis flexuoſis villoſis, ſpica cylindrica erecta, ſcapo tereti foliis longiore. *Linn. ſyſt.* 895.

Holoſteum hirſutum albicans majus. *Bauh. pin.* 190.

POLYGALA floribus criſtatis racemoſis, caulibus herbaceis ſimplicibus procumbentibus, fol. lineari lanceolatis. *Linn. ſyſt. p.* 1154.

Polygala major. *Bauh. pin.* 215.

RHAMNUS inermis floribus diviſis ſtigmate triplici. *Linn. ſyſt. p.* 937.

Phylica elatior. *Bauh. pin.* 477.

RUBIA foliis ſenis. *Linn. ſyſt. p.* 893.

Rubia ſylveſtris aſpera. *Bauh. pin.* 33.

RUMEX floribus hermaphroditis: valvulis dentatis nudis, pedicellis planis reflexis. *Linn. ſyſt. p.* 990.

Acetoſa ocymi folio, bucephalophoros. *Col. ecphr.* 1. *p.* 151. *t.* 150.

SAGITTARIA foliis ſagittatis acutis. *Linn. ſyſt. p.* 1270.

Sagitta aquatica minor latifolia. *Bauh. pin.* 194.

SALVIA fol. ſinuato-ſerratis, corollis calyce anguſtioribus. *Linn. ſyſt. p.* 854.

Horminum verbenacae laciniis anguſtifolium. *Triumf. obſ.* 66. *t.* 66.

SCIRPUS culmo tereti nudo, ſpica ſubovata imbricata. *Linn. ſyſt. p.* 867.

Scirpus equiſeti capitulo majore. *T. Scheuchz. gram.* 360.

SCORPIURUS pedunculis ſubquadrifloris, leguminibus extrorſum ſpinis confertis acutis. *Linn. ſyſt. p.* 1169.
Scorpioides bupleuri folio, corniculis aſperis magis in ſe contortis, & convolutis. *Moriſ. hiſt.* 2. *p.* 127. *ſ.* 2. *t.* 11. *f. II.*

SCORZONERA foliis linearibus dentatis acutis, caule erecto. *Linn. ſyſt. p.* 1191.
Scorzonera foliis laciniatis. *Tourneſ. inſt.* 477.

SCROPHULARIA foliis cordatis: ſuperioribus alternis, pedunculis axillaribus bifloris. *Linn. ſyſt. p.* 1113.
Scrophularia peregrina. *Cam. hort.* 157. *t.* 43.

SCROPHULARIA foliis cordatis, pedunculis axillaribus ſolitariis dichotomis. *Linn. ſyſt. p.* 1114.
Scrophularia flore luteo. *Bauh. pin.* 236.

SHERARDIA foliis omnibus verticillatis, floribus terminalibus. *Linn. ſyſt. p.* 590.
Rubeola arvenſis repens caerulea. *Bauh. pin.* 334.

SIDERITIS herbacea decumbens, calycibus ſpinoſis: labio ſuperiore indiviſo. *Linn. ſyſt. p.* 1098.
Sideritis genus verticillis ſpinoſis. *Bauh. pin. hiſt.* 3. *p.* 428.

SILENE calycibus fructiferis pendulis inflatis angulis decem ſcabris. *Linn. ſyſt. p.* 1032.
Viſcago hirſuta ſicula, lychnidis aquaticae facie ſupina. *Dill. elth.* 421. *t.* 312. *f.* 404.

SILENE hirſuta, petalis emarginatis, flor. erectis, fructibus reflexis pedunculatis alternis. *Linn. ſyſt. p.* 1031.
Viſcago ceraſtii foliis, vaſculis pendulis anglica. *Dill. elth.* 417. *t.* 309. *f.* 398.

SISYMBRIUM ſiliquis axillaribus ſeſſilibus ſubulatis aggregatis, fol. repando-dentatis. *Linn. ſyſt. p.* 1132.
Eryſimum polyceratium s. corniculatum. *Bauh. pin.* 101.

SMILAX caule aculeato angulato, foliis dentato-aculeatis, cordatis novemnerviis. *Linn. ſyſt. p.* 1292.
Smilax aſpera fructu rubente. *Bauh. pin.* 296.

SON-

Sonchus foliis omnibus integris denticulato ſpinoſis, ramis unifloris, ſemifloſculis quinquedentatis. *Enum. nic. p.* 85.
Sonchus pedunculo nudo, foliis lanceolatis amplexicaulibus indiviſis, retrorſum argute dentatis. *Linn. ſyſt. pag.* 1192. ?

Spartium foliis ternatis, ramis angulatis ſpinoſis. *Linn. ſyſt. p.* 1156.
Acacia trifolia. *Bauh. pin.* 392.

Stachis ramis ramoſiſſimis, foliis lanceolatis glabris. *Linn. ſyſt. p.* 1110.
Sideritis viſcoſa cretica bitumen redolens. *Zan. hiſt.* 136.

Statice caule nudo paniculato, foliis ſpathulatis retuſis. *Linn. ſyſt. p.* 967.
Limonium maritimum minus, foliis cordatis. *Bauh. pin.* 192.

Tamus foliis cordatis indiviſis. *Linn. ſyſt. p.* 1292.
Bryonia ſylveſtris baccifera. *Bauh. prodr.* 135.

Teucrium foliis ſubtriſcupidatis linearibus, floribus ſeſſilibus. *Linn. ſyſt. p.* 1094.
Chamaepitys moſchata foliis ſerratis. *Bauh. pin.* 249.

Thlaspi ſiliculis ſubrotundis, foliis amplexicaulibus cordatis ſubſerratis. *Linn. ſyſt. p.* 1128.
Thlaſpi arvenſe perfoliatum majus. *Bauh. pin.* 106.

Tragopogon calycibus corolla brevioribus inermibus, foliis lyrato ſinuatis. *Linn. ſyſt. p.* 1191.
Chondrilla foliis cichorei tomentoſis. *Bauh. pin.* 130.

Tragopogon calycibus corolla radio longioribus, foliis integris nudis, pedunc. ſuperne incraſſatis. *Linn. ſyſt. pag.* 1191.
Tragopogon purpuro-caeruleum, porri folio, quod Arteſi vulgo. *Bauh. pin.* 274.

Trapa. *Linn. ſyſt. p.* 898.
Tribulus aquaticus. *Bauh. pin.* 194.

TRIFOLIUM ſpicis ſubovatis, calycibus inflatis, dorſo gibbis, caulibus proſtratis. *Linn. ſyſt. p.* 1178.
Trifolium pratenſe folliculatum. *Bauh. pin.* 329.

TRIFOLIUM ſpicis villoſis ovalibus, dentibus calycinis ſetaceis aequalibus. *Linn. ſyſt. p.* 1177.
Trifolium arvenſe humile ſpicatum s. Lagopus. *Bauh. pin.* 328.

TRIFOLIUM ſpicis villoſis conico-oblongis, dentibus calycinis ſetaceis ſubaequalibus, foliolis linearibus. *Linn. ſyſt. p.* 1177.
Trifolium montanum anguſtiſſimum ſpicatum. *Bauh. pin.* 328.

VALERIANA floribus monandris, foliis pinnatifidis. *Linn. ſyſt. p.* 860.
Valeriana foliis calcitrapae. *Bauh. pin.* 164.

VERONICA racemis lateralibus, fol. ovatis rugoſis dentatis ſeſſilibus, caule debili. *Gerar. p.* 324. *Linn. ſyſt. p.* 849.
Chamaedrys ſpuria minor rotundifolia. *Bauh. pin.* 249.

VERONICA, floribus ſolitariis, fol. cordatis inciſis pedunculo longioribus. *Linn. ſyſt. p.* 849.
Alſine veronicae foliis, floſculis cauliculis adhaerentibus. *Bauh. pin.* 250.

VICIA leguminibus ſeſſilibus reflexis piloſis pentaſpermis, corollae vexillis villoſis. *Linn. ſyſt. p.* 1166.

VICIA ſiliquis ſeſſilibus erectis foliis imis ovatis, ſuperioribus linearibus. *Hall. helv. p.* 598.
Vicia anguſtifolia. *Riv. t.* 55.

URTICA foliis oppoſitis ovatis ſerratis, amentis fructiferis globoſis. *Linn. ſyſt. p.* 1265.
Urtica urens pilulas ferens. *Bauh. pin.* 232.

ADDI-

ADDITION
AUX RÉFLEXIONS
Sur le Fluide Élaſtique
PAR M. DE SALUCE.

IL m'eſt tombé entre les mains un livre, qui a pour titre *l'Artillerie raiſonnée*, après que mon mémoire a été imprimé, & j'y ai trouvé quelques propoſitions, qui ſont entiérement oppoſées à ce que j'ai avancé, & qui en même-tems ne me ſemblent pas appuyées ni à une théorie fort-éclairée, ni à des expériences fort-exactes: je ne rapporterai que les plus frappantes de celles que j'ai déja parcouru.

1. La premiere (*pag.* 86.) porte en ſubſtance, qu'en parvenant à diſpoſer le canal de la lumiére de maniére que le feu prenne au centre de la charge, il en réſulte des petites différences dans les portées; je ne lui conteſterai pas le fait, lorſque la charge ſera proportionnée à l'arme; mai je dirai ſeulement en paſſant, que comme on réüſſit à accélérer par là l'inflammation totale de la poudre, on peut auſſi augmenter la charge, c'eſt enſuite à l'expérience à juger ſi l'avantage, qui réſulte ainſi d'un plus grand effort, n'eſt point balancé par bien d'autres inconvéniens, & entr' autres par ceux que nous avons indiqué (*pag.* 138.).

2. La ſeconde propoſition (*pag.* 91.) eſt que l'objet des chambres, qu'on fait aux piéces de 24 & de 16, *eſt de diminuer l'effort de la poudre ſur la lumiére*, ce qui eſt abſurde: car cet effort ſe faiſant par la diſtribution uniforme du fluide dévélopé, la preſſion eſt égale dans tous les points: il ſe ſerait d'ailleurs exprimé plus exactement dans

la

la ſeconde raiſon, qu'il apporte, ſavoir de *la plus grande épaiſſeur* de l'arme dans cet endroit, s'il avait dit, que l'effet en eſt modifié.

3. La troiſiéme, qu'il parait déduire de l'expérience (*pag.* 105.) ne me ſemble pas mériter d'être réfutée ſérieuſement; je ne fairai que la rapporter dans ſon entier, & je prierai les Lecteurs de voir ce que j'ai dit à cet égard dans le Chap.e premier; *L'on a trouvé*, dit-il, *que les piéces chargées ſans bouchon ſur la poudre portoient réguliérement plus loin, que celles qu'on tirait avec des bouchons refoulés, ſavoir de ſix ou huit coups ſur la poudre, ſuivant l'uſage, & de ſix ſur le boulet &c.* Nous obſerverons enfin, qu'il faut qu'il ait employé de très-petites quantités de poudre dans les piéces, dont il a fait uſage, & cela devient alors très-naturel; mais c'eſt un des préjugés, dont on n'a pas encore pû ſe défaire, & qui eſt la ſource de beaucoup de maximes équivoques, & ſouvent fauſſes; nous en avons un exemple dans *la théorie du jet des bombes*, que les Auteurs modernes n'ont pas encore voulu abandonner, quelqu'un d'entr'eux s'efforçant même de nous perſuader, qu'elle eſt aſsès exacte, & que les différences, qui réſultent dans la pratique ne ſont d'aucune conſidération: généralement je crois, que les eſſais en petit dans ce qui regarde l'Artillerie ſont non ſeulement ſuperflus, mais même pernicieux, parceque nous ne connaiſſons point les loix, ſuivant leſquelles agiſſent toutes les cauſes, qui concourent dans un effet; c'eſt pour cela auſſi que tous les Problèmes qui y ont raport ſe réduiſent en parlant à la rigueur à des cas particuliers.

4. L'expérience nous apprend, que de deux qualités de poudre il arrive ſouvent, que dans les petites charges une a l'avantage ſur l'autre, & que non ſeulement elle ne le conſerve plus dans les grandes (*a*), mais que ſa force en eſt alors diminuée, & j'obſerve, que c'eſt celle, qui eſt plus

(*a*) Manuel de l'Artificier. pag. 16.

plus facile à s'enflammer, juſqu'à un certain point, qui a l'avantage dans les petites charges, & au contraire, que celle qui a moins d'inflammabilité gagne dans le ſervice en grand.

Ne ſerait-ce point, parceque dans les grandes charges le plus ou moins grand effort, dépand entiérement de l'intenſité de la flamme dont la matière eſt ſuſceptible, au lieu que dans les petites charges il n'eſt pas néceſſaire, qu'elle ſoit ſi grande, parceque elles ſont bien-tôt détruites, & qu'elles ſont dans un moindre raport avec l'arme, pendant que le diamètre de la lumiére ſemble en avoir un plus grand dans les petites, que dans les grandes armes?

5. Je ne ſais de même pas concevoir ce qu'il prétend déduire par ce raiſonnement (*pag.* 142. *à la fin*): *Le peu de longueur de l'ame du canon fait auſſi que le boulet perd moins de ſon mouvement; & qu'il éprouve une moindre réſiſtance de la part de l'air qui s'oppoſe à ſa ſortie.* Cette raiſon de la *moindre réſiſtance de la part de l'air* ne me parait pas conforme aux principes de phyſique, car la colonne d'air péſe & reſiſte également ſur un cilindre, qu'il ſoit court ou long, puiſqu'elle eſt toujours en équilibre avec le reſte de l'Atmoſphére.

ERRATA, ET ADDENDA.

Pag.	6.	lin. 12.	tranſverſum	*lege* tranſverſim
		24.	&	ei
	8.	7.	Ammeniana	Ammaniana
	9.	3.	calyci	calyce
	9.	18.	un	um den
	11.	25.	albidus	dilute violaceus
	12.	32.	ſulco	& ſulco
	15.	6.	ſeparat	ſuperat
		18.	aliis	alis
	16.	14.	autem	*dele* autem
	18.	19.	parum	ex

Pag. 19.	lin. ult.	*Ebro*	*Ebrodunum*
27.	13.	neutrum	neutra
29.	3.	Jeman	Alyſſo M.
31.	23. & 24.	*dele* in M. Chetillon &c. uſque ad provenit	
33.	8.	forte	fere
37.	23.	recentiorem	recentiorum
39.	7.	lutea	lutea ſunt
44.	27.		*dele* ad caulem
45.	7.		*dele* ſynonimum columnae
	14.	ad caulem	amplexicaulibus

Pag. 51. lin. 28. *Lamium montanum &c.* leg. *Lamium garganicum ſubinc. fl. purpuraſc. cum labio ſuperiocrenato D. Micheli apud* TILLI *piſ.*

52.	3.	Cihnopodium	leg. Clinopodium
53.	4.	pſiyllium	pſyllium
53.	10.	16.	campanulatum
55.	6.	triba	triloba
55.	18.	phiſalodes	phyſalodes
62.	27.	57.	Cardamine lunaria
63.	7.	viſcoſum	viſcoſa
64.	3.	hirſutus	hirſuta
	19.	ſquarroſum	incarnatum
65.	4.	galloprovinciale	caput galli
66.	17.	biennis	pimpinelloides
69.	14.	ſerpilifolia	ſerpillifolia
70.	19.	*Monoſtylae*	1. *Monoſtylae*
71.	7.	Aquilegia ſilveſtris	Aquilegia ſilveſtris*
	8.	Nigella damaſcena	Nigella damaſcena*
	18.	ulmaria	ulmaria *
73.	11.	*Tetrantherae*	*Pentantherae*
75.	24.	ſcalinus	ſecalinus

Stirpes

Stirpes praetermiſſae ſuis locis inſerendae.

Pag. 50.		Veronica latifolia *
		Valeriana rubra *
51.	Poſt *Thymum*	Hyſſopus officinalis *
		Satureja juliana *
		hortenſis *
		montana *
	Ante *Lamium*	Ocynum baſilicum
		fruteſcens
52.		Meliſſa grandiflora *
53.		Antirrhinum minus *
		Scrophularia vernalis *
54.	Poſt *Ilicem aquifolium*	Vitex agnus caſtus
57.		Ariſtolochia piſtolochia
59.		Santolina annua
62.		Eryſinum cheirantoides
65.		Lathyrus articulatus
		Robinia caragana
		Sium ſiculum
66.		Chaerefolium aromaticum
67.		Malva hiſpanica
68.		Rhus vernix
		toxicodendron
70.		Crataegus aria *
		Meſpilus cotoneaſter *
71.		Aquilegia alpina *
71.	Poſt *Iſopyrum*	Ranunculus ficaria *
		ſceleratus *
		aconitifolius *
		nivalis *
		bulboſus *
		repens *
		acris *
		arvenſis *
		aſiaticus

Pag.

Pag. 71.		Potentilla verna * rupeſtris * ſupina Potentilla *foliis ternatis hirſutis caule erecto umbellifero.* HALL. *gott. p.* 108.
71.		Geum montanum *
71.	Poſt *Geum*	Drias octopetala *
74.		Polygonum divaricatum *
75.	Poſt *cyperum*	Scirpus palùſtris *
76.	Poſt *rutam murariam*	Aſplenium . . . *lingua cervina foliis coſtae innaſcentibus* T.
76.		Polipodium cambricum

Pag.	80.	lin. 5. praecipuae	leg. praecipue
	82.	23. erupuiſſe	erupiſſe
		25. ſpatium, exiguum	ſpatium exiguum
	84.	14. quidquod	quid quod
		28. centeſima	centeſimam
	86.	19. tympanitide	tympanite
	91.	16. cruſta in	cruſta quando in
	92.	21. ut praeterea	ut propterea
	144.	pen. alkalici	alkalicis
	148.	7. bacillo, fit	bacillo fit,
	162.	9. (*k*)	(*l*)
		10. (*l*)	(*k*)
		17. Vid. inf. not. *g.*	Vid. inf. not. *q.*
		pen. admicta	admixta
	163.	pen. *refroit-elle*	*refroidit-elle*
	180.	25. tollerent	tolerent
	189.	ult. elatetium	elaterium
	195.	16. quando	quomodo
		29. aëri	aëre
	198.	7. quae rarior aër	quo rarior aër
	205.	19. candatis	caudatis
	210.	1.	*dele*

LETTRE

DE M. EULER A M. DE LA GRANGE.

DEpuis ma dernière lettre j'ai réuſſi à ramener au calcul la propagation du Son, en ſuppoſant à l'air toutes les trois dimenſions, & quoique je ne doute pas que Vous n'y ſoyés parvenu plus heureuſement, je ne crois pouvoir mieux témoigner mon attachement envers Votre Illuſtre Société qu'en lui préſentant mes Recherches ſur ce même ſujet.

RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DES ÉBRANLEMENS DANS UNE MILIEU ÉLASTIQUE.

EN conſidérant le milieu dans l'état d'équilibre ſoit ſa denſité $= 1$, & ſon élaſticité balancée par le poid d'une colonne du même fluide, dont la hauteur $= h$; Je commence par conſidérer un élément quelconque du fluide qui dans l'état d'équilibre ſe trouve au point Z (*fig.* 1.) déterminé par les trois coordonnées perpendiculaires entr'elles $AX = X$, $XY = Y$ & $YZ = Z$, & que par l'agitation ce même élément ait été tranſporté en ζ, dont les coordonnées ſoient $Ax = x$, $xy = y$, $y\zeta = \zeta$, qui ſeront certaines fonctions des premiéres X, Y, Z pour un inſtant donné. Soit donc

$$dx = LdX + MdY + NdZ$$
$$dy = PdX + QdY + RdZ$$
$$d\zeta = SdX + TdY + VdZ.$$

Enſuite je conſidére un volume infiniment petit de fluide, qui dans l'état d'équilibre ait la figure piramidale $Z\xi\eta\theta$ (*fig.* 2.) rectangulaire, qui par l'agitation ſoit tranſporté en $\zeta\lambda\mu\nu$, dont la figure ſera auſſi piramidale, & poſant pour l'état d'équilibre

du point	les coordonnées		
Z	$X,$	$Y,$	Z
ξ	$X+\alpha,$	$Y,$	Z
η	$X,$	$Y+\beta,$	Z
θ	$X,$	$Y,$	$Z+\gamma$

le volume de la piramide $Z\xi\eta\theta$ ſera $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$.

On aura enſuite pour l'état d'agitation

du point	les trois coordonnées		
ζ. Ax	$= x,$	$xy = y,$	$y\zeta = \zeta$
λ. AL	$= x + L\alpha,$	$Ll = y + P\alpha,$	$l\gamma = \zeta + S\alpha$
μ. AM	$= x + M\beta,$	$Mm = y + Q\beta,$	$m\mu = \zeta + T\beta$
ν. AN	$= x + N\gamma,$	$Nn = y + R\gamma,$	$n\nu = \zeta + V\gamma$

Il s'agit maintenant de trouver le volume de la nouvelle piramide $\zeta\lambda\mu\nu$, qu'on voit être compoſée de ces priſmes $ymn\zeta\mu\nu + yln\zeta\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylm\zeta\lambda\mu$. Prenant pour cela la ſolidité de chaque part, on trouvera cette ſolidité =

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + n\nu)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(y\zeta + m\mu + n\nu)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(l\lambda + m\mu + n\nu)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + m\mu)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + V\gamma)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$-\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn - \frac{1}{3}T\beta\Delta yln + \frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm.$$

Enſuite

Enſuite on trouve les aires de ces triangles, à cauſe de $xL = L\alpha$, $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$, comme il ſuit

$\Delta ymn = \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} MN(2y + Q\beta + R\gamma)$

$- \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) = \frac{1}{2} Q\beta \times xN - \frac{1}{2} R\gamma \times xM$

$= \frac{1}{2} \beta\gamma (NQ - MR)$.

$\Delta yln = \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) + \frac{1}{2} LN(2y + P\alpha + R\gamma)$

$- \frac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2} R\gamma \times xL - \frac{1}{2} P\alpha \times xN$

$= \frac{1}{2} \alpha\gamma (LR - NP)$.

$\Delta ylm = \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} LM(2y + P\alpha + Q\beta)$

$- \frac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2} Q\beta \times xL - \frac{1}{2} P\alpha \times xM$

$= \frac{1}{2} \alpha\beta (LQ - MP)$.

De-là nous tirons la ſolidité de notre piramide $\zeta\lambda\mu\nu$ dans l'état d'agitation $= -\frac{1}{6} \alpha\beta\gamma S(NQ - MR) - \frac{1}{6} \alpha\beta\gamma T$ $(LR - NP) + \frac{1}{6} \alpha\beta\gamma V(LQ - MP)$, & partant la denſité du milieu agité en ζ ſera $= 1 : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, & poſant Π pour la hauteur de la colomne qui y balance l'élaſticité, nous aurons $\Pi = h : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, laquelle étant une fonction des trois variables X, Y, Z poſons $d\Pi = EdX + FdY + GdZ$, de ſorte que $E = (\frac{d\Pi}{dX})$, $F = (\frac{d\Pi}{dY})$, $G = (\frac{d\Pi}{dZ})$. Soit pour abréger

$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = K$, de sorte que $\Pi = \frac{h}{K}$; si nous concevons dans l'état d'équilibre un point Z' infiniment proche de Z déterminé par ces coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, ce point se trouvera après l'agitation en ζ', dont les coordonnées seront

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$
$$y + PdX + QdY + RdZ,$$
$$\zeta + SdX + TdY + VdZ,$$

donc réciproquement la position du point ζ' infiniment proche de ζ dans l'état troublé étant donnée par les coordonnées $X + \alpha$, $Y + \beta$, $Z + \gamma$ son lieu dans l'état d'équilibre sera déterminé par les coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, de sorte que

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K}$$

$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K}$$

$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP).}{K}$$

Delà l'élasticité en ζ étant $\Pi = \frac{h}{K}$, elle sera en $\zeta' = \Pi + EdX + FdY + GdZ$, ou bien si nous posons pour abréger

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$$
$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$$
$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C$$

l'élasticité en ζ' sera exprimée par $\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$ la densité y étant $\frac{1}{K}$.

Considérons maintenant un parallélepipède rectangle infiniment petit $\zeta bcd\alpha\beta\gamma\delta$ (fig. 3.) dont les cotés paralleles à

nos

nos coordonnées soient $\zeta b = \alpha$, $\zeta c = \beta$, $\zeta d = \gamma$, son volume sera $= \alpha\beta\gamma$ & sa masse $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$. Pour connoître les forces, dont ce parallélepipéde est sollicité, cherchons d'abord l'élasticité du milieu à chacun de ses angles de la manière suivante

du point	les coordonnées			l'élasticité
ζ	x,	y,	ζ,	Π
b	$x+\alpha$,	y,	ζ,	$\Pi + \frac{A\alpha}{K}$
c	x,	$y+\beta$,	ζ,	$\Pi + \frac{B\beta}{K}$
d	$x+\alpha$,	$y+\beta$,	ζ,	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K}$
α	x,	y,	$\zeta+\gamma$,	$\Pi + \frac{C\gamma}{K}$
β	$x+\alpha$,	y,	$\zeta+\gamma$,	$\Pi + \frac{A\alpha + C\gamma}{K}$
γ	x,	$y+\beta$,	$\zeta+\gamma$,	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K}$
δ	$x+\alpha$,	$y+\beta$,	$\zeta+\gamma$,	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

De-là il est clair, que considérant les faces opposées $\zeta c\alpha\gamma$ & $bd\beta\delta$, les pressions sur celle-ci surpassent les pressions sur celle-là de la quantité $\frac{A\alpha}{K}$; donc l'aire de ces faces étant $\beta\gamma$, il en résulte une force suivant la direction $Ax = -\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$; de la même manière le parallélepipéde sera poussé suivant la direction xy par la force $= -\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$, & suivant la direction $y\zeta$ par la force $= -\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$. Donc la

masse

masse de ce parallélepipéde étant $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$ si nous introduisons la hauteur g, par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, en exprimant le tems écoulé t en secondes, nous aurons pour la connoissance du mouvement les trois équations suivantes.

$$(\frac{ddx}{dt^2}) = -2gA,$$
$$(\frac{ddy}{dt^2}) = -2gB,$$
$$(\frac{ddz}{dt^2}) = -2gC.$$

Ces formules étant générales pour toutes les agitations possibles, je ne considére ici que les cas où ces agitations sont quasi infiniment petites; pour cet effet je pose $x = X + p$, $y = Y + q$, & $z = Z + r$, de sorte que p, q, r sont des quantités infiniment petites; delà nous aurons

$$dp = (L - 1)\,dX + M\,dY + N\,dZ;$$
$$dq = P\,dX + (Q - 1)\,dY + R\,dZ$$
$$dr = S\,dX + T\,dV + (V - 1)\,dZ,$$

& partant à peu-près $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $V = 1$, & $K = 1$; mais pour le différentiel de Π nous aurons

$$E = -h\left((\frac{dL}{dX}) + (\frac{dQ}{dX}) + (\frac{dV}{dX})\right)$$
$$F = -h\left((\frac{dL}{dY}) + (\frac{dQ}{dY}) + (\frac{dV}{dY})\right)$$
$$G = -h\left((\frac{dL}{dZ}) + (\frac{dQ}{dZ}) + (\frac{dV}{dZ})\right)$$

Ensuite nous trouvons $A = E$, $B = F$, $C = G$. Pour nous débarasser encore des autres lettres, remarquons que

$$L = 1 + (\frac{dp}{dX}),\ Q = 1 + (\frac{dq}{dY}),\ V = 1 + (\frac{dr}{dZ})$$

de sorte qu'outre les coordonnées X, Y, Z, avec le tems t

il

il ne reſte dans le calcul que les lettres p, q, r, qui marquent le déplacement de chaque point. Car ſubſtituant ces valeurs, que nous venons de trouver, le mouvement cauſé par une agitation quelconque mais fort petite, ſera déterminé par les trois équations ſuivantes

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right),$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right).$$

ou bien poſant $\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = u$ nous aurons $\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dX}\right)$, $\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dY}\right)$, & $\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dZ}\right)$, d'où il eſt aiſé de conclure $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dZ^2}\right)$, d'où il faut déterminer la nature de la fonction u déterminée par les coordonnées X, Y, Z, & le tems t.

Delà il n'eſt pas difficile de trouver une infinité de ſolutions particuliéres, comme

$$p = \beta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$q = \gamma\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$r = \delta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

pourvû que $\alpha = \sqrt{2gh\,(\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)}$ où β, γ, δ ſont des quantités quelconques, & φ marque une fonction quelconque. Donc quelques valeurs qu'on prenne on aura toujours le cas d'un certain ébranlement, dont on pourra déterminer la continuation. Mais pour notre deſſein il s'agit de trouver un tel cas, où l'ébranlement initial aura été renfermé dans un petit eſpace, d'où il s'eſt répandu enſuite en tout ſens.

Soit

Soit donc A le centre de l'agitation primitive & posons $p = Xs$, $q = Ys$, $r = Zs$, & s sera une fonction du tems t, & de la quantité $\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = V$ qui marque la distance du point A. Donc puisque $ds = dt\,(\frac{ds}{dt}) + dV\,(\frac{ds}{dV})$ nous aurons $ds = dt\,(\frac{ds}{dt}) + (\frac{XdX + YdY + ZdZ}{V}) \times (\frac{ds}{dV})$, & puis $(\frac{dp}{dX}) = s + \frac{X^2}{V}(\frac{ds}{dV})$, $(\frac{dq}{dY}) = s + \frac{Y^2}{V}(\frac{ds}{dV})$, $(\frac{dr}{dZ}) = s + \frac{Z^2}{V}(\frac{ds}{dV})$, donc $u = (\frac{dp}{dX}) + (\frac{dq}{dY}) + (\frac{dr}{dZ}) = 3s + V(\frac{ds}{dV})$; maintenant aiant $(\frac{ds}{dX}) = \frac{X}{V}(\frac{ds}{dV})$, $(\frac{dV}{dX}) = \frac{X}{V}$, notre premiére équation deviendra $\frac{X}{2gh}(\frac{ddx}{dt^2}) = \frac{3X}{V}(\frac{ds}{dV}) + \frac{X}{V}(\frac{ds}{dV}) + X(\frac{ddx}{dV^2})$ ou $\frac{1}{2gh}(\frac{ddx}{dt^2}) = \frac{4}{V}(\frac{ds}{dV}) + (\frac{ddx}{dV^2})$, à laquelle se réduisent aussi les deux autres; & l'éloignement du point Z depuis le centre A sera $Vs = s\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = \sqrt{(pp + qq + rr)}$ qui en marque le déplacement par rapport à l'état d'équilibre, de sorte que le rayon d'une couche sphérique, qui dans l'état d'équilibre étoit $= V$, sera à présent $= V + Vs$. Donc si nous posons $Vs = u$, ou $s = \frac{u}{V}$ afin que u exprime le changement de cette couche, la particule u sera déterminée par cette équation

$$\frac{1}{2gh}(\frac{ddu}{dt^2}) = \frac{-2u}{V^2} + \frac{2}{V}(\frac{du}{dV}) + (\frac{ddu}{dV^2}).$$

Après plusieurs recherches j'ai enfin trouvé que cette équation admet une résolution générale semblable au cas, où l'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension. Que

$\varphi\zeta$ marque une fonction quelconque de ζ, & qu'on indique son différentiel de cette façon $d\cdot\varphi\zeta = d\zeta\,\varphi'\zeta$. Cela posé, on verra qu'on satisfait à notre équation en supposant $u = \frac{A}{V^2}\varphi[V \pm t\sqrt{(2ggh)}] - \frac{A}{V}\varphi'[V \pm t\sqrt{(2gh)}]$. Donc pour le commencement de l'agitation nous aurons cette équation $u = \frac{A}{V^2}\varphi V - \frac{A}{V}\varphi' V$; d'où l'on voit que pour appliquer cette formule à la propagation du Son la fonction $\varphi\zeta$ doit toujours être $= 0$ excepté le cas, où la quantité ζ est extrémement petite. Or il faut que la fonction $\varphi'\zeta$ ait la même proprieté & encore celle-ci $\varphi''\zeta$, en supposant $d\varphi'\zeta = d\zeta\,\varphi''\zeta$, afin que non seulement la quantité u, mais aussi la viteſſe $(\frac{du}{dt})$ s'évanoüiſſe au commencement par tout, excepté dans le petit espace autour de A où s'est fait l'ébranlement primitif.

Que le caractère ψ marque des fonctions discontinues de la même nature, & nous aurons la solution générale qui suit

$$u = \frac{A}{V^2}\varphi[V + t\sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V}\varphi'[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B}{V^2}\psi[V - t\sqrt{(2gh)}] - \frac{B}{V}\psi'[V - t\sqrt{(2gh)}]$$

& pour la viteſſe

$$(\frac{du}{dt}) = \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V^2}\varphi'[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V}\varphi''[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V^2}\psi'[V - t\sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V}\psi''[V - t\sqrt{(2gh)}].$$

Delà il est clair qu'une couche sphérique, dont le rayon $= V$ demeure en repos tant que la formule $V - t\sqrt{(2gh)}$

ne devient aſsès petite, ou moindre que le rayon de la petite ſpére ébranlée au commencement; & partant l'agitation primitive ſera répandue à la diſtance $= V$ après le tems $t = \frac{V}{\sqrt{(2gh)}}$ ſecondes, d'où il s'enſuit la même viteſſe du Son que Newton a trouvé, c'eſt-à-dire plus petite que ſelon les expériences. D'où je conclus qu'aïant ſuppoſé dans ce calcul les ébranlemens infiniment petits, leur grandeur cauſe une propagation plus prompte.

Enſuite ces formules nous apprennent que lorſque les diſtances V ſont fort grandes, en ſorte que les termes diviſés par V^2 s'évanoüiſſent à l'égard des autres diviſés par V, tant les petits eſpaces u, que les viteſſes $(\frac{du}{dt})$ diminuent en raiſon des diſtances; d'où l'on peut juſtement juger de l'affoibliſſement du Son par des grandes diſtances.

Voila mes Recherches que vous pourrés inſérer, MONSIEUR, *dans vôtre ſecond Volume ſi vous le jugés à propos, &c.*

Berlin ce 1.r Janvier 1760.

NOUVELLES RECHERCHES
SUR LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON.

PAR M. DE LA GRANGE.

CHAPITRE PREMIER.

Remarques sur la Théorie de la propagation du Son, donnée par M. Newton.

1. SOIENT (*fig.* * *plan.* 1.) E, F, G trois particules d'air en repos, placées sur la droite BC à des distances égales l'une de l'autre; imaginons que ces particules parviennent, dans un tems quelconque t, en ε, φ, γ; & supposons avec M. Newton (*Prop.* 47. *liv. II. des Principes Mathématiques*) que la loi de leur mouvement soit renfermée dans une seule courbe PKS (*fig.* ** *plan.* 1.) de telle maniére qu'en faisant $PH = t$ & prenant les portions d'arc HI, IK égales entr'elles, & qui aient un rapport donné aux distances primitives EF, FG, les abscisses correspondantes PL, PM, PN soient égales aux espaces parcourus $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$; il est clair qu'on aura $\varepsilon\gamma = EG - LN$; par conséquent, si on suppose que l'élasticité de l'air soit en raison inverse de sa densité, l'élasticité de l'air condensé en $\varepsilon\gamma$ sera à son élasticité naturelle, que je nomme E, en raison inverse de $\varepsilon\gamma$ à EG, ou de $EG - LN$ à EG; donc l'élasticité de la particule F transportée en φ, sera exprimée par $\frac{E \times EG}{EG - LN}$. Par le même raisonnement on trouvera, en coupant dans l'arc PKS, les parties HF, DK égales à HI, IK, & menant les ordonnées FQ, DR, que l'élasticité de la particule E en ε sera $= \frac{E \times EG}{EG - QM}$, & celle de la particule G en $\gamma = \frac{E \times EG}{EG - MR}$; d'où l'excès de l'élasticité de l'air en ε sur son élasticité

en γ sera $E \times EG \times \left(\frac{1}{EG - QM} - \frac{1}{EG - MR}\right) =$ $E \times EG \times \frac{QM - MR}{(EG - QM) \times (EG - MR)} =$ (à cause que les excursions des particules sont fort petites par l'hyp.) $E \times \frac{QM - MR}{EG}$. Cette quantité est la force qui fait mouvoir la partie du milieu φ, ou $\varepsilon\gamma$, dont la masse est $D \times EG$, en posant D pour la densité naturelle de l'air; donc la force accélératrice de la particule φ sera $= \frac{E}{D} \times \frac{QM - MR}{EG^2}$; or la loi du mouvement de cette particule demande qu'elle soit sollicitée par une force accélératrice $= \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{DI^2} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{KH^2}$, h étant la hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le tems T; donc on doit avoir $\frac{E}{D} \times \frac{QM - MR}{EG^2} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{KH^2}$ ce qui se réduit, en supposant $KH = \alpha EG$, à $\frac{E}{D} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{1}{\alpha^2}$; d'où l'on tire $\alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{T^2 D}{2Eb}\right)}$, la nature de la courbe PKS demeurant indéterminée.

Delà résulte donc cette conclusion, dont l'exactitude ne peut être révoquée en doute, savoir que la loi des mouvemens des particules de l'air, n'est pas unique & déterminée, comme l'a crû M. Newton, mais que, soit celle des pendules adoptée par ce grand Géomètre, soit celle des corps qui tombent par leur pésanteur, que M. Cramer jugeoit absurde & contradictoire, ou toute autre qu'on imagine à volonté, a également lieu & peut être indifféremment employée dans la solution Analitique. Je dis dans la *solution Analitique*: car, lorsqu'il s'agira de déterminer cette loi dans des cas particuliers, il faudra encore avoir égard aux premiers ébranlemens des particules, donnés par l'hypotése.

2. J'avois

2. J'avois déja trouvé cette conclusion générale dans le premier Chap. de mes *Recherches sur la nature & la propagation du Son* (*) imprimées dans le Volume précédent; mais elle m'avoit paru alors si paradoxe & si éloignée de la nature de la question que j'avois cru pouvoir la regarder comme une preuve de l'insuffisance des Principes de M. Newton. Or je vais démontrer ici que cette même conclusion est au contraire entiérement conforme à la Théorie de la propagation du Son que j'ai donnée dans le Chap. I. de la seconde Section des *Rech. citées.*

Qu'on considére une particule quelconque de la fibre AD dont la distance à la particule E soit x dans l'état d'équilibre; on trouvera aisément, par la construction ci-dessus, que l'espace parcouru par cette particule dans le tems t sera égal à l'abscisse qui répond à l'arc $PH = t$ diminué d'un arc $= \alpha x$; c'est-à-dire à un arc $= t - \alpha x$. Or quelle que soit la nature de la courbe PHS, il est constant qu'on peut en regarder les arcs, comme des fonctions données des abscisses correspondantes, & de même les abscisses comme des fonctions des arcs; donc l'espace parcouru par une particule quelconque de la fibre AD, pendant le tems t sera exprimé généralement par $\varphi(t - \alpha x)$. Cette formule en faisant $t = 0$ doit représenter les ébranlemens primitifs de la fibre AD; donc, si on suppose comme dans l'endroit cité des *Rech. préc.* qu'une particule quelconque E soit ébranlée par le corps sonore, il faudra que la fonction $\varphi(-\alpha x)$ soit toujours nulle, excepté lorsque $x = 0$. Par conséquent la formule générale $\varphi(t - \alpha x)$ aura seulement une valeur réelle, lorsque $t - \alpha x = 0$, savoir $x = \frac{t}{\alpha}$; par où l'on voit que l'ébran-

(*) Comme j'aurai souvent occasion dans la suite de renvoïer à ces mêmes *Recherches* je les appellerai simplement *Recherches précédentes*, & j'en citerai les Chapitres & les Articles en chiffre Romain pour les distinguer de ceux de la Dissertation présente.

ébranlement excité dans la particule E se propagera dans la fibre AD de maniére que, dans un tems quelconque t, il parviendra à la particule qui est distante de la E par l'espace $\frac{t}{\alpha}$; d'où il s'ensuit que la viteſſe du Son ſera uniforme & $= \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{T^2 D}{2Eh})}} = \sqrt{(\frac{2Eh}{T^2 D})} =$ (en mettant au lieu de $\frac{E}{D}$ la hauteur A de l'air ſuppoſé homogéne) $\frac{\sqrt{2Ah}}{T}$ ce qui s'accorde avec *l'Art. LVI. des Rech. préc.*, & avec ce que M. Newton a trouvé par une méthode différente. *Prop.* 49. *liv. II. des Principes.*

Au reſte il eſt clair, qu'à cauſe de l'ambiguité des ſignes de la valeur de α, la formule $\varphi(t - \alpha x)$ renfermera réellement les deux formules $\varphi(t - \frac{x}{\sqrt{c}})$, $\varphi(t + \frac{x}{\sqrt{c}})$ en poſant, pour abreger, c au lieu de $\frac{2hA}{T^2}$; donc, en prenant deux fonctions différentes l'une pour le ſigne $+$, & l'autre pour le ſigne $-$, & les ajoutant enſemble, on aura $\varphi(t - \frac{x}{\sqrt{c}}) + \psi(t + \frac{x}{\sqrt{c}})$: pour l'expreſſion générale de l'eſpace parcouru par chaque particule de la fibre AD dans un tems quelconque t.

Nous verrons dans la ſuite les conſéquences qui réſultent de cette formule par rapport à la propagation du Son conſidérée d'une maniére générale; mais nous remarquerons d'avance que la viteſſe de la propagation eſt toujours $= \sqrt{c}$ comme on l'a trouvé ci-deſſus, dans un cas particulier.

3. Telle eſt la ſolution générale qui peut ſe déduire des Principes de M. Newton; cet illuſtre Auteur n'en a tiré cepen-

cependant qu'une ſolution aſſès particuliére, & même peu exacte, mais qui l'a conduit néanmoins au même réſultat ſur la viteſſe de la propagation. C'eſt ce qu'il faut développer.

M. Newton commence par ſuppoſer que la courbe PKS eſt un cercle dont le diamètre PS eſt égal à la plus grande excurſion Ee de la particule E, & dont la circonférence eſt à l'intervalle BC *des pulſions* comme KH à EG, ſavoir comme $\alpha : 1$ ſelon nos dénominations; d'où il réſulte que le mouvement de chaque particule d'air eſt le même que celui d'un pendule qui décrit des arcs de cicloïde, & que la durée de chaque oſcillation eſt égale à la circonférence entiére du cercle $PKSkP$, ſavoir $\alpha BC = \frac{T}{\sqrt{2hA}} BC$.

M. Newton ſuppoſe enſuite que, dans le tems d'une oſcillation, *la pulſion* en avançant parcoure ſa largeur BC; c'eſt-à-dire qu'il ſe forme en CD une nouvelle fibre ſonore CD égale à la premiére BC; d'où il déduit la viteſſe du Son $= \frac{\sqrt{2hA} \times BC}{T \times BC} = \frac{\sqrt{2hA}}{T}$ préciſément comme on l'a trouvé ci-deſſus.

Je remarque d'abord que la premiére hypotéſe de M. Newton, ſavoir que la courbe PKS ſoit un cercle, ne peut être admiſe qu'analitiquement, & non rélativement à la queſtion de la propagation du Son. Car 1.° Les ébranlemens primitifs dépendent abſolument de l'impulſion du corps ſonore, laquelle peut être quelconque; par conſéquent il eſt impoſſible que ces ébranlemens ſoient toujours exprimés par la même courbe, & encore moins par un cercle; 2.° Comme le cercle eſt une courbe rentrante, il eſt clair qu'on peut toujours trouver un arc $= t - \alpha x$, dont l'abſciſſe repréſentera (ſuivant la conſtruction) l'excurſion d'une particule quelconque diſtante comme l'on voudra de la particule E; d'où il s'enſuit que toutes les par-

particules de la fibre AD infiniment prolongée de part & d'autre doivent être toutes en mouvement à la fois ; ce qui détruit la propagation du Son, & eſt directement contraire à la nature même de la queſtion.

A l'égard des oſcillations des particules qui forment *la pulſion* BC, nous démontrerons plus bas (*Art.* 15.) que leur durée eſt toujours la même quelle que puiſſe être la nature de cette *pulſion*; & qu'ainſi la formule $\frac{\sqrt{2hA}}{T} \times BC$, que donne l'hypotéſe particuliére de M. Newton, eſt exacte & conforme à la véritable Théorie de la propagation du Son.

Il en eſt de même de l'autre hypotéſe de M. Newton, ſavoir, qu'il s'engendre une ſeconde fibre égale à la premiére, lorſque cette premiére a achevé une vibration entiére. Cette hypotéſe eſt légitime, comme on le verra plus bas (*Art.* 12. 15.); mais doit-on l'admettre ſans la démontrer? On eſt d'autant plus en droit d'en exiger la démonſtration que, ſuivant la conſtruction de M. Newton, les *pulſions* AB, BC, CD *&c.* ne ſe forment point l'une après l'autre, mais exiſtent toutes à la fois & ne font que changer de place ſur la fibre AD, comme il eſt aiſé de s'en convaincre en examinant cette conſtruction.

En voila aſſès pour prouver l'inſuffiſance de la Théorie de M. Newton, & pour rendre raiſon pourquoi elle conduit néanmoins aux véritables loix de la propagation du Son.

4. Nous venons de montrer que la courbe PKS ne peut être un cercle. Or je dis qu'elle ne peut pas même être une courbe algébrique, ou tranſcendante. Pour le prouver je remarque que la fonction $\varphi\left(t - \frac{xT}{\sqrt{2bA}}\right)$ qui repréſente en général les excurſions des particules de la fibre AD pour un tems quelconque t, doit auſſi repréſenter les excurſions primitives, telles qu'elles ſont engendrées dans le premier inſtant par l'action du corps ſono-

re

re ſur les particules de l'air contigu. Or il eſt clair que cette impreſſion ne ſauroit s'étendre à l'infini, mais qu'elle devra même être renfermée dans un très-petit eſpace autour du corps, à cauſe de l'extrême petiteſſe de ſes vibrations; d'où il ſuit, que dans le premier inſtant il ne peut y avoir qu'un certain nombre de particules, dans la fibre aérienne, qui ſoient miſes en mouvement, & pour leſquelles la valeur de $\varphi\left(t - \frac{xT}{\sqrt{2bA}}\right)$ doive être réelle; il faudra en conſéquence, pour remplir cette condition, que la fonction $\varphi\left(t - \frac{xT}{\sqrt{2bA}}\right)$ s'évanoüiſſe toujours d'elle même, lorſque, t étant $= o$, x ſurpaſſera une quantité donnée. Soit a la longueur de la portion de la fibre qui eſt ébranlée au commencement, il faudra avoir en général $\varphi\left(-\frac{(a+\zeta)T}{\sqrt{2bA}}\right) = o$, prenant pour ζ une quantité quelconque poſitive.

Telle devra donc être la nature de la courbe PHS, d'où dépend la valeur de φ, que tous les arcs exprimés par $-\frac{(a+\zeta)T}{\sqrt{2bA}}$ répondent toujours au même point de l'axe, où les abſciſſes ont leur origine; c'eſt ce qui ne ſauroit avoir lieu dans aucune courbe ſoit géométrique, ſoit tranſcendante, puiſque il faudroit pour cela que dans un tel point elle ſe transforma tout-à-coup en une droite perpendiculaire à l'axe.

CHAPITRE II.

Des fonctions irrégulières & discontinues.

OBSERVATIONS

Sur la nature & l'usage de ces fonctions.

5. NOus venons de démontrer que, pour trouver les ébranlemens des particules de l'air dans le cas de la nature, il faut se servir d'une ligne courbe, dont le cours devienne tout-à-coup rectiligne en un point donné, condition qui est absolument incompatible avec la loi de continuité, à laquelle toutes les courbes soit algébriques, soit mécaniques sont nécessairement soumises.

Delà on voit la nécessité d'admettre dans ce calcul d'autres courbes que celles, que les Géomètres ont considéré jusqu'à présent, & d'emploïer un nouveau genre de fonctions variables indépendantes de la loi de continuité, & qu'on peut très-bien appeller fonctions *irrégulières* & *discontinues*. Mais ce n'est pas ici le seul usage qu'on doit faire de ces sortes de fonctions; elles sont nécessaires pour un grand nombre de questions importantes de Dinamique & d'Hidrodinamique. Car, lorsque on a un sistème de corps, ou de points mobiles, dont le nombre est infini, & qu'on en cherche les mouvemens, après les avoir, comme que ce soit, derangé de leur état d'équilibre, il est facile de comprendre que tous ces mouvemens ne pourront être contenus dans une même formule, à moins qu'elle ne soit aussi applicable au prémier état du sistème, qui est tout-à-fait arbitraire, & dans lequel la loi de continuité est le plus souvent violée;

M. Euler

M. Euler eſt, je crois, le prémier qui ait introduit dans l'Analiſe ce nouveau genre de fonctions, dans ſa ſolution du problême *de chordis vibrantibus* qui rentre dans la claſſe de ceux, dont nous venons de parler; mais nous avons expoſé ailleurs (*art.* XV. *Rech. préc.*) les difficultés, dont cette ſolution eſt ſuſceptible, & la néceſſité où l'on étoit de l'établir & de la confirmer par une métode auſſi directe & rigoureuſe que celle que nous avons donné dans le *Chap.* V. *des Rech. citées*; M. Euler même m'a fait l'honneur de me l'avoüer dans une lettre particuliére qu'il m'a écrit au ſujet de ma Théorie ſur le Son. Cette métode cependant qui conſiſte à regarder d'abord le nombre des corps mobiles comme fini & indéterminé, eſt extrémement pénible & embaraſſante, & elle le devient encor beaucoup plus, lorſqu'il s'agit de rendre leur nombre infini. Un tel paſſage du fini à l'infini dans mes formules, n'aïant pas paru aſsès évident & démonſtratif à deux grands Géomètres, Mrs. Daniel Bernoulli & D'Alembert, comme ils ont daigné me le faire ſentir dans des lettres particuliéres; j'ai cru devoir chercher de nouveau une autre méthode plus ſimple, par laquelle on pût éviter tous les embaras qui ſe rencontrent dans la transformation des formules, & qui leva de même tous les doutes qui pourroient encore ſe préſenter ſur l'exactitude de mes réſultats.

Probleme I.

6. *Etant donné un ſiſtème d'un nombre infini de points mobiles, dont chacun dans l'état d'équilibre ſoit déterminé par la variable* x, *& dont le prémier & le dernier qui répondent à* $x = o$, *& à* $x = a$ *ſoient ſuppoſés fixes; trouver les mouvemens de tous les points intermédiaires, dont la loi*

eſt

eſt contenue dans la formule $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, *z étant l'eſpace décrit par chacun d'eux durant un tems quelconque* t.

Qu'on multiplie cette équation par Mdx, M étant une fonction quelconque de x, & qu'on l'intégre en ne faiſant varier que l'x; il eſt clair, que ſi dans cette intégrale priſe enſorte qu'elle évanoüiſſe lorſque $x = o$, on fait $x = a$, on aura la ſomme de toutes les valeurs particuliéres de la formule $\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) Mdx = c\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right) Mdx$, qui répondent à chaque point mobile du ſiſtème donné. Cette ſomme ſera donc $\int\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) Mdx = c\int\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right) Mdx$.

Or l'intégrale $\int\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right) Mdx$, où la différence $d^2\zeta$ ne dépand que de la variable x, peut ſe transformer par les régles connues en $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) M - \int\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) \times \left(\frac{dM}{dx}\right) dx$; cette derniére intégrale ſe change de même en $\zeta\left(\frac{dM}{dx}\right) - \int\zeta\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx$; de ſorte qu'on aura $\int\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right) Mdx = \left(\frac{d\zeta}{dx}\right) M - \zeta\left(\frac{dM}{dx}\right) + \int\zeta\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx$; or puiſque $\int\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right) Mdx$ eſt $= o$, lorſque $x = o$, ſi on ſuppoſe que $\int\zeta\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx$ le ſoit auſſi, il faudra que $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) M - \zeta\left(\frac{dM}{dx}\right)$ évanoüiſſe de même dans ce point; mais par hipotéſe l'on a iei $\zeta = o$, donc il ſuffira que l'on ait $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) M = o$, ou bien $M = o$, lorſque $x = o$.

Par

Par là notre équation intégrale deviendra $\int (\frac{d^2\zeta}{dt^2}) M dx = c [(\frac{d\zeta}{dx}) M - \zeta (\frac{dM}{dx})] + c \int \zeta (\frac{d^2 M}{dx^2}) dx$. Posons $x = a$; & puisque ζ s'évanoüit de nouveau par hipotése, faisons disparoître de même l'autre terme $(\frac{d\zeta}{dx}) M$ par une valeur convenable de M.

Il ne restera, après cela, que la simple équation

$$\int (\frac{d^2\zeta}{dt^2}) M dx = c \int \zeta (\frac{d^2 M}{dx^2}) dx.$$

Soit supposé $(\frac{d^2 M}{dx^2}) = kM$, k désignant une constante indéterminée dont on trouvera la valeur au moïen des conditions qu'on a déja attaché à la quantité M; on aura $\int (\frac{d^2\zeta}{dt^2}) M dx = kc \int \zeta M dx$.

Soit encore $\int \zeta M dx = s$; prenant la différence de part & d'autre, dans la supposition que le seul t soit variable, on a, à cause de $M =$ fonct. x, $\int (\frac{d\zeta}{dt}) M dx = (\frac{ds}{dt})$; & différentiant une seconde fois $\int (\frac{d^2\zeta}{dt^2}) M dx = (\frac{d^2 s}{dt^2})$; ces valeurs substituées dans la derniére équation intégrale, il en résulte $(\frac{d^2 s}{dt^2}) = ck s$, équation qu'il faut maintenant intégrer en ne regardant que le tems t comme variable. Nous avons donc deux équations différentielles à intégrer, dont l'une regarde simplement la variabilité de x, & l'autre celle de t, ce qui fait qu'elles rentrent dans la classe ordinaire des équations différentielles à deux changeantes.

Com-

Commençons par l'équation $\frac{d^2 s}{dt^2} = cks$, & faiſons uſage de la méthode inventée par M. D'Alembert pour ces ſortes d'équations.

Soit ſuppoſé $\frac{ds}{dt} = r$, on aura $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dr}{dt}$, & l'équation donnée ſe changera en $\frac{dr}{dt} = cks$; qu'on la multiplie par un coéficient quelconque μ, & qu'on la joigne avec celle qu'on a faite par hipotéſe, on aura $\frac{ds + \mu dr}{dt} = \mu cks + r = \mu ck\,(s + \frac{1}{\mu ck} r)$; ſoit fait $\mu = \frac{1}{\mu ck}$, & par conſéquent $\mu^2 = \frac{1}{ck}$, $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{ck}}$, j'aurai donc $\frac{ds + \mu dr}{at} = \frac{1}{\mu}(s + \mu r)$, différentielle dont l'intégrale eſt par les méthodes connues, en ajourant une conſtante A, $s + \mu r = Ae^{t:\mu}$; ſubſtituant la valeur de μ, on a, à cauſe de l'ambiguité des ſignes, les deux équations

$$s + \frac{r}{\sqrt{ck}} = Ae^{t\sqrt{ck}}$$

$$s - \frac{r}{\sqrt{ck}} = Be^{-t\sqrt{ck}},$$

B étant une nouvelle conſtante arbitraire.

Pour déterminer les valeurs de A & de B, ſuppoſons que s & r deviennent S & R, lorſque $t = 0$, nous aurons $S + \frac{R}{\sqrt{ck}} = A$; & $S - \frac{R}{\sqrt{ck}} = B$; ſubſtituant ces valeurs, & joignant enſemble les deux équations il nous vient

$$s = S \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + \frac{R}{\sqrt{ck}} \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2}$$

de méme, en retranchant l'une équation de l'autre, on trouve

$$r = R \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + S\sqrt{ck} \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2}$$

ces

ces équations ſe réduiſent à la forme ſuivante qui eſt beaucoup plus ſimple ; ſavoir

$$s = S \text{ cof. } t\sqrt{-ck} - \frac{R}{\sqrt{-ck}} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \text{ cof. } t\sqrt{-ck} + R\sqrt{-ck} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck}.$$

Or s eſt par ſuppoſition $= \int \zeta M dx$, & $r = \frac{ds}{dt} = \int (\frac{d\zeta}{dt}) M dx$, ou bien, puiſque $\frac{d\zeta}{dt}$ exprime la viteſſe qui répond à l'eſpace ζ & au tems t, ſi on dénote cette viteſſe par u, on a $r = \int u M dx$. Pour avoir de même les valeurs de S & de R, ſuppoſons que Z ſoit en général la valeur de ζ, & V celle de u au commencement du mouvement, lorſque $t = 0$, on aura $S = \int Z M dx$ & $R = \int V M dx$, ſubſtituant ces valeurs on changera les équations précédentes en celles-ci

$$\int \zeta M dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int Z M dx - \frac{\text{ſin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int V M dx + \sqrt{-ck} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck} \int Z M dx.$$

Il ne nous reſte plus qu'à trouver la valeur de M par la réſolution de l'équation $\frac{d^2 M}{dx^2} = kM$, qu'on intégréra par la même métode que nous avons pratiqué ci-deſſus ; prenant deux conſtantes quelconques C & D on trouvera aiſément que la valeur de M eſt en général $Ae^{x\sqrt{k}} + Be^{-x\sqrt{k}}$; or M doit prémiérement être $= 0$, lorſque $x = 0$, ce qui donne $A + B = 0$ & $B = -A$; par conſéquent $M = A(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}})$. Changeons la conſtante A, & ſuppoſons la diviſée par $2\sqrt{-1}$, on aura plus ſimplement $M = A$ ſin. $x\sqrt{-k}$.

Il faut maintenant faire enſorte que M évanoüiſſe, lorſque $x = a$, d'où l'on a A ſin. $a\sqrt{-k} = 0$, & prenant pour ν un nombre quelconque entier poſitif, ou négatif,

$a\sqrt{-k}$

$a\sqrt{-k} = \frac{v\pi}{2}$, ce qui nous apprend que $\sqrt{-k}$ peut avoir une infinité de valeurs différentes, qui rempliſſent toutes également les conditions données. Subſtituons à préſent pour M ſa valeur trouvée, & retenant pour plus de ſimplicité la quantité $\sqrt{-k}$, on aura après avoir diviſé par A

$$\int z \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = \text{ coſ. } t\sqrt{-ck} \int Z \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx + \frac{\text{ſin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx$$

$$\int u \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = \text{coſ. } t\sqrt{-ck} \int V \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-ck} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck} \int Z \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx$$

Ces deux équations doivent ſe vérifier pour toutes les valeurs qu'on peut donner à $\sqrt{-k}$, & c'eſt, d'après une telle condition, qu'il faut déterminer les valeurs cherchées de z & de u par celles de Z & V qui ſont ſuppoſées données.

Pour cela il faut commencer par faire diſparoître au moïen de quelques transformations, la quantité $\sqrt{-k}$ qui n'eſt point renfermée dans des *ſinus* ou des *coſinus*; ces transformations ne conſiſtent qu'à prendre les intégrales par parties comme nous l'avons déja pratiqué plus haut; enſorte que l'intégrale qui reſte ſe trouve naturellement multipliée, ou diviſée par $\sqrt{-k}$. Par ce moïen on transformera d'abord l'expreſſion $\int V \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx$ dans celle-ci $= \text{ſin. } x\sqrt{-k} \int V dx - \sqrt{-k} \int (\text{coſ. } x\sqrt{-k} \int V dx)\, dx$. Je remarque maintenant que la valeur de ſin. $x\sqrt{-k}$ devient nulle dans les deux cas de $x = 0$, & de $x = a$, d'où il ſuit, que puiſque les formules intégrales que nous manions ici, doivent être priſes pour toute l'étendue de x depuis 0, juſque à a, on aura plus ſimplement $\int V \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = -\sqrt{-k} \int (\text{coſ. } x\sqrt{-k} \int V dx)\, dx$. Par une opération contraire on trouvera enſuite

$$\int Z \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = -\frac{Z \text{ coſ. } x\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} + \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \text{coſ.}$$

cos. $x\sqrt{-k}\,dx$; & puisque $Z = 0$, lorsque $x = 0$, & $= a$, par l'hipotése du problême, on aura pour notre cas

$$\int Z \sin. x\sqrt{-k}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \cos. x\sqrt{-k}\,dx.$$

Ces valeurs substituées, il en résulte

$$\int \zeta \sin. x\sqrt{-k}\,dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int Z \sin. x\sqrt{-k}\,dx - \frac{\sin. t\sqrt{-ck}}{\sqrt{c}} \int \left(\int V dx\right) \cos. x\sqrt{-k}\,dx$$

$$\int u \sin. x\sqrt{-k}\,dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int V \sin. x\sqrt{-k}\,dx - \sqrt{c} \sin. t\sqrt{-ck} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \cos. x\sqrt{-k}\,dx.$$

Avant d'aller plus loin je remarque que comme on aura occasion dans la suite de comparer des valeurs de Z & de V avec des valeurs de ζ & u qui ne répondent pas aux mêmes x, pour ne pas se méprendre dans ces opérations, il sera utile de distinguer par des expressions différentes les x qui conviennent aux Z & V, d'avec ceux qui conviennent aux ζ & u; je désignerai les prémiers par la lettre X que je substituerai par tout dans les seconds termes des équations précédentes au lieu de x, en retenant néanmoins le dx qui ne peut causer aucun embarras; j'observe de plus, que les intégrales qui entrent dans ces termes se rapportent uniquement à la variable x ou X, ce qui fait qu'on peut mettre aussi sous le signe ces quantités sin. $t\sqrt{-ck}$, & cos. $t\sqrt{-ck}$, qui sont constantes à leur égard; j'aurai donc

$$\int \zeta \sin. x\sqrt{-k}\,dx = \int Z \sin. X\sqrt{-k} \times \cos. t\sqrt{-kc}\,dx - \frac{1}{\sqrt{c}} \int \left(\int V dx\right) \cos. X\sqrt{-k} \times \sin. t\sqrt{-kc}\,dx.$$

$$\int u \sin. x\sqrt{-k}\,dx = \int V \sin. X\sqrt{-k} \times \cos. t\sqrt{-kc}\,dx. - \sqrt{c} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \cos. X\sqrt{-k} \times \sin. t\sqrt{-kc}\,dx.$$

Je développe à présent les produits des *sinus* & *cosinus* par les métodes connues; j'obtiens

$$\int \zeta \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int Z \text{ fin. } (X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int Z \text{ fin. } (X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{c}}\int (\int V\,dx) \text{ fin. } (X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{c}}\int (\int V\,dx) \text{ fin. } (X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx.$$

$$\int u \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int V \text{ fin. } (X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int V \text{ fin. } (X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$$

$$- \frac{\sqrt{c}}{2}\int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \text{ fin. } (X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$$

$$+ \frac{\sqrt{c}}{2}\int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \text{ fin. } (X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx.$$

Ces équations ſont réduites maintenant à la forme néceſſaire pour en tirer les valeurs de ζ & de u. Voici comment je m'y prends.

Je conſidére, qu'en ſubſtituant pour $\sqrt{-k}$ ſa valeur $\frac{\nu\pi}{2a}$, le nombre ν qui peut être tel qu'on veut, pourvu qu'il ſoit entier, doit néceſſairement diſparoître de l'équation, puiſque elle doit être vraie pour toutes les valeurs poſſibles de ν. Il faut donc faire enſorte que la quantité $\sqrt{-k}$ diſparoiſſe elle même de l'equation qui la renferme; ce qu'on ne peut obtenir dans notre cas qu'en rendant égaux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$ dans tous les termes de l'une & de l'autre équation; mais comme on pourroit être embarraſſé dans les différentes valeurs qu'il faut donner à X, je ne retiendrai cette lettre X, que dans la ſeule expreſſion fin. $(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, & je mettrai dans l'autre

expreſ-

expreſſion ſin. $(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, X' au lieu de X, en déſignant de même par Z' & V' les valeurs de Z & de V qui y répondent; ainſi j'aurai par la comparaiſon des angles, après avoir diviſé par $\sqrt{-k}$, $x = X + t\sqrt{c} = X' - t\sqrt{c}$; & enſuite les équations

$$z = \frac{Z}{2} + \frac{Z'}{2} - \frac{\int V\,dx}{2\sqrt{c}} + \frac{\int V'\,dx}{2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{V}{2} + \frac{V'}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ}{dx} + \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ'}{dx}.$$

Maintenant, l'abſciſſe qui convient à Z & à V étant X, elle deviendra $= x - t\sqrt{c}$, qui eſt ſa valeur tirée de l'équation ci-deſſus; on aura de même pour l'abſciſſe X' qui répond à Z' & à V', l'expreſſion $x + t\sqrt{c}$; donc ſi, pour plus des commodité, on joint à chaque quantité ſon abſciſſe en forme d'expoſant placé entre deux parenthéſes, on aura enfin les valeurs de z & de u exprimées de la maniére ſuivante

$$z = \frac{Z^{(x+t\sqrt{c})} + Z^{(x-t\sqrt{c})}}{2} + \frac{\int V\,dx^{(x+t\sqrt{c})} - \int V\,dx^{(x-t\sqrt{c})}}{2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{V^{(x+t\sqrt{c})} + V^{(x-t\sqrt{c})}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2}\left(\left(\frac{dZ}{dx}\right)^{(x+t\sqrt{c})} - \left(\frac{dZ}{dx}\right)^{(x-t\sqrt{c})} \right).$$

Telles ſont donc les valeurs de z & de u pour chaque point mobile du ſiſtême donné, & pour tous les inſtans de leurs mouvemens; valeurs qui ne dépandent, comme on le voit, que des quantités Z & V données à volonté dans le commencement du mouvement.

7. Les formules qu'on vient de trouver nous ménent directement à la conſtruction ſuivante. Sur l'axe $AB = a$ (*fig.* 1.), j'éléve à chaque point M la perpendiculaire MN, égale à la valeur de Z, c'eſt-à-dire à la valeur initiale de

z qui répond à l'abſciſſe $x = AM$. J'en fais autant à l'égard des valeurs initiales de u ſur un autre axe de même longueur AB (*fig.* 2.); & j'obtiens par ce moïen les deux courbes ANB, AQB que j'appelle *courbes fondamentales*, & qui ſont les lieux géométriques des quantités Z & V.

Ces courbes ſeront réguliéres, ou irréguliéres, ſuivant la nature des quantités Z & V; mais elles ſe termineront toujours d'un côté & de l'autre aux extrémités A & B de l'axe, puiſque les valeurs de Z & de V dans ces points ſont nulles par ſuppoſition.

Je trace enſuite ſur deux autres axes égaux, AB, AB (*fig.* 3. & 4.) les nouvelles courbes anb, Aqb, telles, que chaque ordonné Mn de la prémiére ſoit toujours quatriéme proportionnelle à la ſoutangente MT de la courbe ANB, à l'ordonnée correſpondante MN, & à la quantité conſtante $\surd c$, & que l'ordonné Mq de la ſeconde ſoit égale à l'aire AQM de la courbe AQB, diviſée par la même quantité $\surd c$.

Ces quatre courbes ainſi données, ſi l'on cherche les valeurs de z & de u qui répondent à une abſciſſe quelconque $x = AM$, & à un tems quelconque t, on n'aura qu'à prendre de part & d'autre des points M, les points M' & $'M$ éloignés par des intervalles égaux MM' & $M'M = t\surd c$, & l'on aura

$$z = \frac{M'N' + 'M'N + M'q' - 'M'q}{2}$$

$$u = \frac{M'Q' + 'M'Q + M'n' - 'M'n}{2}.$$

Quelque générale que paroiſſe cette conſtruction que nous venons de trouver, elle ne l'eſt cependant pas tout-à-fait; car il y a une infinité de cas où elle ne ſauroit avoir lieu; c'eſt ce qui arrivera toutes les fois que les points $'M$ & M' tomberont au delà de A & de B.

Pour

Pour voir ce qu'il faudra faire dans ces cas, & comment les courbes données pourront être continuées de part & d'autre, il eſt néceſſaire de reprendre les derniéres formules intégrales, d'où l'on a tirées les valeurs de z & de u, & de les examiner avec attention ; pour mieux y réuſſir nous réduirons ces formules à des conſtructions géométriques.

Soit imaginée la ligne ARB (*fig.* 5.) qui ſoit le lieu géométrique des valeurs de z pour tous les points de l'axe AB, & ſoit décrite ſur le même axe la courbe ASB qui ait à chaque abſciſſe x l'ordonnée ſin. $x\sqrt{-k}$. Il eſt manifeſte que ſi l'on fait les produits des ordonnées correſpondantes de ces deux courbes, l'aire d'une troiſiéme courbe qui aura ces produits pour ordonnées ſera la valeur de l'intégrale $\int z$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx$.

Pour conſtruire de même les autres formules intégrales ſuppoſons d'abord $t\sqrt{c} < a$, & aïant tracé (*fig.* 6.) la ligne ANB, qui renferme toutes les valeurs de Z, qu'on coupe de part & d'autre du point A les deux portions de l'axe AA', AA'' égales entr'elles, & $= t\sqrt{c}$, & qu'on tranſporte la courbe ASB en $A'S'B'$ & en $A''S''B''$, il eſt clair que ſi l'on prend de nouveau les produits des ordonnées de chacune de ces courbes par les ordonnées correſpondantes de la courbe ANB, les aires des ces produits exprimeront les valeurs des intégrales $\int Z$ ſin. $(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$, & $\int Z$ ſin. $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$. Mais il faut remarquer, que comme ces intégrales ne doivent s'étendre que depuis $X=0$ juſque à $X=a=AB$, les aires, qui les exprimeront, ne pourront contenir que les parties de l'une & de l'autre courbe qui répondent à l'axe AB. D'où il s'enſuit que les deux portions $A'S'$ & $S''B''$ qui ſe trouvent au déhors de l'eſpace compris entre les ordonnées AS', BS'' élevées des points A & B, ne ſeront ici aucun uſage ; mais qu'il faudra au contraire ajouter à l'une

l'une & l'autre courbe, ce qui lui manque par rapport à l'axe entier AB; c'eſt-à-dire que la courbe $A'S'B'$ devra être continuée juſqu'en $'S$, & de même la courbe $B''S''A''$ juſqu'en $''S$; ce qui étant exécuté, on aura les deux branches $S'B''S$ & $S''A'''S$, qui ſeront celles qu'on devra emploïer dans la formation des aires propoſées. Pour cela examinons la nature des fonctions ſin. $(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, & ſin. $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, qui forment les courbes $A'S'B''S$ & $B''S''A'''S$, en comptant les abſciſſes X du point d'origine A; & voïons ce que ces fonctions deviennent au delà du point B' & en deça du point A''.

Puiſque les deux courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$ ne ſont que la même courbe ASB, dans laquelle, nommant x les abſciſſes, les ordonnées ſont exprimées par ſin. $x\sqrt{-k}$, la queſtion ſe réduit à déterminer la valeur de ſin. $x\sqrt{-k}$, lorſque x eſt négatif, & lorſque x eſt plus grand que a; ſoit donc en prémier lieu x négatif; on aura, comme on le ſait, ſin. $(-x)\sqrt{-k} = -$ ſin. $x\sqrt{-k}$, c'eſt-à-dire que la fonction donnée de x ne recevra point d'autre changement, ſi non qu'elle deviendra négative. Soit enſuite $x > a$, mais $< 2a$, ſavoir $x = 2a - z$, on aura ſin. $x\sqrt{-k} =$ ſin. $(2a-z)\sqrt{-k} =$ ſin. $(2a\sqrt{-k} - z\sqrt{-k})$. Or par la valeur déterminée ci-deſſus de $\sqrt{-k}$, $2a\sqrt{-k} = v\pi$, & par les règles connuës de la Trigonométrie, ſin. $(v\pi - z\sqrt{-k}) =$ ſin. $(-z\sqrt{-k}) = -$ ſin. $z\sqrt{-k}$; donc puiſque $z = 2a - x$ on aura dans ce cas ſin. $x\sqrt{-k} =$ ſin. $(2a - x)\sqrt{-k}$. Delà il s'enſuit 1.° Que pour avoir la continuation $A'''S$ du côté des abſciſſes négatives de la courbe $A''S''B''$, on n'aura qu'à renverſer la même courbe au deſſous de l'axe, enſorte que le point A'' demeure immobile. 2.° Que pour avoir la continuation $B''S$ du côté des abſciſſes plus grandes que a dans la courbe $A'S'B'$ il faudra auſſi renverſer cette courbe de la même façon que l'autre; mais en prenant ici le point B' pour fixe.

Je

Je dis maintenant, que la portion de courbe $A''S$ est la même que la $A'S'$; ainsi que la portion $B'S$ est la même que la $B''S''$; & que par conséquent, au lieu des deux courbes $S'B'S$ & $S''A''S$, on peut substituer les deux autres $A'S'B'$ & $A''S''B''$, lorsque il ne s'agit que d'avoir la somme des mêmes parties. Je dis ensuite que la somme des aires formées des produits des ordonnées de l'une & de l'autre courbe $S'B'S$ & $S''A''S$ par celles de la courbe ANB sera égale à la somme des aires qu'on pourra former de la même façon par les ordonnées des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, pourvu que dans les espaces AA', BB'', on prenne, pour ordonnées de la courbe ANB, celles qui conviennent aux espaces AA'' & BB' avec des signes contraires; d'où je déduis, que si l'on veut continuer la courbe même ANB de part & d'autre de l'axe, afin qu'elle réponde immédiatement à toute l'étendue des courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$, on n'a qu'à la renverser dessous l'axe en AN' & BN'', le point A demeurant immobile dans le prémier cas, & le point B dans le second comme on le voit clairement dans la *fig.* 7.

Il résulte donc de tout ce qu'on vient de démontrer que pour avoir la valeur de l'expression composée $\int Z \sin.(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx + \int Z \sin.(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$, on n'a qu'à prendre la somme des deux aires qui se formeront par les produits des ordonnées des courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$ multipliées par les ordonnées correspondantes de la courbe $N'ANBN''$. La moitié de cette somme, si l'on suppose $V = 0$, devra donc être égale à l'aire formée par les deux courbes ARB, ASB.

Or puisque les ordonnées de la courbe ASB, qui est la même que les deux courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$, renferment la quantité $\sqrt{-k}$, laquelle doit s'évanoüir de l'équation, on ne parviendra à se defaire de cette quantité, qu'en égalant la valeur de z, qui multiplie chaque ordonnée de ARB, à

la

la démiſomme des valeurs de Z, qui multiplient la même ordonnée dans l'une & l'autre courbe $A'S'B'$ & $A''S''B''$; prenant pour ces valeurs de Z les ordonnées correſpondantes de la courbe $N'ANBN''$; on coupera donc des points A' & A'', qui ſont les origines des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, deux abſciſſes $= x$, ou bien, à cauſe de $AA' = AA'' = t\sqrt{c}$, on coupera du point A, origine de la courbe génératrice ANB, deux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$ & $x - t\sqrt{c}$, & la démiſomme des ordonnées correſpondantes dans cette courbe, ſera la valeur cherchée de z.

Si on ſuppoſe la courbe ANB anéantie, & qu'on y ſubſtitue la courbe AQB, on aura par la conſtruction précédente les valeurs de la viteſſe u dans le cas, où $Z = 0$. Mais ſi l'on veut avoir égard à la fois aux deux courbes ANB & AQB; il faudra encore faire attention aux autres formules intégrales que nous avons négligées; & qui ſe conſtruiſent de la même façon que les précédentes avec cette ſeule différence qu'au lieu des courbes ANB, AQB il faut emploïer les anb & AqB. On s'y prendra donc à l'égard de ces derniéres courbes d'une manière parfaitement analogue à celle qu'on vient de pratiquer pour les prémiéres; il faudra ſeulement obſerver, que comme les deux formules intégrales, qui naiſſent de chacune d'elles, ont des ſignes différens, les branches $A'S'B'$ & $A''S''B''$ devront être ſituées l'une au deſſus & l'autre au deſſous de l'axe; c'eſt pourquoi la partie $A''S$, qui doit ſervir de continuation à la branche $B'S'$ au lieu de ſa partie $A'S$, ſe trouvera du même côté de l'axe, comme auſſi que la partie $B'S$ à l'égard de l'autre branche $A''S''$, dont elle eſt le ſupplement au lieu de $S''B''$; d'où il s'enſuit que les branches de continuation dans les courbes Anb & aqb ſe trouveront au deſſus de l'axe, comme on le voit dans la *fig.* 8. On prendra donc dans ces courbes ainſi continuées de part & d'autre les ordonnées qui répondent aux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$ & $x - t\sqrt{c}$

en

en comptant du point A, & leur démidifférence donnera ce qu'il faut ajouter à la valeur de z & de u.

La conſtruction que nous venons de trouver eſt la même, pour le fond, que celle qu'on a donné plus haut; mais elle en eſt plus générale en ce que les courbes ici ſe trouvent continuées de part & d'autre par une étendue égale à l'axe AB; ce qui ſuffit pour réſoudre tous les cas, où $t\sqrt{c}$ ne ſurpaſſe point a comme on l'a ſuppoſé d'abord.

Tous les autres cas demanderont donc encore une nouvelle continuation, qu'on pourroit trouver auſſi en ſuivant une méthode analogue à celle que nous avons emploïé ci-deſſus, mais qu'on déduira plus aiſément de la reflexion ſuivante. Je conſidére d'abord le *ſinus* de l'angle $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, qui eſt celui qui donne des valeurs de X plus grandes que a; je trouve que ce *ſinus* ne change point en retrachant de X un multiple quelconque de $2a$; car ſin. $[(X-\sqrt{c})\sqrt{-k}-2\mu a\sqrt{-k}]$ devient (en ſubſtituant au lieu de $\sqrt{-k}$ ſa valeur $\frac{\nu\pi}{2a}$) ſin. $[(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}-\mu\nu\pi]$. Or, μ étant un nombre quelconque entier, $\mu\nu$ le ſera auſſi, & par conſéquent par les règles connues ce *ſinus* deviendra $=$ ſin. $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, tel qu'il étoit d'abord. J'examine de même le *ſinus* de l'autre angle $(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, d'où naiſſent les valeurs négatives de X; & je vois que ce *ſinus* demeure le même, en ajoutant à X un multiple quelconque de $2a$; Car on trouve auſſi ſin. $[(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}+\mu\nu\pi]=$ ſin. $(X+t\sqrt{c})$.

Ces deux propoſitions prouvent donc que les abſciſſes X peuvent être augmentées ou diminuées de $2a$, de $4a$ &c. ſans qu'il en réſulte aucun changement dans les formules intégrales; d'où il ſuit que les ordonnées à toutes ces abſciſſes ainſi augmentées ou diminuées ſeront néceſſairement les mêmes. Donc puiſque nous avons ci-deſſus trouvé moïen d'étendre les courbes *fondamentales* juſques à l'abſciſſe $2a$

d'un côté, & jusqu'à l'abscisse $-a$ de l'autre, on pourra à présent les étendre tant qu'on voudra, en appliquant à chaque abscisse exprimée par $z + 2\mu a$ l'ordonnée qui convient à la simple abscisse z, dont la valeur est supposée contenue entre les limites $+2a$, & $-a$. Il ne faudra pour cela que transporter successivement le long de l'axe toute la courbe qui répond à l'abscisse $= 2a$, & qui est composée de deux branches égales, situées l'une au dessus & l'autre au dessous du même axe; d'où il résultera une courbe continue, & de figure anguiforme, c'est-à-dire, contenant plusieurs ventres égaux, situés alternativement au dessus & au dessous de l'axe. Nous appellerons les courbes ainsi formées *courbes génératrices*.

Or fera la même chose à l'égard des autres courbes formées par les tangentes, & par la quadrature des courbes *fondamentales*; mais comme la portion de ces courbes, qui répond à l'abscisse $2a$, est composée de deux branches égales, situées l'une & l'autre du même côté de l'axe, la courbe, qui résultera de la repétition de cette partie, contiendra aussi plusieurs ventres égaux, mais tous placés du même côté de l'axe.

Voila comment par la simple déscription réitérée des branches données ANB, AQB, anb, Aqb, on peut prolonger toutes ces courbes à l'infini, & avoir par conséquent des ordonnées réelles pour toutes les abscisses exprimées par $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$, quelle que soit la valeur du tems t; ce qui suffit pour que la construction des valeurs de z & de u ne soit plus sujette à aucune exception.

Le problême, dont la solution nous a jusqu'à présent occupé, est le même que celui qu'on résolu dans le *Chap.* V. *des Rech. préced.*; car il est facile de voir que les équations de l'*Art.* XIX., dans le cas ou le nombre des points mobiles est infini, peuvent se réduire à la formule générale

(d^2z)

$\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)$. Auſſi la conſtruction que nous venons de trouver s'accorde entiérement avec celle qu'on a donné dans l'*Art.* XXXIX., & plus amplement dans l'*Art.* XLV.; ce qui doit être regardé comme une confirmation de la juſteſſe & de la bonté de nos calculs.

REMARQUES

Sur la ſolution précédente.

8. QUOIQUE la ſolution précédente ſoit beaucoup moins compliquée que celle qui ſe trouve dans *mes Rech. ſur le Son*; elle l'eſt cependant encore à un point qui la rend aſſès difficile à ſuivre. C'eſt pourquoi il me paroit bon de l'éclaircir par quelques remarques, qui faſſent connoître plus à fond la nature & l'eſprit de la méthode qui nous y a conduit.

Comme la queſtion eſt de trouver les mouvemens d'une infinité de points mobiles, dans la ſuppoſition que leur état d'equilibre ait été dérangé d'une manière quelconque, on ne peut pas, ainſi qu'on l'a prouvé plus haut, exprimer tous ces mouvemens par une ſeule formule générale; mais il faut regarder au contraire chaque point mobile comme iſolé, & en chercher le mouvement, en reſolvant comme autant de problêmes à la fois, qu'il y a de points mobiles dans le ſiſtème donné. Une telle queſtion demande donc, pour être pleinement reſolue, d'autres procédés que ceux de l'Analiſe ordinaire; c'eſt ce que M. D'Alembert a eu ſoin de faire remarquer au ſujet des cordes vibrantes, dans l'*Art.* II. de ſon Addition au *Mémoire ſur la courbe que forme une corde tendue miſe en vibration*, imprimée parmis les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1750. *Dans tout autre cas*, di-t-il, (c'eſt-à-dire dans tous les cas où la courbe initiale n'aura point les conditions preſcrites par cet Auteur;

teur ; *le problême ne pourra ſe reſoudre , au moins par ma méthode , & je ne ſais même s' il ne ſurpaſſera pas les forces de l' Analiſe connue. En effet on ne peut , ce me ſemble , exprimer* y *analitiquement d' une manière plus générale qu'en la ſuppoſant une fonction de* t *&* de s ; *mais dans cette ſuppoſition on ne trouve la ſolution du problême , que pour le cas , où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une ſeule & même équation. Dans tous les autres cas il me paroit impoſſible de donner à* y *une forme plus générale.*

La méthode, que nous avons expoſé ci-deſſus, eſt une réduction de celle que j' ai inventé pour reſoudre le problême des vibrations d'une corde chargée d' un nombre indéfini de petits poids; ainſi elle remplit la condition, que tous les points mobiles ſoient conſidérés chacun en particulier, & en même tems elle n' eſt pas ſujette aux difficultés qui ſe préſentent en paſſant du nombre indéfini des points mobiles à un nombre réellement infini.

Le fondement principal de l' une & de l' autre de ces méthodes , c'eſt l' ingénieuſe Analiſe inventée par M. D'Alembert pour intégrer des équations différentielles d' un dégré quelconque , & contenant un nombre quelconque de variables , pourvu qu' elles ne paroiſſent que ſous une forme linéaire. Auſſi eſt-ce une juſtice qu'il faut rendre à ce ſavant Géomètre , que de reconnoître que nous lui devons le prinpal ſecours qui nous a aidé à franchir les difficultés , que lui même ſemble avoir cru inſurmontables à l' Analiſe.

A l' égard des procédés de nos deux métodes , ils ne différent d'abord entr'eux , que parce l'on a ſubſtitué, dans les derniers , des différentiations & des intégrations au lieu des ſommes & des différences algébriques qui ſe trouvent dans les autres ; mais comme on pourroit craindre que ces opérations n' entrainaſſent les inconvéniens qu'on a indiqué dans l'*Art.* XV. des *Rech. préc.*, il me paroit utile de développer

velopper cet objet plus en détail, en rapprochant l'Analiſe que j'ai donné ci-deſſus de celle du *Chap.* III. des *mêmes Rech.*

J'immagine d'abord qu'au lieu de la ſimple équation générale $(\frac{d^2\zeta}{dt^2}) = c\,(\frac{d^2\zeta}{dx^2})$, qui appartient à tous les points mobiles, il y en ait une infinité, dont chacune repréſente le mouvement de chacun des points en particulier; mouvement qui dépend d'ailleurs de tous les autres, puiſque la différentielle $d^2\zeta$ qu'on prend, en ne faiſant varier que x, exprime la différence ſeconde des valeurs de ζ pour trois points conſécutifs. Je multiplie donc chacune de ces équations par un coéficient indéterminé M, ou plutôt par la quantité Mdx, en regardant M comme une variable qui peut convenir à toutes les équations en général; & j'en prens la ſomme par une intégration indiquée à la manière ordinaire.

Maintenant, comme il s'agit de joindre enſemble les coéficiens de chaque valeur de ζ qui répond à chaque point mobile, je transforme mon équation intégrale enſorte que les différentielles de ζ dépendantes de x, s'évanoüiſſent.

Les transformations, dont je fais uſage dans cette occaſion, ſont celles qu'on appelle intégrations par parties, & qui ſe démontrent ordinairement par les principes du calcul différentiel; mais il n'eſt pas difficile de voir qu'elles ont leur fondement dans le calcul général des ſommes & des différences; d'où il ſuit qu'on n'a point à craindre d'introduire par-là dans notre calcul aucune loi de continuité entre les différentes valeurs de ζ.

Après cela, je determine les valeurs de l'indéterminée M par la comparaiſon des coéficiens des termes correſpondans ζ & $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$; & je trouve pour cela une équation différentielle du 2 dégré qui contient une nouvelle indéterminée

née constante k, & dont l'intégration entraine encore dans la valeur de M deux autres constantes arbitraires. Je détermine ces constantes à être telles, que M s'évanoüisse, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$, puisque les valeurs de z étant nulles dans ces deux points, les M qui les multiplient ne doivent non plus avoir des valeurs réelles ; par ce moïen on fait disparoître de l'équation intégrale les termes qui sont absolument algébriques, & qui auroient d'ailleurs empêché le reste des opérations. Ces deux conditions laissent encore indéterminée la valeur d'une constante, par laquelle toute l'expression de M est multipliée ; mais cette constante s'évanoüit ensuite d'elle même par la division. A l'égard de la constante k, on trouve une infinité de valeurs différentes, qui toutes lui conviennent également, & dont le nombre répond à celui des équations particuliéres qu'on résout à la fois. C'est de ce nombre infini de valeurs de k, que dépand ensuite la détermination de toutes les valeurs de z.

Delà je passe à l'intégration actuelle de notre équation formée par l'addition de toutes les équations particuliéres. Cette intégration ne regarde que la variabilité de t, & elle s'achève selon les méthodes connues du calcul intégral, puisque ici la loi de continuité a lieu. Après cela je substitue la valeur de M, & il en résulte une équation assés simple qui renferme toutes les valeurs de z, pour chaque point mobile dans tous les instants du mouvement, avec les valeurs particuliéres des mêmes z & des viteſſes u dans le prémier instant ; valeurs qu'on suppose données à volonté, & qui ne sont point réglées par aucune loi de continuité. Je trouve en même tems une formule semblable pour les viteſſes u de tous les points dans un tems quelconque.

Jusqu'ici cette Analise est parfaitement d'accord avec celles du *Chap. cité de mes Rech.* ; mais elle en différe entiérement dans la suite, où il s'agit de tirer les valeurs de z & de u.

Comme

Comme il eſt néceſſaire que nos derniéres formules ſoient vérifiées, quelques valeurs qu'on donné à k, parmi le nombre infini de celles qu'on a trouvé; il eſt viſible qu'il faut chaſſer cette même quantité k, à l'aide d'autant d'équations particuliéres qu'il y a de différentes fonctions de k. C'eſt à quoi nous ſommes parvenus, en emploïant différentes tranſformations & réductions, dont on a rendu compte dans le cours de cette Analiſe; & qui me paroiſſent les ſeules capables de remplir l'objet propoſé.

La conſtruction qu'on a donné enſuite des valeurs de z & de u par le moïen des courbes *génératrices*, & la maniére de continuer ces courbes à l'infini de part & d'autre dépendent d'une conſidération intime ſur la nature de nos formules. Il eſt vrai que les principes, d'où l'on a tiré cette conſtruction, pourroient paroître trop recherchés; mais elle n'en eſt pas moins démonſtrative & certaine; ce n'a été que pour conſerver une entière rigueur que j'ai été obligé d'avoir recours à de tels principes; car dès que l'on aura démontré dans deux ou trois problêmes de cette ſorte, que la nature des courbes *génératrices* eſt la même, que celle qu'on trouve en ſuppoſant ces courbes repréſentées par une fonction réguliére & continue, ainſi que l'a fait M. D'Alembert dans ſa ſolution du problême des vibrations des cordes, on ſera aſsès fondé à appliquer la métode de ces fonctions aux cas mêmes où l'on voudra ſuppoſer qu'elles n'aïent point lieu.

9. Après tout ce que nous venons d'expliquer, il ne ſera pas difficile de déterminer le dégré de généralité, dont notre méthode eſt ſuſceptible. On verra prémiérement qu'elle ne pourra réuſſir à moins que l'indéterminée z & ſes différences ne ſe trouvent que ſous une forme linéaire, & de plus qu'elles ne ſoient point mélées avec la variable t; lorſque ces conditions ſeront obſervées, quoique les différentielles de z montent a un dégré plus haut que le ſecond, & qu'il y

ait

ait même un terme sans z, qui soit une fonction quelconque de t & de x, on pourra toujours se servir avec succès des artifices & des transformations enseignées ; comme on le verra dans les solutions que nous donnerons dans la suite. Toute la difficulté ne tombera plus que sur l'intégration des équations en M & en s ; équations qui se rapportent aux méthodes ordinaires du calcul intégral. En second lieu le succès de notre méthode demande, qu'on puisse faire disparoître des équations la quantité k, qui a toujours une infinité de valeurs ; cette operation renferme des difficultés plus considérables, & je ne suis point encore parvenu jusqu'à présent à trouver pour cela une méthode directe & générale ; cependant nous ferons voir dans la suite, que cet objet pourra toujours être rempli si non exactement, au moins en se servant des approximations & des séries.

Pour ce qui est de la prémiére condition qui est absolument indispensable dans notre méthode, il est aisé de démontrer qu'elle aura toujours lieu dans les mouvemens d'un sistème quelconque d'un nombre infini de points mobiles, lorsque ces mouvemens seront supposés infiniment petits, comme le sont tous les mouvemens réciproques qu'on observe dans la nature ; d'où il suit qu'on pourra toujours les calculer soit exactement, soit seulement par approximation.

CHAPITRE III.

De la propagation du Son.

10. LA masse de l'air étant naturellement de trois dimensions, il est clair que, pour calculer la propagation du Son en toute rigueur, il faudroit résoudre les formules générales que M. Euler a donné dans ses *Recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu élastique* ; (*Voïés pag.* 1. *ci-dessus*) Mais ces formules n'étant point du nombre

bre de celles, ſur leſquelles notre méthode peut avoir priſe, il faut renoncer pour le ptéſent, c'eſt-à-dire juſqu'à ce qu'on ſoit aidé par de nouveaux ſecours, à toute Théorie de la propagation du Son enviſagée ſous ce point de vûë. Cependant comme il eſt très-probable que les ébranlemens des particules de l'air pour produire le Son, doivent être infiniment petits, ainſi que nous tacherons de le prouver dans la ſuite; on pourra s'en tenir aux formules que M. Euler a auſſi donné pour ce cas; formules qui ſont ſans comparaiſon beaucoup plus ſimples, que les prémiéres, & qui, par la raiſon qu'on a dit plus haut (*Art.* 9.), rentrent néceſſairement dans la claſſe de celles qu'on peut ſoumettre à notre Analiſe.

Quoique la manière, dont M. Euler a trouvé ces formules, ſoit ſans contredit la plus directe & la plus rigoureuſe qui ſe puiſſe immaginer, cependant, puiſque la ſuppoſition des ébranlemens infiniment petits rend le calcul incomparablement plus ſimple, j'ai cru qu'on ne ſaroit point faché de le trouver ici.

Soient X, Y, Z les coordonnées rectangles qui déterminent la poſition d'une particule quelconque de fluide dans l'état d'équilibre; ſuppoſons que ces coordonnées, dans le tems t, deviennent $X+x$, $Y+y$, $Z+\zeta$; il ne ſera pas difficile de voir que, ſi les quantités x, y, ζ ſont ſuppoſées infiniment petites, le parallélepipéde $dX\,dY\,dZ$ qui repréſente une particule dans l'état d'équilibre, pourra être cenſé ſe changer en un autre $= (dX+dx)(dY+dy)(dZ+d\zeta) = dX\,dY\,dZ + dX\,dY\,d\zeta + dX\,dZ\,dy + dY\,dZ\,dx$, en négligeant les puiſſances plus hautes de dx, dy, $d\zeta$. Delà il ſuit, qu'en nommant E l'élaſticité naturelle de la portion infiniment petite de fluide renfermée dans le prémier parallélepipéde, l'élaſticité de la même portion, lorſque elle remplira le ſecond, ſe trouvera $=$

$$\frac{E\,dX\,dY\,dZ}{dX\,dY\,dZ + dX\,dY\,dz + dX\,dZ\,dy + dY\,dZ\,dx} = E -$$

$E\left(\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right)$ en négligeant ce qui ſe doit négliger. Soit priſe maintenant la différence de cette quantité, en ne faiſant varier que l'X, & l'on aura, E étant conſtant, $-E\left(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dX\,dY} + \frac{d^2z}{dX\,dZ}\right)dX$ pour la différence d'élaſticité de deux particules infinimens voiſines & placées dans la direction de la ligne X; donc ſi l'on conſidére une autre particule intermédiaire à celles-ci, & qui leur ſoit contigue par tous les points des deux faces oppoſées $dY\,dZ$, il eſt clair que cette particule ſera repouſſée par l'excès de l'élaſticité de la particule antérieure ſur celle de la particule poſtérieure avec une force qui ſera exprimée par $-E\left(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dX\,dY} + \frac{d^2z}{dX\,dZ}\right)dX\,dY\,dZ$. Cette force diviſée par la maſſe à mouvoir, qui eſt ici (en poſant D pour la denſité naturelle du fluide) $D\,dX\,dY\,dZ$, ſera donc $= -\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, h étant l'eſpace qu'un corps peſant parcourt dans le tems T; d'où l'on aura l'équation

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{E}{D}\left(\left(\frac{d^2x}{dX^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dX\,dY}\right) + \left(\frac{d^2z}{dX\,dZ}\right)\right).$$

On trouvera de même par un ſemblable raiſonnement les deux autres équations

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{E}{D}\left(\left(\frac{d^2y}{dY^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dY\,dX}\right) + \left(\frac{d^2z}{dY\,dZ}\right)\right)$$

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{E}{D}\left(\left(\frac{d^2z}{dZ^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dZ\,dX}\right) + \left(\frac{d^2y}{dZ\,dY}\right)\right).$$

Il eſt viſible que ces trois équations s'accordent avec celles de M. Euler, en poſant ſelon les hipotéſes de cet Auteur $h = g$, $\frac{E}{D} = h$, $T = 1$, & ſubſtituant p, q & r pour x, y & z.

11. Au reſte ces formules ſont fondées ſur l'hipothèſe que l'élaſticité de l'air ſoit proportionelle à ſa denſité; mais il n'eſt pas difficile de les étendre à telle autre hipothèſe qu'on voudra.

Pour embraſſer la queſtion dans toute la généralité poſſible, ſuppoſons que l'élaſticité de l'air ſoit comme une fonction quelconque de la denſité, de ſorte que nommant s la denſité dans un inſtant quelconque, l'élaſticité correſpondante ſoit exprimée par $E\varphi s$; il eſt clair par les calculs de *l'Art. préc.* que $s = \frac{D\,dX\,dY\,dZ}{(dX+dx)(dY+dy)(dZ+dz)}$ $= D - D\left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right]$; donc, à cauſe de dx, dy, dz infiniment petites par rapport à dX, dY, dZ, on aura $E\varphi s = E\varphi D - \left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right] ED\varphi' D$, φ' marquant une telle fonction de φ que $\varphi' s = \frac{d\cdot\varphi s}{ds}$.

Maintenant, comme D eſt une quantité conſtante, les différences de $E\varphi s$ ſeront exprimées ſimplement par $ED\varphi' D\,d\cdot\left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right]$ d'où l'on voit que, pour avoir les équations du mouvement du fluide, il ne faudra qu'écrire au lieu de E dans les calculs de *l'Art. précéd.* $ED\varphi' D$, ou $E\varphi' D$ ſimplement, en poſant $D = 1$.

Si le fluide étoit compoſé de parties de différentes denſités, il faudroit regarder alors la quantité D non plus comme conſtante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de X, Y, Z. Ainſi l'on parviendroit aux trois équations ſuivantes;

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = E\varphi' D\left(\left(\frac{d^2x}{dX^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dX\,dY}\right) + \left(\frac{d^2z}{dX\,dZ}\right)\right)$$
$$+ \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot D\varphi' D}{dX}\right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right)\right)$$
$$- \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot\varphi D}{dX}\right),$$

$$\frac{T^2}{2b}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = E\varphi' D\left(\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right)+\left(\frac{d^2x}{dr\,dX}\right)+\left(\frac{d^2\zeta}{dr\,dZ}\right)\right)$$
$$+\frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot D\varphi' D}{dr}\right)\times\left(\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dr}\right)+\left(\frac{d\zeta}{dZ}\right)\right)$$
$$-\frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot\varphi D}{dr}\right);$$

$$\frac{T^2}{2b}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = E\varphi' D\left(\left(\frac{d^2\zeta}{dZ^2}\right)+\left(\frac{d^2x}{dZ\,dX}\right)+\left(\frac{d^2y}{dZ\,dr}\right)\right)$$
$$+\frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot D\varphi' D}{dZ}\right)\times\left(\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dy}{dr}\right)+\left(\frac{d\zeta}{dZ}\right)\right)$$
$$-\frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot\varphi D}{dZ}\right).$$

Suppoſons par exemple que la différente denſité des parties du fluide vienne du poid du fluide ſupérieur; dans ce cas, quelle que ſoit la fonction φ, on aura toujours $\frac{E\,d\cdot\varphi D}{dZ} = -D$ (en ſuppoſant que la direction de Z ſoit verticale), d'où l'on trouvera la valeur de D qui ſera une fonction de Z ſeulement. Delà on pourroit tirer les équations néceſſaires pour trouver les loix de la propagation du Son, en aïant égard à la denſité variable des couches de l'atmoſphère; mais, pour ne pas trop nous engager dans des difficultés de calcul, nous nous contenterons dans tout le cours des Recherches ſuivantes de regarder la denſité de l'air comme conſtante; ce qui ne nous éloignera pas ſenſiblement de la vérité, pourvu qu'on ne conſidére la propagation du Son, que près de la ſurface de la terre. C'eſt donc ſur les équations de *l'Art. précéd.* que nous fonderons principalement nos recherches ſur la propagation du Son; mais comme ces équations ſont encore trop compliquées à cauſe des trois variables qu'elles renferment, il ſera bon de commencer par les ſimplifier au moïen de quelques hipothèſes, qui limitent le mouvement de chaque particule de l'air. Or de toutes les hipothèſes qu'on peut emploïer pour cela, les plus com-

commodes, & les plus conformes à la nature, ſont les deux ſuivantes. La premiére conſiſte imaginer la maſſe de l'air réduite à une ſimple ligne phiſique, dans lequel cas on fait diſparoître à volonté deux variables quelconques x & y, avec leurs correſpondantes X & Y. La ſeconde hipothèſe eſt de ſuppoſer que les ébranlemens ſe propagent dans toute la maſſe de l'air par des ondulations ſphériques autour du corps ſonore ; dans ce cas chaque couche concentrique d' air eſt ſuppoſée ſubir le même ébranlement dans toutes ſes parties, d'où il ſuit que la détermination de l'ébranlement de chaque couche ne peut dépendre que du tems t, & du rayon de la couche, c' eſt-à-dire de la diſtance du corps ſonore.

§ I.

De la propagation du Son dans une ligne phiſique d' air.

12. SI l'on fait, ſelon la premiére hipothèſe, x & y, & X & $Y = 0$, & qu'on poſe pour abreger c au lieu de $\frac{2hE}{T^2D}$ on trouve l'équation $\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2\zeta}{dZ^2}\right)$ qui eſt la même que celle que nous avons appris à conſtruire dans le *Probl. I.*, Z dénotant ici la même choſe que x ; d'où il ſuit, que pour avoir les loix de la propagation du Son dans cette hipothèſe, il ne faudra qu'appliquer la conſtruction donnée, ſuivant les différens ébranlemens excités par les corps ſonores, & la nature du milieu élaſtique qui les environne. Quoique cette matière ait déja été traitée dans la ſeconde *ſect. de mes Rech. ſur le Son*, elle peut néanmoins l' être encor d' une manière beaucoup plus générale. Je la reprendrai donc ici avec d'autant plus de plaiſir qu'elle me donnera occaſion de faire pluſieurs remarques nouvelles & importantes.

Que

Que la droite PQ (*fig.* 9.) repréſente une ligne phiſique d'air étendue d'un côté & de l'autre à l'infini, & qu'au lieu de ſuppoſer (comme je l'ai fait dans la *ſection citée*) que la ſeule particule P reçoive du corps ſonore une impulſion quelconque, on imagine, que toutes les particules contenues dans l'eſpace PQ ſoient ébranlées en même tems; PQ repréſentant, ſuivant M. Newton, la *pulſion* primitive de la fibre ſonore; il s'agit de déterminer les lois de la propagation de cette pulſion. Aïant tracé pour cela, ſelon ce qui a été enſeigné plus haut, les deux courbes *fondamentales*, qui repréſentent les déplacemens primitifs des particules, avec les viteſſes qui leur ont été imprimées; & aïant conſtruit de mêmes les deux autres courbes qui réſultent de la quadrature & des tangeantes de celles-ci, & que nous appellerons dorénavant courbes *dérivées*, on remarquera

1.° Que les courbes *fondamentales* ſe termineront néceſſairement aux deux points P & Q qui ſont les limites de l'agitation primitive, par ſuppoſition.

2.° Que puiſque la fibre aérienne eſt ſuppoſée s'étendre à l'infini de part & d'autre, aucune de ſes particules ne pourra être abſolument fixe; d'où il ſuit que les extrémités A & B des courbes *fondamentales*, qui ſont cenſées fixes, devront dans ce cas être reculées à l'infini, ce qui fera diſparoître toutes les branches de continuation, en ſorte que les courbes *génératrices* ne renfermeront aucune ordonnée réelle au delà des points P & Q.

3.° Qu'il en ſera de même pour les courbes *dérivées*, exceptée celle qui dépand des quadratures laquelle dégenerera du côté de Q en une droite paralléle à l'axe, comme il eſt facile de le voir, en examinant la génération de cette courbe.

Ces choſes poſées & bien entendues, voici comme je raiſonne. Je ſuppoſe que l'on demande l'état de la particule qui répond à l'abſciſſe x pour un tems quelconque t, écoulé depuis le premier inſtant du mouvement. Je n'aurai qu'à prendre la demiſomme des ordonnées, dont les abſciſ-

ſes

ſes ſont $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$ dans les deux courbes *fondamentales*, & la demidifférence des ordonnées pour les mêmes abſciſſes dans les courbes *dérivées*, & joignant enſemble la prémiére des demiſommes, & la ſeconde des demidifférences, comme auſſi la ſeconde demiſomme, & la prémiére demidifférence, j'aurai l'eſpace parcouru par la particule pendant le tems donné t, & ſa viteſſe à la fin de ce tems. Je vois donc que cet eſpace & cette viteſſe ſeront toujours nulles, lorſque l'abſciſſe $x \pm t\sqrt{c}$ reſtera en deça du point P; enſuite que l'eſpace ſera conſtant, & la viteſſe nulle, lorſque l'abſciſſe $x \pm t\sqrt{c}$ tombera au delà de Q. D'où je conclus que, pour un tems quelconque t, il n'y aura, & il ne pourra y avoir d'autres particules en mouvement, que celles, pour leſquelles la valeur de $x \pm t\sqrt{c}$ ſera plus grande que la diſtance du point P au point A, & moindre que la diſtance du point Q au même point A qui eſt toujours l'origine des abſciſſes, quoique placée à une diſtance infinie. Examinons ſéparément les deux cas de $x + t\sqrt{c}$, & de $x - t\sqrt{c}$.

Soit p la diſtance entre le point A & le point P, & ſoit $x = p + z$, z ſera une nouvelle abſciſſe qui aura ſon origine en P. Poſons maintenant en prémier lieu $p + z - t\sqrt{c} = p$, on aura $z = t\sqrt{c}$; poſons enſuite $p + z - t\sqrt{c} = p + PQ$, on aura $z = PQ + t\sqrt{c}$. Par là on peut avoir les limites de l'agitation des particules dans le tems t, en tant qu'elle réſulte des termes dépendans de l'expreſſion $x - t\sqrt{c}$; car il ne faut que prendre ſur la ligne PQ, les points P' & Q' tels que $PP' = t\sqrt{c}$, & $P'Q' = PQ$; & la portion $P'Q'$ de la fibre ſera la ſeule, où cette agitation aura lieu. On trouvera de la même manière les limites de l'agitation des particules, qui dépand de la valeur de $x + t\sqrt{c}$; car en faiſant $p + z + t\sqrt{c} = p$ & $= p + PQ$, on a deux valeurs de z, ſavoir $z = -t\sqrt{c}$, & $z = PQ - t\sqrt{c}$. On prendra donc de nouveau, ſur

la

la même ligne prolongée du côté oppoſé, deux autres points $'P$ & $'Q$, tels que $P'P = t\sqrt{c}$, & $P'Q = P'P - PQ$ c'eſt-à-dire, que $'P'Q = PQ$; & tous les mouvemens, dont la détermination dépendra de la valeur de $x + t\sqrt{c}$ ſeront renfermés dans ce dernier eſpace $'P'Q$.

De ce qu'on vient de démontrer il s' enſuit que la *pulſion* primitive, c' eſt-à-dire l' onde excitée par le corps ſonores dans l' eſpace PQ de la fibre aérienne indéfinie, s' eſt comme diviſée en deux autres, qui dans le tems t ont été tranſporrées, l' une à droite en $P'Q'$, & l' autre à gauche en $'P'Q$, conſervant toujours la même étendue PQ. Pour connoître la viteſſe de la propagation de ces *pulſions* ſecondaires, on n'a qu'à chercher celle des points P' & $'P$, dont la poſition par rapport à P eſt déterminée généralement par les équations $\zeta = t\sqrt{c}$, & $\zeta = -t\sqrt{c}$; puiſque donc ζ repréſente ici les eſpaces parcourus par ces poinrs dans le tems t, il eſt évident que leur mouvement ſera uniforme, & leur viteſſe $= \sqrt{c}$, & que cela aura lieu quelle qu'ait été la nature de la *pulſion* primitive. Il eſt inutile de nous arrêter à examiner la valeur de $\sqrt{c}$ qui eſt $\frac{2h}{T^2} \times \frac{E}{D}$, puiſque cette expreſſion en ſubſtituant pour $\frac{E}{D}$, la quantité A, ou nk qui eſt ſa valeur, devient la même que celle qu'on a trouvé ailleurs (*Art.* LVI.), & que M. Newton a déduit de ſa Théorie, comme on l' a déja remarqué ci-deſſus (*Art.* 1.).

13. Ce ſeroit ici le lieu de faire voir l'appliquation de la formule générale que nous avons trouvé d'après les Principes de M. Newton dans *l'Art. cité*; mais cette formule étant entiérement ſemblable à celle que M. D' Alembert a donné ſur les vibrations des cordes, il eſt clair qu'en admettant les fonctions diſcontinues, qui ſont indiſpenſables dans la matière, dont il s'agit ici (*Art.* 4.), on aura la même

même construction que nous avons donné dans *l'Art.* 7., & que par conséquent la Théorie de la propagation du Son, qui en résultera, ne sera point autre que celle qui vient d'être d'expliquée. Par-là on prouvera aisément ce que l'on a avancé plus haut (*Art.* 1.), que la viteſſe de la propagation, ſelon cette Théorie eſt déterminée par la quantité $\frac{\sqrt{2hA}}{T}$ qui diviſe l'x dans les fonctions φ & ψ.

14. La manière dont nous venons de conſidérer la propagation du Son eſt beaucoup plus générale & plus conforme à la nature que celle, qu'on a emploïé dans le *Chap.* I. de la II. *Sect.* des *Rech. préc.* En effet l'hipotéſe que j'avois adoptée dans cet Ouvrage, ſavoir qu'une ſeule particule d'air fût ébranlée par le corps ſonore à chacune de ſes vibrations, ne paroit pas pouvoir ſubſiſter avec l'équilibre mutuel de toutes les particules de la fibre; il me ſemble beaucoup plus naturel d'imaginer, que la prémiére particule pouſſée par le corps ſonore, condenſe juſqu'à une certaine diſtance les particules ſuivantes, pourvû que cette diſtance ne ſoit pas telle que les *pulſions* ou ondes ſonores, qui ſe ſuccéderont les unes aux autres, puiſſent ſe troubler & s'entredétruire; comme il arriveroit néceſſairement, ſi le tems, qu'elles mettent à parcourir leur largeur, étoit moindre que l'intervalle du tems entre deux vibrations ſucceſſives du corps ſonore. On pourra déterminer les limites de la plus grande largeur des ondes, en prenant le nombre des vibrations que fait dans une ſeconde le ſon le plus aigu que nous puiſſions entendre, & diviſant par ce nombre l'eſpace que les ondes ſonores parcourent dans le même tems. Ce nombre peut ſe déduire rigoureuſement de la formule connue des vibrations des cordes, que nous avons démontré être exacte pour quelque figure que la corde prenne; ſi donc on s'en tient à ce que dit

M. Euler dans *l'Art.* XIII. de ſa *Théorie de Muſique*, on aura le nombre 7520., par lequel diviſant le nombre 1240. qui exprime en piés l'eſpace parcouru par le Son dans une ſeconde, ſelon les expériences moïennes, il viendra pour quotient 1. pouce & 2. lignes environ, qui ſera par conſéquent la meſure de la plus grande étendue que puiſſent avoir les ondes ſonores, pour former des ſons diſtincts & perceptibles à l'oreille.

15. Juſqu'ici nous n'avons encor conſidéré que le mouvement progreſſif des ondes ſonores; ſi on vouloit auſſi connoître les mouvemens particuliers qui les compoſent, on les trouveroit aiſément par les principes établis ci-deſſus.

Suppoſons que x ou bien ζ ſoit donné, au lieu de t, dans les équations $\zeta = t\sqrt{c}$, & $\zeta = PQ + t\sqrt{c}$, la différence des deux valeurs de t nous donnera la durée du mouvement de chaque particule de l'onde $P'Q'$; laquelle ſera $= \frac{PQ}{\sqrt{c}}$. Or puiſque $\sqrt{c}$ eſt la viteſſe conſtante, avec laquelle les ondes avancent continuellement, il eſt clair que l'agitation de chaque particule ne durera préciſément que le tems que l'onde met à parcourir toute ſa largeur PQ. Il en ſera de même pour les ondes propagées du côté oppoſé, ce qu'il eſt aiſé de reconnoître par le moïen des deux équations $\zeta = -t\sqrt{c}$, & $\zeta = PQ - t\sqrt{c}$ qui leur appartiennent.

Pour ce qui eſt de la nature de chaque mouvement particulier, il faudra la déterminer par la conſtruction générale des eſpaces & de viteſſes. On trouvera pour cela, 1.° Que toutes les particules ſubiſſent ſucceſſivement la même agitation dépendante de la nature de toute la *pulſion* primitive. 2.° Que, ſi on ſuppoſe que la *pulſion* primitive conſiſte dans le ſeul déplacement des particules, ſans aucune viteſſe imprimée, l'agitation de chaque particule ne ſera com-

compoſée que d'une ſeule allée, & d'un retour à ſon lieu d'équilibre, après lequel elle demeurera immobile. 3.° Que, ſi l'on ſuppoſe au contraire que la *pulſion* primitive ne conſiſte que dans l'impreſſion d'une certaine viteſſe, les particules, pendant tout le tems de leur agitation, s'écarteront continuellement de leurs propres points d'équilibre, & elles n'y reviendront plus comme auparavant. 4.° Qu'enfin, ſi la *pulſion* primitive dépand de l'une & de l'autre cauſe, l'agitation des particules ſera compoſée de celles dont nous venons de parler; ce qui paroit être le cas de la nature.

16. M. Euler dans une lettre du 23. Octob. 1759. m'a fait l'honneur de me mander, que la lecture de *mes Rech. ſur le Son* lui avoit ſuggéré le dénouvement d'une difficulté qui s'étoit préſentée a lui depuis long-tems. Cette difficulté conſiſtoit à ſavoir pourquoi, les ébranlemens primitifs ſe repandant d'abord naturellement de deux côtés oppoſés, les ébranlemens dérivatifs ne ſe propagent plus que d'un ſeul côté, & toujours ſuivant la même direction. La raiſon de cette différence dépand de la nature particuliére des ébranlemens dérivatifs, qui eſt telle que leur propagation ne peut avoir lieu que d'un ſeul côté.

Pour s'en convaincre qu'on examine les formules des valeurs de ζ & de u trouvées à la fin de *l'Art.* 6., & ſuppoſant que ζ & u ſoient les excurſions & les viteſſes données, qu'on cherche celles qui en réſultent pour un tems quelconque t' & pour une particule quelconque déterminée par l'abſciſſe x'. Il eſt viſible qu'il n'y a pour cela que à ſubſtituer ζ à la place de Z & u à la place de V; & déſignant par ζ' & u' les valeurs cherchées, on aura

$$\zeta' = \frac{\zeta^{(x'+t'\sqrt{c})} + \zeta^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2} + \frac{\int u\,dx^{(x'+t'\sqrt{c})} - \int u\,dx^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2\sqrt{c}}.$$

$u' =$

$$u' = \frac{u^{(x'+t'\sqrt{c})} + u^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2}\left(\frac{d\zeta}{dx}^{(x'+t'\sqrt{c})} - \frac{d\zeta}{dx}^{(x'-t'\sqrt{c})}\right).$$

Maintenant on fait, par ce qu'on a démontré (*Art.* 12.), que les termes, dont les expoſans ſont $x - t\sqrt{c}$, ſont les ſeuls qui déterminent la propagation ſuivant la direction PP', & que l'autre la propagation ſuivant $P'P$ dépend ſimplement des termes qui renferment la quantité $x + t\sqrt{c}$; donc pour connoître la propagation des ébranlemens de l'onde $P'Q'$, il ne faudra ſubſtituer, au lieu de ζ & de u, que les ſeuls termes

$$\frac{Z}{2}^{(x-t\sqrt{c})} - \frac{\int V dx}{2\sqrt{c}}^{(x-t\sqrt{c})} \text{ \& } \frac{V}{2}^{(x-t\sqrt{c})} - \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ}{dx}^{(x-t\sqrt{c})}$$

ce qui donnera en poſant $x' + t'\sqrt{c}$ au lieu de x dans les expoſans

$$\zeta' = \frac{Z^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + Z^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4} - \frac{\int V dx^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + \int V dx^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4\sqrt{c}} + \frac{\int V dx^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} - \int V dx^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4\sqrt{c}} - \frac{Z^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} - Z^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$

$$u' = \frac{V^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + V^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4} - \sqrt{c}.\frac{\frac{dZ}{dx}^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + \frac{dZ}{dx}^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4} + \sqrt{c}.\frac{\frac{dZ}{dx}^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} - \frac{dZ}{dx}^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$

$$-\frac{V(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})-V(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}{4}.$$

Dans ces formules il eſt viſible que les termes, dont les expoſans renferment la quantité $+t'\sqrt{c}$ s'évanoüiſſent tous d'eux mêmes, & qu'il ne reſte que ceux où la même quantité ſe trouve avec le ſigne négatif; d'où il s'enſuit que la propagation des ébranlemens ζ' & u' ne peut ſe faire que dans le ſeul ſens PP'.

On prouveroit la même choſe pour les ébranlemens propagés d'abord ſuivant la direction oppoſée $P'P$; car en ſubſtituant, pour ζ & u, les ſeuls termes dont les expoſans contiennent $+t\sqrt{c}$; on verra que les formules réſultantes ne ſeront compoſées que de termes, où la quantité $t'\sqrt{c}$ ſe trouvera avec le ſigne $+$.

17. Nous avons ſuppoſé ci-deſſus que la fibre aérienne étoit infinie de l'un & de l'autre côté; & cette hipotéſe nous a donné des courbes *génératrices*, compoſées d'une ſeule branche terminée de part & d'autre, & pour ainſi dire iſolée. Mais il n'en ſeroit pas de même ſi la fibre étoit elle même terminée des deux côtés, ou d'un ſimplement; car puiſque la manière de continuer les courbes *fondamentales*, & *dérivées* eſt générale, & que les extrémités fixes de la fibre ſont les points, autour deſquels on doit, pour ainſi dire, faire tourner chaque branche, pour en avoir la continuation, ainſi qu'on l'a enſeigné (*Art.* 7.), il eſt évident que, dans le cas d'une ſeule extrémité fixe les courbes *génératrices* ſeront compoſées de deux branches égales, & ſemblablement ſituées de part & d'autre du point qui conſtitue cette extrémité; & que dans le cas de deux extrémités fixes, les courbes *génératrices* auront un nombre infini de branches égales & ſemblablement ſituées autour des deux points qui conſtituent les extrémités données. Delà ſi on cherche la propagation des ondes ſonores par la méthode de *l'Art.* 12.; on trouvera ſans beaucoup de peine

que

que chaque onde, venant rencontrer une des extrémités fixes, devra se réfléchir, pour ainsi dire, & retourner en arrière avec la même viteſſe, & conſervant la même nature qu'elle avoit avant la réflexion, d'où il réſultera des *échos* ſimples ou compoſés, ainſi qu'on l'a expliqué. (*Chap.* II. de la *Sect.* II. *des Rech. préc.*).

Je ne m'arreterai pas ici à démontrer plus en détail cette Théorie des *échos*, non plus que les autres propriétés du Son, qui dépendent des principes que nous venons d'établir. Il ne faut que relire attentivement la *Section citée* pour voir que les propoſitions qu'on a démontré, en ne conſidérant que des mouvemens inſtantanés dans les particules de l'air, ſont auſſi vraies dans l'hipotéſe préſente des ondulations.

Mais il eſt un point eſſentiel de la Théorie du Son, dont on n'a pas encore parlé juſqu'à préſent; c'eſt ſon intenſité. Or de ce que les ondes ſonores ne ſouffrent aucune altération en parcourant un eſpace quelconque, comme on l'a fait voir (*Art.* 12.), il eſt ſimple de conclure que l'intenſité du Son ſera conſtante & indépendante de la diſtance du corps ſonore. Mais cette concluſion ne peut avoir lieu que dans l'hipotéſe que le Son ſoit obligé de ſuivre une ſeule & même direction, comme ſi l'on ſuppoſoit l'air renfermé dans des tuïaux, ou des conduits aſsès étroits, par rapport à leur longueur; ainſi, dans les acqueducs de Rome, le P. Kircher rapporte que les Sons ne reçoivent point de diminution ſenſible par l'eſpace de 600. piés environ. Il n'en eſt pas de même pour l'air libre, dans lequel le Son ſe propageant de tous côtés à la ronde, doit s'affaiblir à méſure qu'il s'éloigne du corps ſonore; & c'eſt ce que l'expérience journaliére apprend, & que nous allons auſſi démontrer par la Théorie, en adoptant la ſeconde hipotéſe de *l'Art.* 11., qui reſte encore à examiner.

§. II.

§ II.

De la propagation du Son dans l'hipotéſe des ondes ſphériques.

18. DANS cette hipotéſe on conſerve à la maſſe de l'air ſes trois dimenſions ; mais on ſuppoſe que, aïant pris un point fixe pour centre, toutes les particules qui ſe trouvent dans la direction de chaque rayon ſe meuvent ſans ſortir de cette direction, & que leurs mouvemens ne dépandent que du tems t, & de la diſtance de chacune d'elles au centre. Delà il eſt clair qu'il doit ſe former dans l'air des ondulations ſphériques & concentriques, dont la détermination ſoit contenue dans une ſeule équation, de même que dans le cas de l'hipotéſe précédente. Cette équation peut ſe trouver ſoit par l'appliquation des formules générales, ainſi que l'a fait M. Euler dans ſon *Mémoire pag.* 1. ci-deſſus, ou plus ſimplement encore, quoique avec moins de rigueur, en conſidérant le mouvement d'un fluide élaſtique, renfermé dans un tuïau conique ; comme on le verra plus bas. Nous nous contenterons pour le préſent d'emprunter l'équation de M. Euler, & d'y appliquer notre méthode, afin d'avoir une conſtruction qui ne ſoit point aſſujetie à la loi de continuité, comme l'exige la Théorie de la propagation du Son. Cette équation, en ſubſtituant ζ pour u, & x pour V ſe réduit à celle-ci $\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right) + 2c\left(\frac{d.\frac{\zeta}{x}}{dx}\right)$, qui peut être traitée de la même manière que celle du Problême I.

PROBLEME II.

CONſervant les mêmes noms & les mêmes ſuppoſitions du Problême I., avec cette ſeule différence que les mouvemens des

des particules ſoient contenus dans l'équation $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c\,(\frac{d^2z}{dx^2}) + 2c\,(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx})$ *conſtruire cette même équation.*

Je commence par multiplier l'un & l'autre membre par Mdx (M étant une fonction quelconque de x); enſuite j'intégre en ne faiſant varier que x; j'ai, $\int(\frac{d^2\zeta}{dt^2})\,Mdx = c\int(\frac{d^2\zeta}{dx^2})\,Mdx + 2c\int(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx})\,Mdx$. Je transforme d'abord l'intégrale $\int(\frac{d^2\zeta}{dx^2})\,Mdx$ en $(\frac{d\zeta}{dx})\,M - \int(\frac{d\zeta}{dx})\times(\frac{dM}{dx})dx$, enſuite en $(\frac{d\zeta}{dx})\,M - \zeta(\frac{dM}{dx}) + \int\zeta(\frac{d^2M}{dx^2})dx$. Je change de même l'autre intégrale $\int(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx})\,Mdx$ en $\frac{\zeta M}{x} - \int\frac{\zeta}{x}(\frac{dM}{dx})\,dx$, & je tire par la ſubſtitution la nouvelle équation $\int(\frac{d^2\zeta}{dt^2})\,Mdx = c\left(M(\frac{d\zeta}{dx}) - \zeta(\frac{dM}{dx}) + \frac{2\zeta M}{x}\right) + c\int\zeta\left(\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{xdx}\right)dx$.

Je dois maintenant ſuppoſer M tel, que $\frac{Md\zeta}{dx} - \frac{\zeta dM}{dx} + \frac{2\zeta M}{x}$ ſoit $= 0$, lorſque $x = 0$, & lorſque $x = a$; or puiſque l'on a déja dans ces deux cas $\zeta = 0$, par hipotéie, il ſuffit que M le ſoit auſſi, ce qui donnera les mêmes conditions à remplir par les conſtantes de M, que l'on a eu dans le *Probl.* I.

L'équation reſtante ſera donc $\int(\frac{d^2\zeta}{dt^2})\,Mdx = c\int\zeta\left(\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{xdx}\right)dx$, où il faudra ſuppoſer $\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{xdx} = kM$.

Cette

Cette équation en M est intégrable par les méthodes connues ; mais en voici une qui est, si je ne me trompe, la plus simple qu'on puisse emploïer dans ce cas.

Soit supposé $M = e^{\int \frac{dx}{p}}$, on aura par la substitution $-\frac{dp}{p^2 dx} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{px} = k$, savoir $kp^2 + \frac{2p}{x} + \frac{dp}{dx} = 1$. Je vois que cette équation peut s'écrire ainsi $k\left(p + \frac{1}{kx}\right)^2 dx + d.\left(p + \frac{1}{kx}\right) = dx$, donc si on fait $p + \frac{1}{kx} = q$, on aura $kq^2 dx + dq = dx$; d'où l'on tire $dx = \frac{dq}{1 - kq^2}$ & intégrant par les logarithmes $x = \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{1 + q\sqrt{k}}{1 - q\sqrt{k}}\right)$ ou bien en passant aux exponentielles, avec l'addition d'une constante C, $q\sqrt{k} = \frac{Ce^{2x\sqrt{k}} - 1}{Ce^{2x\sqrt{k}} + 1}$, donc $p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}} \times \frac{Ce^{2x\sqrt{k}} - 1}{Ce^{2x\sqrt{k}} + 1}$. Il faut maintenant pour avoir la valeur de M, intégrer la quantité $\frac{dx}{p}$. Or il est visible que si l'on substitue pour p son expression telle qu'on vient de la trouver, on a une différentielle qu'il seroit assès difficile, peut être impossible de ramener à l'intégration ; mais on peut simplifier beaucoup le calcul, en supposant l'arbitraire C nulle ou infinie ; dans le prémier cas on a $p = -\frac{1}{kx} - \frac{1}{\sqrt{k}}$, & dans le second $p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}}$, & combinant l'une & l'autre valeur, $p = -\frac{1}{kx} \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$. On aura donc $\int \frac{dx}{p} = \int \frac{kx\,dx}{-1 \pm x\sqrt{k}} = -1 \pm x\sqrt{k} + l.(-1 \pm x\sqrt{k})$,

& par conséquent, en ajoutant une constante A, $M = A(-1+x\sqrt{k})e^{-1+x\sqrt{k}}$; ou bien à cause de l'ambiguité des signes $M = A(-1+x\sqrt{k})e^{-1+x\sqrt{k}} + B(-1-x\sqrt{k})e^{-1-x\sqrt{k}}$. Or il faut que M soit $= 0$, lorsque $x = 0$, d'où il suit que $A + B = 0$, & par conséquent $B = -A$, donc en changeant la valeur de la constante A, $M = A(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}}) - Ax\sqrt{k}(e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}})$, ou bien encore $M = A(\text{sin. } x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k}\cos. x\sqrt{-k})$.

Telle est la valeur de M qu'il falloit trouver; si l'on en prend la différence, on a $\frac{dM}{dx} = -Akx \text{ sin. } x\sqrt{-k}$, d'où l'on voit qu'au commencement, où $x = 0$, on a aussi $\frac{dM}{dx} = 0$, de sorte que le terme $-z\frac{dM}{dx}$ s'évanouit de lui même, sans qu'il soit besoin de supposer $z = 0$ dans ce point; ce qui nous montre que la valeur de z pourra être ici tout ce que l'on voudra.

Il faut maintenant déterminer k par la condition que M devienne nul, lorsque $x = a$; on aura donc pour cela $A(\text{sin. } a\sqrt{-k} - a\sqrt{-k}\cos. a\sqrt{-k})$, ce qui donne $a\sqrt{-k} = \frac{\text{sin. } a\sqrt{-k}}{\cos. a\sqrt{-k}} = \text{tang } a\sqrt{-k}$, c'est-à-dire que l'angle $a\sqrt{-k}$ devra être égal à sa tangente. Cherchant donc un tel angle, & le nommant ϕ on aura $\sqrt{-k} = \frac{\phi}{a}$. Quoique il soit impossible d'exprimer cet angle algébriquement, on peut néanmoins, par la seule considération du cercle, se convaincre, qu'il n'est pas unique & déterminé, mais qu'il y en a une infinité qui ont tous la même propriété, de sorte que $\sqrt{-k}$ aura aussi une infinité de valeurs différentes, qui satisferont toutes également. On peut voir dans le *Tome* II. de *l'Introd. à l'Analise des infinimens petits* de M. Euler *le dernier Prob. du Chap.* XXII., on l'on trouvera une manière assès simple de déterminer tous ces angles par approximation. Au reste

nous

nous n'aurons pas besoin dans la suite de connoître leurs valeurs, il nous suffira de savoir que leur nombre est infini.

Après avoir ainsi déterminé la variable M, si on suppose, comme dans le *Problème* I. $\int \zeta M dx = s$, & qu'on pratique les mêmes différentiations à l'égard de t notre dernière équation intégrale, deviendra $\frac{d^2 s}{dt^2} = ck s$, qui est la même que nous avons déja intégré dans le *Problème cité*. On aura donc ici de même

$$s = S \cos. t\sqrt{-ck} + \frac{R}{\sqrt{-ck}} \sin. t\sqrt{-ck},$$

$$r = R \cos. t\sqrt{-ck} - R\sqrt{-ck} \sin. t\sqrt{-ck},$$

& mettant à la place des quantités s, r, S, & R leurs valeurs en ζ, u, Z, & V,

$$\int \zeta M dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int Z M dx + \frac{\sin. t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int V M dx - \sqrt{-ck} \sin. t\sqrt{-ck} \int Z M dx.$$

Il faut maintenant substituer la valeur de M, & faire les autres opérations que demande notre méthode ; mais comme cette valeur de M est différente de celle du Problème I., il est clair que les mêmes procédés que nous avons suivi alors ne suffiront pas à présent ; on pourra cependant s'en servir de nouveau avec succès, en préparant par une simple transformation les expressions $\int \zeta M dx$, $\int u M dx$ avec les deux autres $\int Z M dx$ & $\int V M dx$ de la manière que voici. Substituant la valeur de M, il a d'abord $\int \zeta \sin. x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-k} \int \zeta x \cos. x\sqrt{-k}\, dx$; or il est clair que si l'on n'avoit que le premier membre de cette expression, on seroit exactement dans le cas du Problème I. ; il ne s'agira donc que de ramener aussi le second membre à la même forme ; pour cela je change d'abord la formule $\int \zeta x \cos. x\sqrt{-k}\, dx$ en $\frac{\zeta x \sin. x\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} - \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{d.\zeta x}{dx}\right) \sin. x\sqrt{-k}\, dx$, ensuite je remarque que, puisque on suppose que les intégrales ne

s'étendent que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, le terme algébrique qui est de lui même $= 0$ dans le cas de $x = 0$, & qui le devient aussi dans le cas de $x = a$, à cause que ζ s'évanoüit par hipotèse, ce terme, dis-je, devra être entiérement effacé, de sorte que l'on aura simplement

$$\int \zeta x \cos. x\sqrt{-k}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{d.\zeta x}{dx}\right) \sin. x\sqrt{-k}\, dx.$$

Substituant donc cette transformée dans l'expression de $\int \zeta M dx$, elle deviendra $\int \left(\zeta + \frac{d.\zeta x}{dx}\right) \sin. x\sqrt{-k}\, dx$.

Faisant des opérations semblables sur les autres expressions intégrales, & supposant pour plus de simplicité

$$\zeta + \frac{d.\zeta x}{dx} = \zeta', \; u + \frac{d.ux}{dx} = u'$$

$$Z + \frac{d.Zx}{dx} = Z', \; V + \frac{d.Vx}{dx} = V'$$

nos deux équations intégrales deviendront

$$\int \zeta \sin. x\sqrt{-k}\, dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int Z' \sin. x\sqrt{-k}\, dx + \frac{\sin. t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V' \sin. x\sqrt{-k}\, dx$$

$$\int u \sin. x\sqrt{-k}\, dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int V' \sin. x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-ck} \sin. t\sqrt{-ck} \int Z' \sin. x\sqrt{-k}\, dx.$$

Ces équations sont réduites à l'état de celles que nous avons appris à construire dans le *Prob. précédent*. Il sera donc facile de leur appliquer la même méthode; or puisque tout se réduit à faire disparoître la quantité $\sqrt{-k}$ à cause du nombre infini de valeurs, dont elle est susceptible, il est clair que quoique ces valeurs ne soient pas les mêmes ici que dans le *Prob. cité*; néanmoins les résultats des opérations seront parfaitement semblables, ensorte qu'il ne faudra que substituer ζ', u', Z' & V' à la place de ζ, u, Z & V pour avoir tout d'un coup

$$\zeta' = \frac{Z'^{(x+t\sqrt{c})} + Z'^{(x-t\sqrt{c})}}{2}$$

+

$$+\frac{\int V'dx(x+t\sqrt{c})-\int V'dx(x-t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}}$$

$$u'=\frac{V'(x+t\sqrt{c})+V'(x-t\sqrt{c})}{2}$$

$$+\sqrt{c}\,\frac{\left(\frac{dZ'}{dx}\right)^{(x+t\sqrt{c})}-\left(\frac{dZ'}{dx}\right)^{(x-t\sqrt{c})}}{2}$$

Remettant à préſent au lieu de ζ, u', Z', V' leurs valeurs en ζ, u, Z & V, on aura deux équations qui détermineront les deux variables inconnues ζ & u par les données Z & V pour un tems quelconque t.

20. Les deux formules que nous venons de trouver étant parfaitement analogues à celles du *Prob.* I. admettront auſſi une conſtruction ſemblable à celle qu'on a déduit des courbes *fondamentales* & *dérivées* dans *l'Art.* 7. Suppoſons donc ici que les courbes *ANB*, *AQB* (*fig.* 1. & 2.) ſoient les lieux des valeurs de Z' & de V', ſavoir de $Z+\frac{d.Zx}{dx}$ & de $V+\frac{d.Vx}{dx}$ pour chaque abſciſſe x, & que les autres courbes *anb*, *AqB* (*fig.* 3. & 4.) en dépendent de la manière qu'on a dit dans *l'Art. cité*; on aura pour une abſciſſe quelconque $x=AM$, & pour un tems quelconque $t=\frac{MM'}{\sqrt{c}}=\frac{M'M}{\sqrt{c}}$

$$\zeta'=\zeta+\frac{d.\zeta x}{dx}=\frac{M'N'+MN}{2}+\frac{M'q-Mq}{2}$$

$$u'=u+\frac{d.ux}{dx}=\frac{M'Q'+MQ}{2}+\frac{M'n'-Mn}{2}$$

Si on déſigne par P & Q ces valeurs de ζ' & u', de ſorte que

$$\zeta+\frac{d.\zeta x}{dx}=2\zeta+\frac{xd\zeta}{dx}=P \;\&$$

$$u+\frac{d.ux}{dx}=2u+\frac{xdu}{dx}=Q$$

on aura en intégrant, après avoir multiplié par xdx

ζx^2

$\zeta x^2 = \int P x dx$; & $\zeta = \frac{\int P x dx}{x^2}$ & de même

$u x^2 = \int Q x dx$ & $u = \frac{\int Q x dx}{x^2}$.

Que φ & ψ repréſentent deux fonctions quelconques réguliéres ou irréguliéres, telles que

$MN = \varphi AM = \varphi x$

$MQ = \psi AM = \psi x$, on aura

$M'N' = \varphi AM' = \varphi (x + t\sqrt{c})$

$M'N = \varphi A'M = \varphi (x - t\sqrt{c})$

$M'Q' = \psi AM' = \psi (x + t\sqrt{c})$

$M'Q = \psi A'M = \psi (x - t\sqrt{c})$ &

$Mn = \sqrt{c} \frac{d.\varphi AM}{d.AM} = \sqrt{c} \frac{d.\varphi x}{dx}$

$Mq = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi AM d.AM = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi x dx$,

& par conſéquent

$M'n' = \sqrt{c} \left(\frac{d.\varphi(x + t\sqrt{c})}{dx}\right)$

$M'n = \sqrt{c} \left(\frac{d.\varphi(x - t\sqrt{c})}{dx}\right)$

$M'q' = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi (x + t\sqrt{c}) dx$

$M'q = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi (x - t\sqrt{c}) dx$; donc

$$P = \frac{\varphi(x + t\sqrt{c}) + \varphi(x - t\sqrt{c})}{2} + \frac{\int \psi (x + t\sqrt{c}) dx - \int \psi (x - t\sqrt{c}) dx}{2\sqrt{c}}$$

$$Q = \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})}{2} + \sqrt{c} \frac{\left(\frac{d.\varphi(x + t\sqrt{c})}{dx}\right) - \left(\frac{d.\varphi(x - t\sqrt{c})}{dx}\right)}{2}$$

Soit

Soit ſuppoſé $\frac{d.\varphi x}{dx} = \varphi' x$, $\frac{d.\varphi' x}{dx} = \varphi'' x$ &c. & $\int \varphi x\,dx = {}^{'}\varphi x$, $\int {}^{'}\varphi x\,dx = {}^{''}\varphi x$ &c., & ainſi pour la fonction ψ on aura $\int x.\varphi(x \pm t\sqrt{c})\,dx = x\int\varphi(x \pm t\sqrt{c})\,dx - \int dx \int\varphi(x \pm t\sqrt{c})\,dx = x\,{}^{'}\varphi(x \pm t\sqrt{c}) - {}^{''}\varphi(x \pm t\sqrt{c})$; traitant de la même manière les autres formules intégrales qui compoſent les valeurs de $\int R\,x\,dx$, & de $\int Q\,x\,dx$ on aura après toutes les ſubſtitutions,

$$t = \frac{{}^{'}\varphi(x+t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{''}\varphi(x+t\sqrt{c})}{2x^2} + \frac{{}^{''}\psi(x+t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} - \frac{{}^{'''}\psi(x+t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}} + \frac{{}^{'}\varphi(x-t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{''}\varphi(x-t\sqrt{c})}{2x^2} - \frac{{}^{''}\psi(x-t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} + \frac{{}^{'''}\psi(x-t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{{}^{'}\psi(x+t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{''}\psi(x+t\sqrt{c})}{2x^2} + \sqrt{c}\,\frac{\varphi(x+t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{{}^{'}\varphi(x+t\sqrt{c})}{2x^2} + \frac{{}^{'}\psi(x-t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{''}\psi(x-t\sqrt{c})}{2x^2} - \sqrt{c}\,\frac{\varphi(x-t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c}\,\frac{{}^{'}\varphi(x-t\sqrt{c})}{2x^2}$$

21. On peut ſemplifier ces expreſſions de la manière ſuivante. Au lieu de ${}^{''}\varphi(x+t\sqrt{c}) + \frac{{}^{'''}\psi(x+t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$ je poſe ſimplement $\Delta(x+t\sqrt{c})$, & au lieu de ${}^{''}\varphi(x-t\sqrt{c}) - \frac{{}^{'''}\psi(x-t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$ je ſubſtitue de même la ſeule expreſſion $\Gamma(x-t\sqrt{c})$, (Δ & Γ étant de nouvelles fonctions variables différentes de φ & ψ), & prenant les différences de la manière indiquée ci-deſſus, on obtiendra les formules:

$t =$

$$\zeta = \frac{\Delta'(x+t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Delta(x+t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{\Gamma'(x-t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Gamma(x-t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$\alpha = \sqrt{c}\,\frac{\Delta''(x+t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{\Delta'(x+t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$- \sqrt{c}\,\frac{\Gamma''(x-t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c}\,\frac{\Gamma'(x-t\sqrt{c})}{2x^2}$$

lesquelles s'accordent pour le fond avec celles que M. Euler a donné dans son *Mémoire* à la *pag.* 9. ci-dessus, où il nomme u, ce que nous avons appellé ζ & V, ce que nous avons nommé x.

22. La construction trouvée, au commencement de *l'Art.* 20., n'est bonne que pour les cas, où $x \pm t\sqrt{c}$ n'est pas plus grande que a, ni moindre que *zero*, puisque les valeurs de Z & de V ne sont données que pour la simple étendue de l'axe $AB = a$. Il faut donc chercher ici, comme on l'a fait dans le *Prob.* I., une manière de continuer les courbes ANB, AQB, &c. au delà des points A & B. Pour cela ayant conservé la construction de l'*Art.* 7. avec la même équation des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, on examinera leur cours au delà des points B' & A'', en supposant la quantité $\sqrt{-k}$ déterminée par l'équation $a\sqrt{-k} = \frac{\text{sin. } a\sqrt{-k}}{\text{col. } a\sqrt{-k}}$ (*Art.* 19.).

Pour ce qui regarde la branche $A''S$ qui est du côté des abscisses négatives rien n'est d'abord plus facile que de la trouver; car faisant x négatif, sin. $x\sqrt{-k}$ devient simplement négatif sans changer de valeur; d'où il s'ensuit que cette branche ne doit être que la branche même $A''S''$ renversée de la manière qu'on l'a déja fait dans la *fig.* 6. Ainsi on prouvera de nouveau par le même raisonnement de *l'Art.* 7. que la partie des aires qui répond à l'abscisse

AA''

AA'' ſera la même que celle qu'on pourroit former ſur l'abſciſſe AA', en emploïant la courbe $A'S'$ & la courbe AN continuée deſſous de l'axe de la même manière que la $A''S''$; d'où l'on voit que la continuation de la courbe ANB au delà de A, ſera auſſi la même que celle qu'on a pratiqué dans la *fig.* 7.

Mais il n'en ſera pas ainſi pour la continuation au delà de B; car ſin. $x\sqrt{-k}$ n'aïant plus dans le cas préſent des valeurs égales & contraires autour du point B' qui répond à $x = a$, la branche $B'S$ ne ſauroit non plus être la même que la $B'S'$ renverſée. Il ne ſeroit pas difficile de connoître la nature de cette branche $B'S$, mais cela ne ſerviroit de rien pour l'objet préſent, puiſque la méthode de *l'Art.* 7. demande que la branche $B'S$ puiſſe être ſubſtituée à la place de la $B''S''$, afin qu'on ait la courbe entière $A''S''B''$ qui ſoit la même que la $A'S'B'$, & que la ASB. Pour remplir cette condition il n'y a pas d'autre moïen que de transformer chaque la portion d'aire qui répond à $B'B$ en une autre égale, & dans laquelle la branche $B'S$ ſoit ſemblable & diamétralement oppoſée à la $B'S'$, comme dans la *fig.* 6. Examinons pour cela cette expreſſion intégrale $\int Z'$ ſin. $(a+z)\sqrt{-k}\,dz$, laquelle étant priſe depuis le point B', ou $z = 0$, juſqu'au point B, exprime l'aire formée par les produits des ordonnées des deux courbes ANB, $A'S'B'$ rélativement à l'eſpace $B'B$; & voïons ſi on peut la changer en une autre de la forme de $-\int(Z)$ ſin. $(a-z)\sqrt{-k}\,dz$, (Z) déſignant une quantité quelconque donnée en Z'.

Je prens cette autre expreſſion $\int R$ ſin. $(a+z)\sqrt{-k}\,dz$, & je la change dans ſon égale $\int R$ ſin. $a\sqrt{-k}\times$ cof. $z\sqrt{-k}\,dz + \int R$ cof. $a\sqrt{-k}\times$ ſin. $z\sqrt{-k}\,dx$. Je ſubſtitue enſuite à la place de ſin. $a\sqrt{-k}$, la quantité $a\sqrt{-k}$ cof. $a\sqrt{-k}$ tirée de l'équation qui détermine la valeur de $\sqrt{-k}$; & je fais évanoüir à l'aide d'une intégration par parties le coéficient

$\sqrt{-k}$ introduit par cette ſubſtitution ; j'ai ainſi

$\int R \text{ ſin. } a\sqrt{-k} \times \text{ cof. } z\sqrt{-k}\, dz$

$= a\sqrt{-k} \int R \text{ cof. } a\sqrt{-k} \times \text{ cof. } z\sqrt{-k}\, dz$

$= aR \text{ cof. } a\sqrt{-k} \times \text{ ſin. } z\sqrt{-k}$

$- a \int \text{cof. } a\sqrt{-k} \times \text{ ſin. } z\sqrt{-k}\, dR.$

Le terme algébrique de cette transformée s'évanoüit de lui même, lorſque $z = o$, donc ſi on ſuppoſe $R = o$, lorſque $z = B'B$ (nous verrons ci-après que cette ſuppoſition eſt poſſible) on pourra l'effacer entiérement ; & la prémiére transformée deviendra par la ſubſtitution $\int R$ cof. $a\sqrt{-k} \times$ ſin. $z\sqrt{-k}\, dz - a \int$ cof. $a\sqrt{-k} \times$ ſin. $z\sqrt{-k}\, dR = \int R$ ſin. $(a+z)\sqrt{-k}\, dz$. Développons à préſent les produits des *ſinus* & *coſinus* ; on aura l'équation

$$\tfrac{1}{2} \int R \text{ ſin. } (a+z)\sqrt{-k}\, dz - \tfrac{1}{2} \int R \text{ ſin. } (a-z)\sqrt{-k}\, dz$$

$$- \tfrac{1}{2} a \int \text{ſin. } (a+z)\sqrt{-k}\, dR + \tfrac{1}{2} a \int \text{ ſin. } (a-z)\sqrt{-k}\, dR$$

$= \int R \text{ ſin. } (a+z)\sqrt{-k}\, dz$; & réduiſant

$$\int (R + \frac{a\,dR}{dz}) \text{ ſin. } (a+z)\sqrt{-k}\, dz$$

$$= -\int (R - \frac{a\,dR}{dz}) \text{ ſin. } (a-z)\sqrt{-k}\, dz.$$

Comparant donc les deux membres de cette équation avec les formules propoſées $\int Z' \text{ ſin. } (a+z)\sqrt{-k}\, dz$, & $-\int (Z) \text{ ſin. } (a-z)\sqrt{-k}\, dz$, on aura $Z' = R + \frac{a\,dR}{dz}$ & $(Z) = R - \frac{a\,dR}{dz}$, d'où l'on déduira le rapport entre (Z) & Z'. Multipliant la prémiére équation par $e^{\frac{z}{a}}\, dz$, & intégrant il vient $\int Z' e^{\frac{z}{a}}\, dz = a R e^{\frac{z}{a}}$, & $R = \frac{e^{-\frac{z}{a}} \int Z' e^{\frac{z}{a}}\, dz}{a}$; d'où l'on tire en ſubſtituant $(Z) =$

$\frac{2e^{-\frac{z}{a}}\int Z' e^{\frac{z}{a}} dz}{a} - Z'$. Or nous avons supposé que R étoit $= 0$, lorsque $z = B'B$; on satisfera donc à cette condition, en prenant l'intégrale $\int Z' e^{\frac{z}{a}} dz$, tel qu'il s'évanoüisse dans ce cas; il ne faudra pour cela que poser $B'B - y$ au lieu de z & de dy au lieu de dz, & commencer l'intégration avec les abscisses y du point B en allant vers B'; on aura par ce moïen $(Z) = \frac{2e^{\frac{y}{a}}\int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - Z'$.

Telle est la valeur de (Z) qui étant prise au lieu de Z' pour multiplier chaque ordonnée correspondante de la branche $B'S$ produira une aire égale à celle qui se formeroit en multipliant la valeur de Z' par l'ordonnée correspondante non pas de la branche $B'S$, mais de celle qui seroit la vraie continuation de la courbe $A'S'B'$ dans notre cas. Delà, & du raisonnement de *l'Art.* 7. il n'est pas difficile de conclure que la portion d'aire qui répond naturellement à $B'B$ dans la formule $\int Z'$ sin. $(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}\, dx$ peut être changée en une autre, formée sur BB'' par les ordonnées de la branche $S''B''$, & par celles d'un autre branche, comme la BN'' (*fig.* 10.) qui serve, pour ainsi dire, de continuation à la courbe fondamentale ANB, & qui soit telle qu'en prenant de part & d'autre de B les abscisses égales BP', $B'P = y$, on ait toujours $P'N'' = (Z) = \frac{2e^{\frac{y}{a}}\int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - Z'$

$= \frac{2e^{\frac{y}{a}}\int P''N e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - P''N$.

Voila donc commant il faudra continuer la courbe *fondamentale* ANB au delà de B pour pouvoir faire usage de la construction donnée ci-dessus, lorsque X a des valeurs plus grandes que a.

Tout ce que nous avons juſqu'ici enſeigné ſur la manière de continuer cette courbe d'un côté & de l'autre, s'appliquera auſſi à l'autre courbe *fondamentale* AQB, & encore aux courbes *dérivées* anb, Aqb, pourvu que dans ces dernières on ait ſoin de placer les deux branches de continuation au deſſus de l'axe par la raiſon qu'on a dit à la fin de *l'Art.* 7.

La conſtruction qu'on vient de trouver n'eſt encore ſuffiſante que pour les cas, où X eſt contenu entre les limites $-a$ & $+2a$. Pour lui donner toute la généralité qu'il eſt poſſible, reprenons la formule $\int Z'$ ſin. $(a+z)\sqrt{-k}\,dz$ qui a été changée en $-\int(Z)$ ſin. $(a-z)\sqrt{-k}\,dz$; poſant $a+z=x$, on aura $\int Z'$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx=\int(Z)$ ſin. $(x-2a)\sqrt{-k}\,dx$, d'où l'on voit que l'abſciſſe x peut être diminuée de $2a$, pourvu qu'on change l'ordonnée Z' en (Z); de même ſi $((Z))$ eſt une fonction de (Z), telle que (Z) l'eſt de Z', on pourra diminuer de $2a$ l'abſciſſe qui ſe rapporte à (Z), en changeant (Z) en $((Z))$; donc on pourra auſſi diminuer l'abſciſſe de Z' de $4a$ en changeant immédiatement Z' en $((Z))$; & ainſi de ſuite. Delà il réſulte que le reſte de la continuation des courbes, ſoit *fondamentales*, ſoit *dérivées* au delà du point B, pourra ſe déduire aiſément de la branche qui répond à l'abſciſſe $=2a$; car on n'aura qu'à transformer ſucceſſivement cette branche en d'autres, dont les ordonnées aux mêmes abſciſſes ſe répondent entr'elles, comme les expreſſions Z', (Z), $((Z))$ &c. & appliquer enſuite par ordre, & ſuivant la direction AB toutes ces branches l'une à côté de l'autre le long de l'axe AB prolongé à l'infini.

Par un raiſonnement tout oppoſé, on prouvera que la continuation des mêmes courbes au delà de A ſe fera par un aſſemblage ſemblable de branches dérivées l'une après l'autre de la ſeule branche qui répond à l'abſciſſe $2a$, mais avec des opérations contraires aux précédentes, ſavoir de manière que les ordonnées qui répondent à une même abſciſſe

ſciſſe x dans chaque branche à commencer du point A ſoient entr'elles, comme les quantités (Z) & Z'.

Par-là on trouvera ſans difficulté que les courbes, dont il s'agit, auront autour du point A une figure ſemblable, avec cette ſeule différence que pour les courbes *fondamentales* les deux branches infinies de part & d'autre de A ſeront diamétralement oppoſées, ſavoir, l'une au deſſus, l'autre au deſſous de l'axe; & que pour les courbes *dérivées*, les branches ſeront l'une & l'autre du même côté de l'axe; d'où il s'enſuit qu'aïant exécuté la continuation du côté des abſciſſes poſitives à l'infini, ſuivant ce qu'on a dit ci-deſſus, on n'aura plus qu'à renverſer la même courbe au delà de A, & au deſſous, ou au deſſus de l'axe, ſelon qu'elle appartiendra aux *fondamentales*, ou aux *dérivées*.

23. Par la méthode qui vient d'être expliquée, nous avons la manière de continuer de part & d'autre à l'infini les courbes qui dépendent des valeurs de Z & de V, données à volonté dans le prémier inſtant du mouvement, ſans s'embaraſſer que les différentes branches de ces courbes ſoient liées entr'elles par la loi de continuité. Mais ſi on vouloit ſi borner à admettre cette loi, on pourroit obtenir les mêmes réſultats avec beaucoup moins de peine par la ſimple conſidération des formules données à la fin de *l'Art.* 20. Toute la difficulté ſe réduiroit à chercher la nature des fonctions φ & ψ au delà des points A & B, par la condition que ζ & u ſoient $= 0$ dans ces points quelque valeur qu'on ſuppoſe à t.

Poſons d'abord dans ces formules $x = 0$, & ζ & u de même $= 0$, on aura les équations

$$0 = \frac{\varphi t\sqrt{c} + \varphi - t\sqrt{c}}{2x} - \frac{\varphi t\sqrt{c} + \varphi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$
$$+ \frac{\psi t\sqrt{c} - \psi - t\sqrt{c}}{2x\sqrt{c}} - \frac{\psi t\sqrt{c} - \psi - t\sqrt{c}}{2x^2\sqrt{c}}$$

$0 =$

$$0 = \frac{\psi t\sqrt{c} + \psi - t\sqrt{c}}{2x} - \frac{''\psi t\sqrt{c} + ''\psi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$
$$+ \sqrt{c}\,\frac{\varphi t\sqrt{c} - \varphi - t\sqrt{c}}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{'\varphi t\sqrt{c} - '\varphi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$

De ces deux équations il suffira de vérifier la prémiére ; puisque la seconde n'en est que la différentielle divisée par dt ; mais il se présente dans cette opération une difficulté ; car les termes étant divisés les uns par x, les autres par x^2, on peut être en doute si en faisant à part $= 0$ les numérateurs de x & de x^2 toute la formule disparoîtra, à cause que x est déja lui même $= 0$. Pour lever cette difficulté, supposons que x, au lieu d'être tout-à-fait nul, soit seulement infiniment petit & $= \alpha$; & développons chaque fonction $''\varphi(\alpha \pm t\sqrt{c})$, $''\psi(\alpha \pm t\sqrt{c})$ &c. suivant la formule connue $\varphi(\zeta + \alpha) = \varphi\zeta + \alpha\varphi'\zeta + \frac{\alpha^2\varphi''\zeta}{2} + \frac{\alpha^2\varphi'''\zeta}{2\cdot 3}$ + &c. ; en effaçant ce qui se détruit, & en négligeant les termes qui se trouvent multipliés par des puissances de α, on aura l'équation

$$0 = -\frac{''\varphi t\sqrt{c} + ''\varphi - t\sqrt{c}}{2\alpha^2} + \frac{\varphi t\sqrt{c} + \varphi - t\sqrt{c}}{4}$$
$$- \frac{'''\psi t\sqrt{c} - '''\psi - t\sqrt{c}}{2\alpha^2} + \frac{'\psi t\sqrt{c} - '\psi - t\sqrt{c}}{4}$$

qui doit être vraie indépendanment de la quantité α ; donc on aura

$$''\varphi t\sqrt{c} + ''\varphi - t\sqrt{c} + '''\psi t\sqrt{c} - '''\psi - t\sqrt{c} = 0,$$
$$\varphi t\sqrt{c} + \varphi - t\sqrt{c} + '\psi t\sqrt{c} - '\psi - t\sqrt{c} = 0$$

équations auxquelles on satisfera en posant $''\varphi - t\sqrt{c} = -''\varphi t\sqrt{c}$, & $'''\psi - t\sqrt{c} = '''\psi t\sqrt{c}$, ou bien en différentiant $''\psi - t\sqrt{c} = -''\psi t\sqrt{c}$. Or, t étant une variable qui peut croître à l'infini, en commençant du zero, $t\sqrt{c}$ pourra représenter une abscisse quelconque positive ; donc la nature des fonctions $''\varphi$ & $''\psi$ devra être telle, que faisant les abscisses négatives, ces fonctions deviennent simplement

néga-

négatives ſans changer de valeur. Il en ſera de même des fonctions φ & ψ, puiſque en différentiant deux fois les équations précédentes, elles deviennent $\varphi - t\sqrt{c} = -\varphi t\sqrt{c}$, & $\psi - t\sqrt{c} = -\psi t\sqrt{c}$; d'où l'on voit que les deux courbes ANB, AQB qui repréſentent ces fonctions, devront avoir de part & d'autre du point A des branches égales & diamétralement oppoſées, ainſi qu'on l'a trouvé dans *l'Art.* 22. Il n'en ſera pas tout-à-fait ainſi pour les courbes anb & Aqb qui contiennent les fonctions φ' & $'\psi$. Car l'on a pour ces fonctions $\varphi' - t\sqrt{c} = \varphi' t\sqrt{c}$, & $'\psi - \sqrt{c} = '\psi t\sqrt{c}$; ce qui montre que les ordonnées doivent être exactement les mêmes à des abſciſſes égales, poſitives & négatives; & que par conſéquent les branches autour de A ſeront ſemblablement ſituées ſur l'axe; ce qui s'accorde avec ce qui a été enſeigné dans *l'Art. cité*.

Examinons maintenant les valeurs des mêmes fonctions pour les abſciſſes qui ſurpaſſent l'axe donné a. Poſant $x = a$, & z & $u = 0$, on aura de nouveau deux équations; la prémiére ſera

$$0 = \frac{'\varphi(a+t\sqrt{c}) + '\varphi(a-t\sqrt{c})}{2a} - \frac{''\varphi(a+t\sqrt{c}) + ''\varphi(a-t\sqrt{c})}{2.a^2} + \frac{''\psi(a+t\sqrt{c}) - ''\psi(a-t\sqrt{c})}{2a\sqrt{c}} - \frac{'''\psi(a+t\sqrt{c}) - '''\psi(a-t\sqrt{c})}{2a^2\sqrt{c}}$$

la ſeconde ne ſera que la différentielle de celle-ci, diviſée par dt, & par conſéquent nous pourrons nous diſpenſer d'y avoir égard. Or afin que les fonctions φ & ψ ne dépendent pas l'une de l'autre, on ſera ſéparément

$a\,'\varphi(a+t\sqrt{c}) - ''\varphi(a+t\sqrt{c}) = -a\,'\varphi(a-t\sqrt{c}) + ''\varphi(a-t\sqrt{c})$ &

$a\,''\psi(a-t\sqrt{c}) - '''\psi(a+t\sqrt{c}) = a\,''\psi(a-t\sqrt{c}) = '''\psi(a-t\sqrt{c})$.

Dif-

Différentions deux fois la prémière, & trois fois la seconde; on aura en changeant les signes

$$\varphi(a+t\sqrt{c}) - a\varphi'(a+t\sqrt{c}) = -\varphi(a-t\sqrt{c}) + a\varphi'(a-t\sqrt{c}) \quad \&$$

$$\psi(a+t\sqrt{c}) - a\psi'(a+t\sqrt{c}) = -\psi(a-t\sqrt{c}) + a\psi'(a-t\sqrt{c}),$$

équations qui sont tout-à-fait semblables entr'elles.

Je multiplie par $e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt$, & j'intégre; j'ai

$$-a\varphi(a+t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} = -a\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} - 2\int\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt,$$

où l'on voit que la valeur de l'intégrale du dernier terme doit $= 0$, lorsque $t = 0$, puisque dans ce cas les deux autres termes se détruisent d'eux mêmes. On aura donc

$$\varphi(a+t\sqrt{c}) = \varphi(a-t\sqrt{c}) + \frac{2e^{\frac{t\sqrt{c}}{a}}}{a}\int\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt.$$

Or si l'on fait $t\sqrt{c} = y$, & que l'intégration soit supposée commencer du point, où $y = 0$, on aura

$$\varphi(a+y) = \varphi(a-y) - \frac{2e^{\frac{y}{a}}}{a}\int\varphi(a-y)\,e^{-\frac{y}{a}}\,dy.$$

Ce qui nous fait connoître la manière, dont les valeurs de la fonction φ qui sont de part & d'autre à distances égales de l'extrémité B de l'axe doivent être liées entr'elles. Or il est aisé de voir en relisant les *Art.* 20. & 22. que $\varphi(a-y)$ dénote ici la même chose que Z' & $\varphi(a+z)$ la même chose que $-(Z)$, donc l'équation précédente donne le même rapport entre Z' & (Z) qu'on a trouvé dans le dernier des *Art. cités*; & par conséquent aussi la même continuation de la courbe ANB au delà de B. Il est vrai que l'équation entre (Z) & Z' donnée dans l'endroit mentionné n'étoit d'abord censée appartenir qu'à la seule portion

tion de l'axe compriſe depuis l'abſciſſe a juſqu'à l'abſciſſe $2a$; & que pour toutes les autres abſciſſes plus grandes à l'infini, on a donné une manière générale de continuer la courbe au moïen des branches déja connues; mais il ne faudra que conſidérer toutes les branches de continuation au delà de B, pour s'appercevoir qu'elles auront conſtamment avec celles qui ſont en deçà de B, le même rapport que la quantité $-(Z)$ a avec la quantité Z'.

Ce qu'on vient de démontré ſur la fonction φ doit ſe dire de même de l'autre fonction ψ, qui appartient à la courbe AQB, & il ne ſera pas difficile de l'appliquer auſſi aux autres fonctions φ' & ψ pour les courbes aqb, ANB, & de faire voir le parfait accord qu'il y a entre les réſultats de ces procédés, & ceux qu'on a trouvé plus haut par une voie différente.

Cette matière auroit peut être beſoin d'être traitée, avec un plus long détail, que nous ne l'avons fait ici; mais ceux, qui auront bien ſaiſi l'eſprit de nos méthodes, n'auront pas de peine à ſuppléer d'eux mêmes à ce, qui peut manquer pour l'entière exactitude des démonſtrations, ſans qu'il ſoit néceſſaire de nous étendre davantage là-deſſus.

24. Il eſt à remarquer, au reſte, que l'on abregeroit beaucoup la ſolution précédente, ſi par le moïen de quelque ſubſtitution convenable on parvenoit à ramener tout d'un coup l'équation $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{2\,d.\frac{z}{x}}{dx}\right)$ à la forme $\frac{d^2\zeta'}{dt^2} = c\frac{d^2\zeta'}{dx^2}$.

Or, pour cela, il n'y auroit qu'à ſuppoſer $\zeta = \frac{\int \zeta' x\,dx}{x^2}$, ce qui donne en différentiant, $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\int\left(\frac{d^2\zeta'}{dt^2}\right) x\,dx}{x^2}$, $\frac{d.\frac{\zeta}{x}}{dx} = \frac{\zeta'}{x^2}$

$-\frac{3\int\zeta' x\,dx}{x^3}$, $\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{(\frac{d\zeta'}{dx})}{x} - \frac{3\zeta'}{x^2} + \frac{6\int\zeta' x\,dx}{x^4}$, & substituant $\frac{\int(\frac{d^2\zeta'}{dt^2})\,x\,dx}{\frac{1}{2}x^2} = c\,[\,\frac{(\frac{d\zeta'}{dx})}{x} - \frac{\zeta'}{x^2}\,]$; multipliant par x^2, & différentiant de nouveau $(\frac{d^2\zeta'}{dt^2})\,x\,dx = c\,(\frac{d^2\zeta'}{dx^2})\,x\,dx$, ou bien $(\frac{d^2\zeta'}{dt^2}) = c\,(\frac{d^2\zeta'}{dx^2})$. Equation réduite au cas du *Prob.* 1. Or puiſque la valeur de ζ' eſt ici $= \frac{d.\zeta x^2}{x\,dx} = 2\zeta + \frac{x\,d\zeta}{dx}$, telle qu'on l'a ſuppoſé dans l' Analiſe du *Prob. préc.* il eſt facile de voir que la ſolution, qu'on aura de façon, reviendra entiérement à celle qu'on a déja trouvé. Il eſt vrai qu'il faudra pour cela que la quantité k ait auſſi les mêmes valeurs ; & c'eſt ce qu'il ſera aiſé de prouver ; car on ſait, que la détermination de k dépend de la condition que les termes algébriques $\frac{Md\zeta'}{dx} - \frac{\zeta' dM}{dx}$ diſparoiſſent, lorſque $x = a$ (*Voïés Prob.* 1.). Or ζ' étant ici $= 2\zeta + \frac{x\,d\zeta}{dx}$, $d\zeta'$ ſera $= 3\,d\zeta + \frac{x\,d^2\zeta}{dx}$; d' où l'on aura en poſant $x = a$, & $\zeta = 0$, l' équation

$$\frac{3\,Md\zeta}{dx} + \frac{aMd^2\zeta}{dx} - \frac{a\,dMd\zeta}{dx^2} = 0.$$

Maintenant, puiſque ζ doit toujours diſparoître, lorſque $x = a$, quel que ſoit le tems t, on aura auſſi $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$, & par conſéquent, par l'équation fondamentale, $0 = \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{2d\zeta}{adx} - \frac{2\zeta}{a^2}$ d'où l'on tire $\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{2d\zeta}{adx}$, laquelle valeur ſubſtituée, on

aura

aura $(M - \frac{adM}{dx})\frac{d\zeta}{dx} = 0$, ou bien $M - \frac{adM}{dx} = 0$. Or, M étant $=$ fin. $x\sqrt{-k}$ (*Art.* 6.), on aura en substituant, & posant ensuite $x = a$, fin. $a\sqrt{-k} - a\sqrt{-k}$ cos. $a\sqrt{-k} = 0$, d'où l'on tire, comme dans *l'Art.* 18. $a\sqrt{-k} = \frac{\text{fin. } a\sqrt{-k}}{\text{col. } a\sqrt{-k}} =$ tang. $a\sqrt{-k}$.

Il y a encore un autre substitution qu'on pourroit employer au lieu de la précédente. Cette substitution consiste à faire $\zeta = y - \frac{x\,dy}{dx}$; ce qui réduira l'équation en ζ à une équation en y de la forme de $(\frac{d^2\zeta}{dt^2}) = c(\frac{d^2\zeta}{dx^2})$, & cette équation étant construite par la méthode du *Prob.* 1. on aura pour la valeur de ζ des formules analogues à celles qu'on a trouvé à la fin de *l'Art.* 20. ci-dessus.

Application de la solution précédente à la recherche des loix de la propagation du Son.

25. L'Application du Problême précédent à la théorie de la propagation du Son, se présente d'elle même. Imaginons un corps sonore quelconque mis en vibration au milieu d'un air tranquille, homogène, & libre de tous cotés; il est visible que ce corps peut être regardé comme placé sensiblement au centre d'une sphère aérienne d'une étendue indéfinie; donc on ne s'écartera, que très-peu, de la vérité, en calculant les mouvemens comuniqués à toute la masse de l'air, dans l'hipothése des ondulations sphériques, de *l'Art.* 18., & d'après la construction donnée dans *l'Art.* 20. *& suiv.*

Pour cela, aïant mené la ligne indéfinie PR, qui représente le rayon de la sphère totale d'air qui environne le corps sonore, soit pris PQ pour le rayon de la petite

ſphère, dans laquelle ſont contenues les particules qui ont reçu leur mouvement primitif du corps ſonore placé en P; & ſoient tracées ſur la ligne PQ les courbes qui repréſentent les valeurs données de Z & V, & que nous avons appellées courbes *fondamentales*; il ſuit de *l'Art.* 22., que chacune de ces deux courbes devra être continuée du coté oppoſé Pq, avec une branche ſemblable, égale, & diamétralement oppoſée à la prémière. Il eſt vrai que cette propoſition n'a été démontrée que pour les courbes qui repréſentent les variables Z' & V'; mais il eſt facile de voir qu'elle a également lieu ici, où à cauſe de $x = 0$ au point P, les valeurs de Z', & V' deviennent $2Z$, & $2V$. On prouvera de même que les autres branches de continuation qui ſuivant la Théorie de *l'Art. cité*, devroient être ajoutées, du coté PR, diſparoîtront entiérement à cauſe du rayon a infini; de ſorte que les courbes *génératrices* ſeront toutes renfermées dans le ſeul eſpace qQ. Or, cela poſé, qu'on demande pour un tems quelconque t les mouvemens des particules qui compoſent la fibre rectiligne PR, mouvemens qui, ſelon l'hipothèſe, doivent être ſenſiblement les mêmes pour toutes les autres fibres partant du centre P.

Soit pour faciliter cette recherche $t > \frac{PQ}{\sqrt{c}}$; il eſt évident qu'il faudra rejetter dans la conſtruction de *l'Art.* 20. les termes qui répondent aux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$, ces termes ne pouvant ici produire aucune valeur réelle; il n'y aura donc que les termes rélatifs aux abſciſſes $x - t\sqrt{c}$, qui entrent dans la détermination des quantités z & u, d'où dépend la connoiſſance des mouvemens en queſtion. Aïant pris (*fig.* 11.) ſur la ligne PR le point P' tel que $PP' = t\sqrt{c}$, & coupé de part & d'autre les parties $P'Q'$, $P'q'$ égales à PQ, & Pq; je tranſporte en $q'P'Q'$ les deux courbes qui renferment les valeurs des Z & V, telles qu'elles ont été décrites ſur le diamètre qPQ; & prenant le point P' pour l'ori-

l'origine des abſciſſes x, je trouve pour une particule quelconque M;

$$\zeta' = \frac{Z + \frac{d \cdot Zx}{dx} - \frac{1}{\sqrt{c}} \int \cdot (V + \frac{d \cdot Vx}{dx}) dx}{2}$$

$$u' = \frac{V + \frac{d \cdot Vx}{dx} - d \cdot (Z + \frac{d \cdot Zx}{dx}) \frac{\sqrt{c}}{dx}}{2};$$

Or par les ſuppoſitions faites à la fin de *l'Art.* 19., on a généralement $\zeta' = \zeta + \frac{d \cdot \zeta x}{dx}$, & $u' = u + \frac{d \cdot ux}{dx}$; l'origine des x étant au point P. Mettant donc ici pour tranſporter cette origine en P', $x + t\sqrt{c}$ au lieu de x, & intégrant après avoir multiplié par $(x + t\sqrt{c}) dx$, il viendra les deux équations ſuivantes

$$\zeta (x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2} Z x^2 + \frac{1}{2} t\sqrt{c} (\int Z dx + Zx)$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (x + t\sqrt{c}) dx \int (V + \frac{d \cdot Vx}{dx}) dx$$

$$u (x + t\sqrt{c})^3 = \frac{1}{2} V x^2 + \frac{1}{2} t\sqrt{c} (\int V dx + Vx)$$
$$- \frac{\sqrt{c}}{2} \int (x + t\sqrt{c}) \times d \cdot (Z + \frac{d \cdot Zx}{dx}).$$

Si on ſimplifie les expreſſions intégrales par la méthode des intégrations par parties; & qu'on ajoute les conſtantes néceſſaires, on aura

$$\zeta (x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2} (x^2 + x t\sqrt{c}) Z + \frac{1}{2} t\sqrt{c} \int Z dx$$
$$- \frac{1}{2} t\sqrt{c} A - \frac{1}{2\sqrt{c}} (\frac{x^2}{2} + x t\sqrt{c}) \int V dx - \frac{1}{4\sqrt{c}}$$
$$\int V x^2 dx + \frac{D}{4\sqrt{c}}$$

$$u (x + t\sqrt{c})^3 = \frac{1}{2} (x^2 + x t\sqrt{c}) V + \frac{1}{2} t\sqrt{c} \int V dx$$
$$- \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}t\sqrt{c}B-\frac{\sqrt{c}}{2}(x^2+xt\sqrt{c})\frac{dZ}{dx}-\frac{\sqrt{c}}{2}(x+2t\sqrt{c})$$
$$Z+\frac{\sqrt{c}}{2}\int Z\,dx-\frac{\sqrt{c}}{2}A.$$

L'addition des conſtantes ſert à rendre égal à zero le dernier membre de chacune des équations précédentes, lorſque $x+t\sqrt{c}=0$, ou $x=-t\sqrt{c}=-PP'$; ce qui eſt néceſſaire, puiſque, alors les prémiers membres diſparoiſſent d'eux mêmes; ainſi en ſuppoſant que les intégrations commencent toutes au point P' où $x=0$, les lettres A, B, D, repréſenteront les valeurs des intégrales $\int Z\,dx$, $\int V\,dx$, $\int Vx^2\,dx$ priſes depuis P' juſqu'à q', leſquelles ſont les mêmes que ſi on les prenoit de l'autre coté depuis P' juſqu'à Q'. Il faut néanſmoins remarquer que dans la prémière équation l'on ne trouve point de conſtante qui faſſe évanoüir le terme $-\frac{1}{2\sqrt{c}}(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c})\int V\,dx$, dans le cas de $x=-t\sqrt{c}$; c'eſt une omiſſion que j'ai fait exprès à cauſe d'un nouveau terme qu'il faut encore ajouter à la même équation. Pour voir la raiſon de ceci on n'a qu'à ſe ſouvenir de ce, que dans l'expreſſion des valeurs de z' & de u', nous avons regardé, comme généralement nuls, tous les termes qui répondoient aux abſciſſes exprimées par $x+t\sqrt{c}$; il en eſt cependant un qu'on ne peut pas négliger; c'eſt celui qui eſt exprimé par la formule intégrale $\int(V+\frac{d\cdot Vx}{dx})dx=\int V\,dx+Vx$; car il eſt évident que quoique les valeurs de V diſparoiſſent ſur la ligne QR depuis le point Q, l'intégrale $\int V\,dx$ conſerve toujours la même valeur conſtante, qu'on a déſigné ci-deſſus par B; delà il eſt facile de conclure, qu'il faut ajouter à la valeur de z' le terme $\frac{B}{2\sqrt{c}}$, & par conſéquent à

la

la valeur de $\zeta\,(x+t\sqrt{c})^2$ le terme $(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c})\frac{B}{2\sqrt{c}}$, lequel fera juſtement diſparoître l'autre terme $-\frac{1}{2\sqrt{c}}$ $(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c})\int V\,dx$, lorſque $x=-t\sqrt{c}$, $\int V\,dx$ devenant alors $=B$.

Si l'on examine maintenant la forme des deux équations précédentes, on verra aiſément que l'on peut ſe paſſer de l'addition des conſtantes, en donnant un autre origine aux intégrales $\int Z\,dx$, $\int V\,dx$, $\int V x^2\,dx$, & les faiſant commencer du point q' en allant vers R, ainſi l'on aura plus ſimplement

$$\zeta = \frac{(x^2+xt\sqrt{c})Z+t\sqrt{c}\int Z\,dx}{2(x+t\sqrt{c})^2} - \frac{(x^2+2xt\sqrt{c})\int V\,dx+\int V x^2\,dx}{4\sqrt{c}(x+t\sqrt{c})^2}$$

$$u = \frac{(x^2+xt\sqrt{c})V+t\sqrt{c}\int V\,dx}{2(x+t\sqrt{c})^2} - \sqrt{c}\,\frac{(x^2+xt\sqrt{c})\frac{dZ}{dx}+(x+2t\sqrt{c})\,Z-\int Z\,dx}{2(x+t\sqrt{c})^2}$$

26. Il eſt viſible par ces formules que ζ & u ſont toujours $=0$, lorſque la valeur de x tombe au delà des points q', & Q'; d'où il ſuit que pour le tems donné t, il n'y a que la ſeule partie $q'Q'$ de la fibre qui ſoit en mouvement; or comme le point du milieu P' a été pris tel que $PP'=t\sqrt{c}$; il eſt évident que l'onde aérienne $q'Q'$ avancera toujours avec une viteſſe conſtante & $=\sqrt{c}$ qui eſt la même que nous avons trouvé plus haut dans la prémière hipothèſe (*Art.* 12.). On pourroit ici développer les loix particulières que chaque particule d'air obſervera dans ſes mouvemens, dépendamment des prémières impreſſions Z & V produites par le corps ſonore; mais laiſſant

ces

ces discussions peu importantes en elles mêmes nous nous, contenterons de faire observer en général la variation des quantités z & u, à mesure que le tems t augmente.

Pour cela, comme l'espace PQ est toujours très-petit (*Art.* 14.), on peut, sans erreur sensible, lorsque le tems t a déja une valeur considérable, négliger x par rapport à $t\sqrt{c}$; ainsi il viendra

$$z = \frac{xZ + \int Z\,dx - \frac{1}{\sqrt{c}}\int V\,dx}{2t\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{xV + \int V\,dx - \left(\frac{x\,dZ}{dx} + 2Z\right)\sqrt{c}}{2t\sqrt{c}}$$

d'où l'on voit qu'en général les valeurs de z & de u diminuent dans la raison inverse de $t\sqrt{c}$; ou de PP'; ce qui montre que la force ou l'intensité du Son, doit décroître à très-peu près dans la raison inverse des distances simples, du centre de propagation.

Je ne pousserai pas plus loin l'examen de ces formules, & je ne chercherai pas, non plus à déduire de la théorie exposée dans *l'Art.* 22. les lois de la reflexion qui auroit lieu dans l'hipothèse présente si la masse de l'air étoit renfermée dans un vase sphérique de grandeur finie. Ces recherches étant de peu d'utilité je me contenterai d'en avoir posés tous les principes dans la solution générale du Problème précédent.

CHAPI-

CHAPITRE IV.

Application de nôtre méthode du Chapître II. à différentes hipothéſes.

27. LEs Problêmes, dont nous allons maintenant nous occuper, quoique peu néceſſaires pour la matière que nous traitons, ſerviront néanmoins à faire voir l'utilité, & l'extenſion de notre méthode du Chapit. II.; ils pourront auſſi être d'uſage dans pluſieurs autres points de la Théorie du Son.

PROBLEME III.

Conſtruire l'équation

$$\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right) + mc\left(\frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}\right).$$

Multipliant par Mdx, & pratiquant les mêmes réductions que dans le Prob. II. on aura l'équation en M, $\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{m\,dM}{x\,dx} = kM$; qu'il faudra intégrer. Or il eſt facile de s'aſſurer, au moïen de quelques transformations convenables, que cette équation tombe dans le cas général de Ricati, & que par conſéquent ſon intégrabilité dépend de certaines conditions, qui ſe réduiſent ici à ce, que m ſoit un nombre pair poſitif ou négatif; mais la méthode ordinaire d'intégration pour ces mêmes cas eſt ſi laborieuſe, que je ne ſaurois me réſoudre à la pratiquer; d'ailleurs il ne ſuffit pas de trouver une expreſſion algébrique de M; il faut de plus, qu'elle ſoit telle, qu'on puiſſe dans la ſuite du calcul chaſſer aiſément la quantité k à l'aide de quelques réductions; comme on a fait dans les Problêmes précédens. Il m'a donc fallu imaginer une autre méthode, & voici comment je m'y ſuis pris.

Puiſque l'on a trouvé pour le cas de $m = 0$, qui eſt celui du Prob. I., $M = A$ ſin. $x\sqrt{} - k$; & pour le cas de $m = 2$ dans le Prob. II., $M = A$ (ſin. $x\sqrt{} - k - x\sqrt{} - k$ cof. $x\sqrt{} - k$) ; ce qui s'exprime plus ſimplement par $M = A$ ſin. $x\sqrt{} - k - Ax \frac{d \cdot \text{ſin. } x\sqrt{} - k}{dx}$, on eſt aſſés fondé à croire que, lorſque m aura une valeur quelconque 4, 6 &c. l'expreſſion de M ſera de la forme ſuivante

$$M = A \text{ ſin. } x\sqrt{} - k + Bx \frac{d \cdot \text{ſin. } x\sqrt{} - k}{dx}$$
$$+ Cx^2 \frac{d^2 \cdot \text{ſin. } x\sqrt{} - k}{dx^2} + \&c.$$

A, B, C &c. étant des coéficiens à déterminer par la ſubſtitution, & la comparaiſon des termes.

Mais pour embraſſer une plus grande généralité, je ſuppoſe ſin. $x\sqrt{} - k = u$; &

$$M = Au + B\frac{du}{dx} + C\frac{d^2u}{dx^2} + D\frac{d^3u}{dx^3} + \&c.$$

& je regarde les quantités A, B, C &c. comme des fonctions variables de x; dont il faut chercher la valeur convenable à l'équation donnée.

Je commence par prendre la différentielle de M, que je mets ſous la forme ſuivante

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dA}{dx} \cdot u + \frac{dB}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dC}{dx} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dD}{dx} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \&c.$$
$$+ A \quad + B \quad + C \quad + \&c.$$

Je trouve de même

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2A}{dx^2} \cdot u + \frac{d^2B}{dx^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d^2C}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2D}{dx^2} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \&c.$$
$$+ \frac{2dA}{dx} \quad + \frac{2dB}{dx} \quad + \frac{2dC}{dx} \quad + \&c.$$
$$+ A \quad + B \quad + \&c.$$

On

On trouvera de plus par la nature de la fonction u

$$kM = A\frac{d^2u}{dx^2} + B\frac{d^3u}{dx^3} + C\frac{d^4u}{dx^4} + D\frac{d^5u}{dx^5} + \&c.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{m\,dM}{x\,dx} - kM = 0$, & ordonnant les termes par rapport à la variable u on aura

$$\begin{aligned}
&u\left(\frac{d^2A}{dx^2} - \frac{m\,dA}{x\,dx}\right)\\
&+\frac{du}{dx}\left(\frac{d^2B}{dx^2} - \frac{m\,dB}{x\,dx} + \frac{2\,dA}{dx} - \frac{mA}{x}\right)\\
&+\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{d^2C}{dx^2} - \frac{m\,dC}{x\,dx} + \frac{2\,dB}{dx} - \frac{mB}{x}\right)\\
&+\frac{d^3u}{dx^2}\left(\frac{d^2D}{dx^2} - \frac{m\,dD}{x\,dx} + \frac{2\,dC}{dx} - \frac{mC}{x}\right)\\
&+ \&c. \qquad \&c. \qquad \&c. \qquad = 0;
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera les équations particulières

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2A}{dx^2} - \frac{m\,dA}{x\,dx} = 0\\
&\frac{d^2B}{dx^2} - \frac{m\,dB}{x\,dx} + \frac{2\,dA}{dx} - \frac{mA}{x} = 0\\
&\frac{d^2C}{dx^2} - \frac{m\,dC}{x\,dx} + \frac{2\,dB}{dx} - \frac{mB}{x} = 0\\
&\qquad \&c. \qquad \&c. \qquad \&c.
\end{aligned}$$

qui sont très-aisées à résoudre; dans l'intégration de toutes ces équations, à l'exception de la prémière, on peut négliger les constantes, qui ne serviroient qu'à rendre les valeurs des quantités B, C, D &c. plus compliquées sans les rendre plus générales. Ainsi f & h étant les deux constantes de la prémière quantité A on aura

$$A = f + hx^{m+1}$$

$$B = -fx - hx^{m+2}$$

$$C = f\frac{(m-2)}{2\cdot(m-1)}x^2 + h\frac{(m+4)}{2(m+3)}x^{m+3}$$

$$D = -f\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3\cdot(m-1)(m-2)}x^3 - h\frac{(m+4)(m+6)}{2\cdot 3(m+3)(m+4)}x^{m+4}$$

$E =$ &c.

où la loi de la progreſſion eſt aſſés manifeſte.

28. Dans ces formules on voit clairement que ſi m eſt un nombre pair poſitif à commencer par 2, la ſerie des termes multipliés par f devient exacte & finie, tandis que l'autre ſerie qui eſt toute multipliée par h, va à l'infini; c'eſt tout le contraire, lorſque m eſt un nombre pair négatif à commencer de -4, car dans ce cas la ſeconde ſerie ſe termine après un nombre fini de termes, la prémière allant à l'infini; d'où il ſuit que, puiſque les quantités f & h ſont abſolument arbitraires, il n'y a qu'à faire $h = 0$ dans le prémier cas, & $f = 0$ dans le ſecond, & l'on aura algébriquement la valeur de M en x, en cherchant celle des coéficiens A, B, C &c. dont le nombre eſt alors limité.

On pourroit, au prémier aſpect, former des doutes ſur l'exactitude des formules précédentes, par la raiſon qu'elles ne paroiſſent pas ſatisfaire au cas de $m = 0$; & de $m = -2$, dans leſquels on ſait d'ailleurs que M a une valeur finie.

Pour lever cette difficulté, il ne faut que recournir à l'intégration immédiate des équations qui doivent donner les valeurs de A & de B, dans les deux cas propoſés; on trouvera pour le prémier, $A = f$, $B = 0$, $C = 0$ &c. & pour le ſecond $A = hx^{-1}$, $B = 0$, $C = 0$; c'eſt un inconvénient attaché à toutes ces ſortes de formules générales d'intégration, d'être en défaut dans certains cas, qui demandent un exament à part.

On pourroit encore être embaraſſé dans l'uſage des formules précédentes, lorſque $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5$. &c. puiſque dans ces cas tous les termes de la ſerie f, ou h deviennent infinis, à l'exeption ſeulement de quelques uns

des

des prémiers. Mais il eſt aiſé de ſe tirer de cet embarras, ſi on fait réflexion, que les conſtantes f & h étant abſolument arbitraires, peuvent être ſuppoſées tout ce qu'on veut, ainſi il n'y a qu'à faire f ou $h = 0$, ou $= 0 \times g$; car ce 0 détruiſant celui du dénominateur, les termes qui étoient infinis, redeviendront finis, & ſe trouveront de nouveau multipliés par une conſtante arbitraire g; ceux au contraire qui étoient demeurés finis s'évanoüiront par cette ſuppoſition; d'où réſulte la régle générale, ſavoir de ne conſerver que les termes qui réçoivent une valeur infinie, en les dégageant cependant de l'infini qu'ils renferment.

Aïant ainſi trouvé la valeur de M il ne s'agit plus que de pourſuivre le calcul de la même manière qu'on l'a fait dans le Prob. I.; on aura donc de nouveau les deux équations

$$\int \zeta M dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int Z M dx + \frac{\text{ſin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int V M dx - \sqrt{-ck}\, \text{ſin. } t\sqrt{-ck} \int Z M dx;$$

ſubſtituant la valeur de $M = A\,\text{ſin. } x\sqrt{-k} + B\frac{d \cdot \text{ſin. } x\sqrt{-k}}{dx}$

$+ C\frac{d^2 \cdot \text{ſin. } x\sqrt{-k}}{dx^2} +$ &c., & faiſant diſparoître le différences de ſin. $x\sqrt{-k}$ par la méthode des intégrations par parties on obtiendra

$$\int \zeta' \text{ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int Z' \text{ſin. } x\sqrt{-ck}\, dx + \frac{\text{ſin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V' \text{ſin. } x\sqrt{-k}\, dx$$

$$\int u' \text{ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int V' \text{ſin. } x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-ck}\, \text{ſin. } t\sqrt{-ck} \int Z' \text{ſin. } x\sqrt{-k}\, dx,$$

où

$$\zeta' = A\zeta - \frac{d \cdot B\zeta}{dx} + \frac{d^2 \cdot C\zeta}{dx^2} - \text{&c.}$$

$$Z' = AZ - \frac{d \cdot BZ}{dx} + \frac{d^2 \cdot CZ}{dx^2} - \text{&c.}$$

$u' =$

$$u' = Au - \frac{d \cdot Bu}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cu}{dx^2} - \&c.$$

$$V' = AV - \frac{d \cdot BV}{dx} + \frac{d^2 \cdot CV}{dx^2} - \&c.$$

Enfin l'on tirera les valeurs de ζ & de u par les mêmes procédés qu'on a ſuivi dans les Prob. I. & II.

Je ne m'arrêterai pas ici à examiner la nature des courbes *génératrices*, & la manière de les continuer, laquelle dépend de la valeur de M; il ſeroit cependant aiſé de le faire ſuivant les principes que nous avons établis; mais comme je ne donne ici cette ſolution générale, que comme une ſimple application de ma méthode, il vaut mieux de la ſimplier autant qu'il eſt poſſible, en y introduiſant les fonctions indéterminées φ & ψ comme on l'a pratiqué dans le Prob. II. On trouvera donc par ce moïen les deux équations ſuivantes

$$A\zeta - \frac{d \cdot B\zeta}{dx} + \frac{d^2 \cdot C\zeta}{dx^2} + \&c.$$
$$= \frac{\varphi(x + t\sqrt{c}) + \varphi(x - t\sqrt{c})}{2}$$
$$+ \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) - \psi(x - t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}}$$

$$Au - \frac{d \cdot Bu}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cu}{dx^2} + \&c.$$
$$= \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})}{2}$$
$$+ \sqrt{c}\,\frac{\varphi'(x + t\sqrt{c}) - \varphi'(x - t\sqrt{c})}{2}$$

qu'il faudra enſuite intégrer pour avoir les valeurs de ζ & de u; ces intégrations, quoique toujours poſſibles, ne laiſſeroient pas que d'être ſouvent fort embaraſſantes; c'eſt pourquoi je vais réſoudre le même Problême par une autre méthode moins directe à la vérité, & moins lumineuſe que la précédente, mais telle qu'elle donnera les valeurs de ζ & de u en termes finis.

Autre

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\,\frac{d^2\zeta}{dx^2} + mc\,\frac{d\cdot\frac{\zeta}{x}}{dx}.$$

29. Au lieu de multiplier cette équation par Mdx, en ſuppoſant M une fonction de x, & de l'intégrer enſuite, eu égard à la ſeule variabilité de x, je la multiplie au contraire par Mdt, où M eſt ſuppoſée une fonction de t, & j'en prens la ſomme en conſidérant la ſeule t comme variable; je pourſuis le calcul de la même façon qu'auparavant en faiſant toujours varier t au lieu de x. Je trouve d'abord l'équation en M, $\frac{d^2M}{dt^2} = kM$; d'où je tire $M = \text{ſin. } t\sqrt{-k}$; puis en ſuppoſant $\int \zeta M dt = s$, il me vient l'équation fondamentale

$$ks = c\,\frac{d^2s}{dx^2} + mc\,\frac{d\cdot\frac{s}{x}}{dx}.$$

Pour intégrer cette nouvelle équation, je fais $\frac{s}{x} = y$; ce qui la réduit par la ſubſtitution à $ky = c\,\frac{d^2y}{dx^2} + (2+m)\,c\,\frac{dy}{xdx}$; équation qui étant comparée à celle en M du Problême précedent donnera pour la valeur de y la ſuite

$$Au + B\,\frac{du}{dx} + C\,\frac{d^2u}{dx^2} + D\,\frac{d^3y}{dx^3} + \&c.$$

Les valeurs des A, B, C, étant les mêmes qu'auparavant, mais transformées par la ſubſtitution de $m+2$ au lieu de $-m$. A l'égard de la valeur de u elle ſera ici $= \text{ſin. } x\sqrt{\frac{-k}{c}}$; il faut obſerver, qu'elle peut-être également $\text{cof. } x\sqrt{-\frac{k}{c}}$; d'où il ſuit que prenant deux quantités P, Q conſtantes à l'égard de x, on aura généralement $u = P\,\text{ſin. } x\sqrt{}$

$x\sqrt{-\frac{k}{c}} + Q \text{ cof. } x\sqrt{-\frac{k}{c}}$, donc ſi on fait

$$s = P\left(A \text{ ſin. } x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} B \text{ cof. } x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \frac{k}{c} C \text{ ſin. } x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \&c.\right)$$
$$+ Q\left(A \text{ cof. } x\sqrt{-\frac{k}{c}} - \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} B \text{ ſin. } x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \frac{k}{c} C \text{ cof. } x\sqrt{-\frac{k}{c}} - \&c.\right)$$

on aura

$A = fx + hx^{-m}$

$B = -fx^2 - hx^{1-m}$

$C = f\frac{(m+4)}{2\cdot(m+3)}x^3 + h\frac{m-2}{2(m-1)}x^{2-m}$

$D = -f\frac{(m+4)(m+6)}{2\cdot 3(m+)(m+4)}x^4 - h\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}x^{3-m}$

$E = \&c.$

où l'on voit que les coéficiens des termes de la ſérie f ſont les mêmes que ceux de la ſérie h dans les formules du Prob. préc., & réciproquement; donc il ſuffira d'appliquer aux formules préſentes les mêmes remarques qu'on a déja fait ſur les différents cas de m poſitif ou négatif.

Soit diviſée toute l'équation par A, il eſt évident que, puiſque l'on ne doit prendre à la fois qne l'une des deux ſeries, ſelon que m eſt poſitif ou négatif, les fractions $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ &c. ſeront toujours $= o$, lorſque $x = o$; ſoit de plus, lorſque $x = o$, Z la valeur de $\frac{T}{A}$, & V la valeur de $\frac{d\cdot\frac{T}{A}}{dx}$, valeurs qui pourront très-bien être l'une & l'autre des fonctions de t; on aura, en faiſant d'abord $x = o$ dans l'équation ainſi préparée, $\int ZM\,dt = Q$; enſuite

ſuite différentiant la même équation, & y faiſant de nouveau $x = 0$ il viendra $\int V M dt = P \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} (1 + \mu)$; μ eſt une conſtante qui déſigne la valeur de $\frac{d \cdot \frac{B}{A}}{dx}$; poſant pour abréger V au lieu de $\frac{V}{1+\mu}$, on ſubſtituera $\int Z M dt$ au lieu de Q, & $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{-k}} \int V M dt$ au lieu de P. Maintenant, pour chaſſer la lettre k de l'équation, on ſe ſervira de la méthode des intégrations par parties, qui a déja été tant de fois miſe en uſage; car, puiſque $M =$ ſin. $t\sqrt{-k}$, on peut au lieu de $\int Z M dt$ ſubſtituer indifféremment $\frac{1}{\sqrt{-k}} \int \frac{dZ}{dt}$ cof. $t\sqrt{-k}\, dt$, ou $-\frac{1}{k} \int \frac{d^2 Z}{dt^2}$ ſin. $t\sqrt{-k}\, dt$; en négligeant les termes algébriques qui doivent être ſuppoſés d'eux mêmes $= 0$; il en eſt de même de l'expreſſion $\int V M dt$. Ces opérations achevées, on mettra ſous les ſignes d'intégration les *ſinus* & *coſinus* de $x\sqrt{-\frac{k}{c}}$; & on développera à l'ordinaire les produits de ces *ſinus* & *coſinus* par les *ſinus* & *coſinus* correſpondens de $t\sqrt{-k}$, on obtiendra ainſi l'équation

$$\int \zeta \text{ ſin. } t\sqrt{-k}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (AZ + \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{dZ}{dt} + \frac{C}{c} \frac{d^2 Z}{dt^2} \text{ &c.}) \text{ ſin. } (t - \frac{x}{\sqrt{c}})\sqrt{-k}\, dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int (AZ - \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{dZ}{dt} + \frac{C}{c} \frac{d^2 Z}{dt^2} \text{ &c.}) \text{ ſin. } (t + \frac{x}{\sqrt{c}})\sqrt{-k}\, dt$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (A \int V dt + \frac{B}{\sqrt{c}} V + \frac{C}{c} \frac{dV}{dt} \text{ &c.}) \text{ ſin. } (t - \frac{x}{\sqrt{c}})\sqrt{-k}\, dt$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (A \int V dt - \frac{B}{\sqrt{c}} V + \frac{C}{c} \frac{dV}{dt} \text{ &c.}) \text{ ſin. } (t + \frac{x}{\sqrt{c}})\sqrt{-k}\, dt.$$

Or ſuivant les principes de notre méthode, on égalera

le t du prémier membre aux quantités $t - \frac{x}{\sqrt{c}}$, & $t + \frac{x}{\sqrt{c}}$ du ſecond; d'où l'on aura $t + \frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les termes multipliés par ſin. $(t - \frac{x}{\sqrt{c}})$ & $t - \frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les autres termes qui ſe trouvent multipliés par ſin. $(t + \frac{x}{\sqrt{c}})$; or Z & V étant des fonctions de t, on peut les exprimer généralement par Δt, & Γt; ou ſi pour abréger davantage, on poſe $Z + \frac{1}{\sqrt{c}} \int V dt = \Delta t$ & $Z - \frac{1}{\sqrt{c}} \int V dt = \Gamma t$, on tirera de l'équation précédente

$$\zeta = A \frac{\Delta (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) + \Gamma (t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2} + \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{\Delta' (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) - \Gamma' (t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2} + \frac{C}{c} \frac{\Delta'' (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) + \Gamma'' (t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2} + \&c.$$

Si l'on aimoit mieux que l'expreſſion de Z fut compoſée de fonctions de $x + t\sqrt{c}$, & de $x - t\sqrt{c}$, il n'y auroit qu'à faire quelques légères transformations à l'équation finale qui donne immédiatement la valeur de ζ; mais ſans avoir recours à cet expédient qui eſt ſans doute le plus direct, il ſuffit de remarquer, que l'équation différentielle de ζ ne contenant que le dt^2, il faut que l'expreſſion de ζ ſoit telle qu'elle demeure la même en changeant t en $-t$. Soit donc mis dans la formule précédente $-t$ au lieu de t; $\Delta (t + \frac{x}{\sqrt{c}})$, & $\Gamma (t - \frac{x}{\sqrt{c}})$ deviendront

$\Delta (-t$

$\Delta\left(-t+\frac{x}{\sqrt{c}}\right)=\Delta\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})$, & $\Gamma\left(-t-\frac{x}{\sqrt{c}}\right)$ $=\Gamma\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}(x+t\sqrt{c})$. Changeant les valeurs des fonctions Δ & Γ on pourra mettre ſimplement $\Delta(x-t\sqrt{c})$ au lieu de $\Delta\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})$, & $\Gamma\cdot(x+t\sqrt{c})$ au lieu de $\Gamma\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})$; mais il faudra mettre puis $\sqrt{c}\,\Delta'(x-t\sqrt{c})$, $c\Delta''(x-t\sqrt{c})$ &c. au lieu de $\Delta'\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})$, $\Delta''\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})$ &c, & $-\sqrt{c}$ $\Gamma'(x+t\sqrt{c})$, $c\,\Gamma''(x+t\sqrt{c})$ &c. au lieu de $\Gamma'\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}$ $(x+t\sqrt{c})$, $\Gamma''\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}(x+t\sqrt{c})$, &c. comme il eſt aiſé de s'en aſſurer avec un peu de réflexion; on aura de cette manière

$$\zeta = A\,\frac{\Gamma(x+t\sqrt{c})+\Delta(x-t\sqrt{c})}{2} + B\,\frac{\Gamma'(x+t\sqrt{c})+\Delta'(x-t\sqrt{c})}{2} + C\,\frac{\Gamma''(x+t\sqrt{c})+\Delta''(x-t\sqrt{c})}{2} + \&c. \qquad \&c.$$

En rapprochant cette formule de celle qu'on a trouvé dans *l'Art. préc.* il ſera facile de déterminer le rapport des fonctions $\Gamma(x+t\sqrt{c})$, & $\Delta(x-t\sqrt{c})$ aux fonctions $\varphi(x+t\sqrt{c})+\frac{1}{\sqrt{c}}\psi(x+t\sqrt{c})$, & $\varphi(x-t\sqrt{c})$ $-\frac{1}{\sqrt{c}}\psi(x-t\sqrt{c})$.

La méthode de cet Article conduit, comme on le voit, à des réſultats beaucoup plus ſimples, que la prémière; mais elle eſt auſſi moins générale, & ne peut, à la rigueur être emploïée que dans l'hipothèſe, que toutes les valeurs de ζ qui répondent à différentes abſciſſes x dans un même inſtant ſoient liées entr' elles par la loi de continuité. Ce n'eſt que d'après la prémière ſolution qu'il ſera permis de prendre pour Γ & Δ des fonctions quelconques, ſoit régulières ou non.

Des oſcillations d'un fluide élaſtique renfermé dans un tuïau de figure conoidale quelconque.

30. SOit imaginé tout le fluide partagé en une infinité de tranches perpendiculaires à l'axe, dont la largeur variable ſoit exprimée par X, qui déſigne une fonction de la partie correſpondante x de l'axe; il eſt clair que, ſi on ſuppoſe, que les tranches conſervent toujours leur parallélíſme, & que ζ ſoit l'eſpace infiniment petit parcouru par une tranche quelconque Xdx dans le tems t, cette quantité Xdx deviendra $(X + \frac{dX}{dx}\zeta)(dx + d\zeta)$ $= Xdx + \frac{dX}{dx}\zeta dx + X d\zeta$, en ſupprimant les infinimens petits du ſecond ordre; donc, ſi c déſigne l'élaſticité du fluide dans ſon état naturel; l'élaſticité du fluide contenu dans la tranche Xdx ſera après le tems t

$$c \cdot \frac{Xdx}{Xdx + \frac{dX}{dx}\zeta dx + X d\zeta} = c\left(1 - \frac{d\zeta}{dx} - \frac{dX}{Xdx}\zeta\right)$$

en négligeant ce qui ſe doit négliger. La différence de cette expreſſion priſe négativement donne l'excès de l'élaſticité d'une tranche quelconque ſur celle qui la ſuit immédiatement, donc ſi

on

on multiplie cet excès par la largeur $X + \frac{dX}{dx}\zeta$ de la trance, & qu'on divise ensuite par la masse Xdx, on aura la force accélératrice qui tend à faire parcourir l'espace ζ; donc l'équation du mouvement du fluide sera $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\,(\frac{d^2\zeta}{d} + d\cdot\frac{dX}{Xdx}\,\zeta)(\frac{X+\frac{dX}{dx}\zeta}{Xdx})$ qui se réduit par la supposition de ζ infiniment petit à

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\,(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d\cdot\frac{dX}{Xdx}\zeta}{dx}).$$

Telle est l'équation générale; mais jusqu'a présent je ne connois encore que quelques cas où elle soit constructible; ce sont ceux qui peuvent être compris dans la solution du Prob. III.; c'est-à-dire où l'on a $\frac{dX}{Xdx} = \frac{m}{x}$; ou bien $X = hx^m$; ce qui donne une conoide formé par la révolution d'une parabole, ou d'une hiperbole quelconque. On aura donc dans cette hipothèse $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\,(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + m\frac{d\cdot\frac{\zeta}{x}}{dx})$, équation intégrable exactement toures les fois que m sera un nombre pair positif, ou négatif (*Art.* 28.); dans tous les autres cas la valeur de ζ sera exprimée par une suite infinie.

Soit $m = 2$, on aura le cas du Prob. II., & la formule de *l'Art.* 28. donnera

$$\zeta + \frac{d\cdot x\zeta}{dx} = \frac{\varphi(x+t\sqrt{c}) + \varphi(x-t\sqrt{c})}{2} + \frac{\psi(x+t\sqrt{c}) - \psi(x-t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans *l'Art.* 20.; de plus la formule de *l'Art.* 29. donne

$$\zeta = \frac{\Gamma(x+t\sqrt{c}) + \Delta(x-t\sqrt{c})}{x^2}$$

$$-\frac{\Gamma'(x+t\sqrt{c})+\Delta'(x-t\sqrt{c})}{x}$$

ce qui s'accorde encore avec *l'Art.* 21.

Si on fait $m = 1$ le conoide ſera formé par la révolution d'une parabole Apollonienne autour de ſon axe, & la valeur de ζ ne pourra être donnée que par des ſeries.

Scolie.

31. Si le tuïau avoit une figure plane, l'équation précédente auroit encore lieu ; & le cas de $m = 1$, appartiendroit à un tuïau triangulaire ; ainſi l'équation $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}\right)$ pourroit ſervir à trouver les loix de la propagation du Son dans un plan ; & c'eſt dans cette vue que M. Euler me fit l'honneur de me la propoſer dans la même lettre, dont j'ai fait mention (*Art.* 16.). En faiſant uſage de ma nouvelle méthode, je reconnus bientôt que cette équation n'étoit pas intégrable exactement, mais qu'on pouvoit la rendre telle en donnant au terme $\frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}$ le coéficient 2. Voila ce qui m'a conduit à l'hipothèſe des ondulations ſphériques que nous avons examiné au long dans le *Chap. précéd.*; hipothèſe qui eſt d'allieurs beaucoup plus conforme à la nature, que celle des ondulations ſimplement circulaires. Je fis part à M. Euler des changemens que j'avois fait à ſon hipothèſe, & des réſultats qui m'en étoient venus, dans une lettre de la fin de Décembre 1759.; mais j'ai vu depuis avec beaucoup de plaiſir que ce ſavant Auteur en avoit déja fait de méme, & étoit parvenu aux mêmes concluſions, que moi, ſur les loix de la propagation des ébranlemens de l'air dans une ſphère. (*Voïés ſon Mémoire imprimé à la tête de ces Recherches*).

32. Suppo-

32. Suppoſons maintenant le tuïau d'une longeur donnée a, & bouché à ſes deux extrémités; il faudra que la nature des fonctions Γ & Δ (*Art.* 29.) ſoit telle que z s'évanoüiſſe aux points, où $x = 0$, & $x = a$ quel que ſoit d'ailleurs le tems t. Par un raiſonnement ſemblable à celui de *l'Art.* 23., on trouvera pour la prémière de ces conditions $\Gamma\, t\sqrt{c} + \Delta - t\sqrt{c} = 0$; ce qui apprend comment la fonction Δ doit être continuée du coté des abſciſſes négatives; pour ſatisfaire enſuite à l'autre condition, faiſons $\Gamma\,(a + t\sqrt{c}) = T$, $\Delta\,(a - t\sqrt{c}) = \theta$; & ſoient α, β, γ &c. les valeurs des quantités $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, lorſque $x = a$; on aura $0 = \alpha\,(T + \theta) + \beta\,(\frac{dT - d\theta}{dt\sqrt{c}})$ $+ \gamma\,(\frac{d^2T + d^2\theta}{dt^2c}) +$ &c. $= 0$; ſoit maintenant $T = -\theta + y$, on aura $\alpha y + \beta\frac{dy}{dt\sqrt{c}} + \gamma\frac{d^2y}{dt^2c} +$ &c. $= 2\beta\frac{d\theta}{dt\sqrt{c}} +$ &c. L'intégration de cette équation ſera toujours poſſible. Soient a', a'', a''' &c. les racines de l'équation

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{\&c.} = 0$$

la valeur de y ſera de la forme ſuivante

$$\begin{aligned} y = {} & Fe^{a't\sqrt{c}} \int -a'\beta e^{-a't\sqrt{c}}\, d\theta - \text{\&c.} \\ & + Ge^{a''t\sqrt{c}} \int -a''\beta e^{-a''t\sqrt{c}}\, d\theta - \text{\&c.} \\ & + He^{a'''t\sqrt{c}} \int -a'''\beta e^{-a'''t\sqrt{c}}\, d\theta - \text{\&c.} \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

F, G, H déſignant des conſtantes à déterminer par la ſubſtitution, & la comparaiſon des termes.

Si la quantité y étoit $= 0$, il eſt évident que les courbes géuératrices, qui repréſentent les fonctions Γ & Δ ne ſeroient qu'un aſſemblage de branches toutes égales, & ſemblables à celles qui répondent à la portion

a de l'axe; ainſi il ne ſeroit pas difficile de comprendre que le ſiſtème des particules reprendroit toujours ſa prémière poſition après chaque intervalle de tems $= \frac{2a}{\sqrt{c}}$; or, pour que ce cas puiſſe avoir lieu, il ſuffira que le coéficient β, & tous ceux qui multiplient les différences impaires de y ſoient nuls; c'eſt-à-dire que la valeur de ζ ſoient telle, qu'elle ne renferme que des différences paires des fonctions Γ & Δ, ou au moins que leurs coéficiens s'évanoüiſſent en poſant $x = a$. Ces conditions ne pouvant avoir lieu dans notre cas, on en doit conclure que les oſcillations des particules de l'air contenu dans les tuïaux donnés changeront continuellement, & ne reviendront jamais les mêmes, ſi ce n'eſt par une eſpèce de hazard dépendant de la nature des prémiers ébranlemens. Je dis par une eſpèce de hazard, puiſque je ſuppoſe que ces ébranlemens ſoient quelconques; car, on pourroit d'ailleurs les ſuppoſer tels que le ſiſtème fût toujours ſoumis aux lois de l'iſochroniſme; c'eſt ce qui eſt connu de tous les Géomètres; mais nous aurons dans la ſuite occaſion d'examiner cette matière plus à fond qu'on ne l'a encor fait.

Des vibrations des cordes inégalement épaiſſes.

33. IL eſt facile de voir que l'équation pour le mouvement des cordes tendues, qui ſont d'une épaiſſeur variable ſera de la même forme que celle, qu'on a donné (*Art. XII. Rech. préc.*), avec cette ſeule différence que la quantité c devra être regardé non plus comme conſtante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de x. Conſervant donc les mêmes noms, & ſuppoſant X une fonction donné de x, on aura $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = X\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ Soit dans un cas particulier, $X = hx^m$, je fais x

$= s$

$= s^{\frac{2}{2-n}}$, & $y = \frac{\zeta}{s}$; & prenant ds pour constante je trouve après les substitutions, & les réductions convenables $(\frac{d^2\zeta}{dt^2}) = \frac{(2-n)^2 h}{4}\left[(\frac{d^2\zeta}{ds^2}) - \frac{n-4}{n-2}(\frac{d\cdot\frac{\zeta}{s}}{ds})\right]$, équation qui est dans le cas du Prob. III. Donc si on suppose $m = -\frac{n-4}{n-2}$, $c = \frac{(2-n)^2 h}{4}$, & qu'on substitue s au lieu de x dans les formules de *l'Art.* 28. ou 29., on aura la valeur de ζ, laquelle étant ensuite multipliée par s donnera celle de y en s & en t ; où il n'y aura plus qu'à remettre, au lieu de s, sa valeur en x tirée de l'équation de supposition $x = s^{\frac{2}{2-n}}$.

Delà il est évident que y aura une valeur finie & exacte toutes les fois que $\frac{n-4}{n-2}$ sera un nombre pair positif, ou négatif ; c'est ce qui arrivera lorsque $n = \frac{4\mu - 4}{2\mu - 1}$, μ étant pris pour exprimer un nombre quelconque entier ; dans tous les autres cas la serie ira à l'infini. Au reste soit qu'on trouve pour y une valeur exacte, ou non, les vibrations de la corde ne seront jamais isochrones, excepté dans le seul cas de $n = 0$, qui est celui d'une épaisseur uniforme ; car il est visible, que la corde étant supposée fixe à ses deux bouts, on aura les mêmes conditions à remplir que dans *l'Art.* 32. ci-dessus ; donc les conséquences en seront aussi les mêmes.

Le défaut d'isochronisme dans les cordes inégalement épaisses les rend incapables de produire un son fixe, & appréciable à l'oreille ; aussi les Artistes les rejettent-ils toujours, & les nomment comunement cordes *fausses*, par la raison qu'elles ne peuvent jamais s'accorder parfaitement avec les autres. Cette observation peut servir, ce me sem-

ble, à démontrer l'insuffisance de la Théorie de M. Tailor sur les vibrations des cordes; car il est visible, que quelque inégale, que puisse être une corde sonore, elle devroit cependant faire toujours des vibrations de même durée, si la figure qu'elle prend d'elle même ne pouvoit être autre que celle qui convient à l'isochronisme, tel que cet Auteur le suppose.

Au reste on pourra toujours résoudre l'équation générale $(\frac{d^2y}{dt^2}) = X(\frac{d^2y}{dx^2})$ directement par ma méthode; toute la difficulté se réduisant à l'intégration de l'équation en M, $kM = X\frac{d^2M}{dx^2}$. Les cas les plus connus, de l'intégrabilité de cette équation, sont ceux de $X = hx^n$ (n étant $= \frac{4\mu - 4}{2\mu - 1}$) que nous avons examiné ci-dessus; il peut y en avoir d'autres; mais il seroit trop long de les examiner ici.

Des oscillations d'une chaine pésante.

34. CE Problême étant célèbre parmi les Géomètres, je crois pouvoir me dispenser de donner l'Analise, par laquelle on trouve que la force accélératrice de chaque point de la chaine est comme la somme des angles de contingence depuis le sommet, moins l'angle de contingence multiplié par le rapport du poid total de la portion inférieure de la chaine au petit poids dont ce point est chargé. Soit donc x la longueur d'une partie quelconque de la chaine à commencer par le bout inférieur, Xdx la pesanteur, où la masse de la portion infiniment dx, & y l'espace parcouru horizontalement dans le tems t, on aura l'équation

$(\frac{d^2y}{dt^2})$

$$-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\int X dx}{X} \times \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Or ſoit $X = fx^n$, on aura $\frac{\int X dx}{X} = \frac{x}{n+1}$, & faiſant $x = \frac{s^2}{h}$, $y = \frac{\zeta}{s}$ il viendra

$$\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = \frac{h}{4(1+n)}\left[\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right) + \frac{}{2n-1} \times \left(\frac{d \cdot \frac{\zeta}{s}}{ds}\right)\right].$$

Equation réduite à notre formule générale, & qui aura une ſolution exacte toutes les fois que $2n-1$ ſera un nombre pair quelconque, c'eſt-à-dire, que $n = \frac{2\mu+1}{2}$. Dans le cas où la chaine eſt d'une péſanteur uniforme, on a $n = 0$; ainſi m ſera $= -1$ dans les formules des *Art.* 27. & l'on trouvera que les deux ſeries, dont l'une eſt toute multipliée par f, & l'autre par h, reviendront préciſément à la même.

Soit l la longueur de la chaine, on aura dans le point de ſuſpenſion $y = \frac{\zeta}{\sqrt{hl}}$; donc, ce point étant ſuppoſé fixe, il faudra que ζ y ſoit $= 0$; d'où l'on retrouvera les mêmes conditions entre les fonctions $\Gamma(a + t\sqrt{c})$, & $\Delta(a - t\sqrt{c})$ que dans *l'Art.* 32. Maintenant, puiſque la chaine eſt libre dans tous ſes autres points, il eſt viſible que ce ſeroit mal à propos, qu'on ſuppoſeroit $y = 0$, lorſque $x = 0$; mais il faudra remplacer cette condition par celle-ci $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; car il eſt naturel de penſer, que la courbure de la chaine doive s'évanoüir à ſon extrémité inférieure, par la raiſon qu'il n'y a ici aucun appui à l'action des parties ſupérieures. Or $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2}{s^5}\left(s^2\frac{d^2\zeta}{ds^2} - 3s\frac{d\zeta}{ds} + 3\zeta\right)$; donc lorſque s eſt zero, ou ſimplement

 infini-

infiniment petit, $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit à $\frac{3\zeta}{s^3}$, & par conséquent on aura de même ici $\zeta = 0$, lorsque $s = 0$, & $\Gamma t\sqrt{c} + \Delta - t\sqrt{c} = 0$, comme dans *l'Art. cité*. Au reste ce Problême, étant absolument analogue aux précédens, est susceptible de remarques semblables. Je me contenterai simplement de faire observer, que si on vouloit le résoudre directement par notre méthode générale, on parviendroit après les opérations ordinaires à cette équation en M, $kM = \frac{d^2 \cdot \frac{M\int X dx}{X}}{dx} - \frac{dM}{dx}$, qui est constructible par les méthodes connues dans le cas, où $X = hx^{\frac{2\mu+1}{2}}$; il faudroit ensuite déterminer la quantité k, avec les autres constantes de M, par la condition que $\frac{M\int X dx}{X} \times \frac{dy}{dx} - \frac{d \cdot \frac{M\int X dx}{X}}{dx} \times y + My$, ou bien $\frac{M\int X dx}{X} \times \frac{dy}{dx} - \frac{dM}{dx} \times \frac{\int X dx}{X} \times y + M\int X dx \times \frac{dX}{X^2 dx} \times y$ soit $= 0$, lorsque $x = a$, & $x = 0$. Or dans le premier cas y étant lui même $= 0$, il suffira que M le soit aussi; dans le second il est clair que toute la quantité s'évanoüira d'elle même à cause du facteur $\int X dx$ qui multiplie tous ses termes; cependant on supposera toujours $M = 0$, afin de terminer la suite des points mobiles au bout inférieur de la chaine.

Scolie I.

35. Par les formules données dans ce Chapître, on peut résoudre le Problême de *l'Art.* 61. de l'excellent Traité de la résistence des fluides de M. D'Alembert, d'une manière, peut être plus analitique que ne l'a fait cet Auteur. Voici en quoi consiste ee Problême; il s'agit de trouver deux quan-

tités A, & B, telles que $Adx + Bd\zeta$, & $\zeta Bdx - \zeta Ad\zeta$ ſoient l'une & l'autre des différentielles exactes. Pour rendre la queſtion plus générale, je me propoſe de rendre exactes les deux différentielles $\alpha dt + \beta dx$, $x^m \beta dt + b x^n \alpha dx$; ſoit la première $= dp$, & la ſeconde $= dq$; on aura $\alpha = \frac{dp}{dt}$, $\beta = \frac{dp}{dx}$, $x\ \beta = \frac{dq}{dt}$, $bx^n \alpha = \frac{dq}{dx}$; donc $x^m \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dt}$, $bx^n \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$. Je différentie ces équations en faiſant varier x ſeul dans la première, & t ſeul dans la ſeconde; & je compare enſuite les deux valeurs de $\frac{d^2 q}{dx\,dt}$; j'ai $\frac{d \cdot x^m (\frac{dp}{dx})}{dx} = bx^n (\frac{d^2 p}{dt^2})$; ſavoir $bx^{n-m} (\frac{d^2 p}{dt^2}) = (\frac{d^2 p}{dx^2}) + \frac{m}{x} (\frac{dp}{dx})$. Equation qui eſt, comme on le voit ſuſceptible de notre méthode; en ſuivant cette méthode, on trouvera d'abord l'équation en M

$$kMx^{n-m} = \frac{d^2 M}{dx^2} - m \frac{d \cdot \frac{M}{x}}{dx}$$

qu'il faut intégrer avant d'aller plus avant. Pour cela je fais $x = s^u$; $M = Ns^v$; & ſuppoſant $u = \frac{2}{n-m+2}$ & $v^2 - (u + mu)\, v + mu^2 = 0$, je trouve après les ſubſtitutions & les réductions $kNu^2 = \frac{d^2 N}{ds^2} + (2v - u - mu + 1) \frac{dN}{sds}$, équation qui ſe rapporte à celle de *l'Art.* 27. On voit donc par là, que l'équation en M ſera conſtructible exactement par nos formules, toutes les fois que $2v - u - mu + 1$ ſera un nombre pair quelconque; le reſte du calcul n'aïant plus de difficulté, on trouvera pour la valeur de p une expreſſion exacte & finie, compoſée de fonctions très-générales de x & de t. Si $n = m$, alors on a $u = 1$, & l'équation qui donne la valeur de v, devient $v^2 - (1 + m) v + m$

$+ m = 0$; d'où l'on tire $v = 1$, ou $= m$; dans le premier cas, le coéficient $2v - m - mu + 1$ devient $= 1 - 2m$; & dans le second, $= 1$; or dans le Problême de M. D'Alembert on a $m = 1$, d'où l'on voit que ce Problême n'admet point de solution exacte au moins suivant ma méthode; cependant si l'on veut se contenter d'une solution seulement approchée, on pourra y parvenir immédiatement par les formules du Prob. III. Car si dans l'équation $bx^{n-m}\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dp}{dx}\right)$ on fait $x = s^u$, & $p = qs^v$; & qu'on suppose les valeurs u & v déterminés par ces équations $u = \frac{1^2}{n - m + 2}$, & $v^2 + (2 - u + mu)v + mu - u + 1 = 0$ il vient

$$bu^2\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2q}{ds^2}\right) + (2v - u + 1 + mu)\left(\frac{d \cdot \frac{q}{s}}{ds}\right)$$

Equation qui a la même forme, que celle du Prob. cité, & qui par conséquent est susceptible des mêmes solutions. Lorsque $m = n$, on a $u = 1$, & $v = -1$, ou $-m$; la première racine rend le coéficient de $d \cdot \frac{q}{s}$, $= m - 2$, & la seconde le rend $= -m$; ce qui conduit aux mêmes conclusions que plus haut. Au reste il est visible que le Problême présent renferme dans sa généralité tout ceux, dont nous avons traité dans ce Chapître.

Scolie II.

36. L'équation $kM = \frac{d^2M}{dx^2} - m\frac{dM}{xdx}$ étant transformée par la substitution de $fs^{\frac{-1}{m+1}}$ au lieu de x devient $\frac{f^2k}{(1+m)^2}$

Ms

$M s^{\frac{-2m}{1+m}} = \frac{d^2M}{ds^2}$, & faisant ensuite $M = e^{\int y\,ds}$, $dy + y^2 ds = \frac{f^2 k}{(1+m)} s^{\frac{-2m}{1+m}}$; qui est l'équation même de Ricati. Les formules trouvées dans la solution du Prob. III. donnent, comme on le voit, une construction générale de cette équation; mais il faut remarquer, que ces formules ne sont encore que des cas particuliers des intégrales completes, qui résultent de la supposition de quelques constantes $= 0$; pour les completer on joindra à la valeur déja trouvée de y, la quantité $\frac{e^{-2\int y\,ds}}{\int e^{-2\int y\,ds}\,ds}$; ce qui est facile à démontrer.

CHAPITRE V.

Continuation des Recherches sur la propagation du Son.

§. I.

De la propagation du Son, en supposant que les ébranlemens des particules de l'air ne soient pas infiniment petits.

37. QUelque naturelles, que paroissent les hipothèses que nous avons examiné dans le Chap. III.; elles donnent cependant la viteſſe du Son moindre que la véritable, d'environ 163. pieds par seconde; comme on le peut conclure des *Art.* 12. & 26. cidessus. Cette différence est sans doute assès considérable, pour ne pas être attribuée aux erreurs des expériences, qui servent d'élémens à notre Théorie, comme j'étois porté à le penser quand je donnai mes premières Recherches sur

le

le Son (*Voïés Art. LVII.*). Mais quelle pourroit donc en être la cauſe? M. Euler a crû la trouver dans la ſuppoſition des ébranlemens infiniment petits, ſur laquelle on a juſqu'ici fondé les calculs de la propagation du Son (*Voïés ſon Mémoire, pag.* 10. *ci-deſſus*). Cette conjecture eſt plauſible, mais je doute, qu'en l'examinant à fond on la trouve auſſi ſatisfaiſante, qu'elle le paroit d'abord. Pour en apprécier la valeur, voici la méthode que j'ai imaginé.

Problêmes préliminaires.

PROBLEME IV.

Conſtruire l'équation $(\frac{d^2 z}{dt^2}) = c\,(\frac{d^2 z}{dx^2}) + y$, y *étant une fonction quelconque de* x *&* t.

38. Je la multiplie par Mdx, je l'intègre, & j'opère à l'égard des termes $\int (\frac{d^2 \zeta}{dt^2})\, Mdx$, & $c\int (\frac{d^2 \zeta}{dx^2})\, Mdx$, comme dans le Prob. I.; je parviens ainſi à cette équation en s, $\frac{d^2 s}{dt^2} = cks + \int My\,dx$ par les mêmes procédés je trouve l'intégrale $s + \mu v = Ae^{t:\mu} + \mu e^{t:\mu} \int e^{-t:\mu}\, dt \int My\,dx$, d'où réſultent les deux équations

$$\int \zeta Mdx = \text{cof. } t\sqrt{-ck}\int Z Mdx + \frac{\text{ſin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}}\int V Mdx$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{ck}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}}\, dt \int My\,dx$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{ck}}\, e^{-t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}}\, dt \int My\,dx \quad \ldots\ldots (A)$$
$$\int u Mdx = \text{cof. } t\sqrt{-ck}\int V Mdx - \sqrt{-ck}\,\text{ſin. } t\sqrt{-ck}\int Z Mdx$$
$$+ \frac{1}{2}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int My\,dx$$
$$+ \frac{1}{2}\, e^{-t\sqrt{ck}} \int e^{t\sqrt{ck}}\, dt \int My\,dx \quad \ldots\ldots\ldots (B)$$

Or

Or, puiſque $M = \text{ſin. } x\sqrt{-k}$, il faut, pour pouvoir chaſſer la quantité k des équations précédentes, réduire tous leurs termes en ſorte, que cette quantité k ne ſe rencontre que dans des fonctions de la forme de ſin. $(x)\sqrt{-k}$, (x) marquant une fonction quelconque de x & t. Les termes qui renferment $\int Z M dx$ étant les mêmes ici que dans le Prob. I., ils ſe raméneront à cette forme par les réductions enſeignées; ainſi toute la difficulté ſe réduira aux termes affectés de deux ſignes d'intégration, & provenant de la quantité y.

Prenons d'abord le terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int M y dx$; & commençons par faire diſparoître la quantité k du coéficient $\frac{1}{2\sqrt{ck}}$. Pour cela ſoit changée l'intégrale $\int M y dx = \int \text{ſin. } x\sqrt{-k} y dx$ en ſon équivalente $\text{ſin. } x\sqrt{-k} \int y dx - \sqrt{-k} \int \text{coſ. } x\sqrt{-k} dx \int y dx$; ce qui donnera par la ſubſtitution, & en effaçant le terme ſin. $x\sqrt{-k} \int y dx$, à cauſe de ſin. $x\sqrt{-k} = 0$ au premier & au dernier point de l'intégrale $\int M y dx$, la transformée $\frac{1}{2\sqrt{-1} \times \sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int \text{coſ. } x\sqrt{-k}\, dx \int y dx$. Poſons pour abréger $\int y dx = Y$, & mettons aux lieu de coſ. $x\sqrt{-k}$ ſa valeur exponentielle $\frac{e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}}}{2}$; tranſportant le ſigne d'intégration qui regarde l'x au devant de celui qui regarde le t, (ce qui eſt permis à cauſe que la quantité $e^{-t\sqrt{ck}}$, qui eſt entre les deux ſignes, eſt une quantité conſtante à l'égard de x) on aura $\frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}}$ $e^{t\sqrt{ck}} \int dx \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt + \frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int dx$ $\int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt$. Soit fait $x - t\sqrt{c} = p$, $x + t\sqrt{c} = q$, & ſoit nommée P, la fonction de t & de p qui vient de

la ſubſtitution de $p + t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la quantité Y; & Q la fonction de t & de q, qui vient de la ſubſtitution de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la même quantité Y; en prenant au lieu des variables t & x, les nouvelles variables t & p, & t & q, on changera les deux expreſſions intégrales $\int dx \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt, \int dx \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt$, en celles-ci $\int dp \int e^{p\sqrt{k}} P dt, \int dq \int e^{-q\sqrt{k}} Q dt$, qui ont les mêmes valeurs, quoique ſous des formes différentes. Dans ces dernières expreſſions, les intégrations $\int e^{p\sqrt{k}} P dt, \int e^{-q\sqrt{k}} Q dt$ devront ſe faire en variant ſeulement t; donc, ſi on ſuppoſe que les intégrales $\int P dt$, & $\int Q dt$ ſoient priſes avec cette condition, on aura $e^{p\sqrt{k}} \int P dt$, $e^{-q\sqrt{k}} \int Q dt$; ce qui donnera les transformées $\int e^{p\sqrt{k}} dp \int P dt$, $\int e^{-q\sqrt{k}} dq \int Q dt$, dans leſquelles il faudra faire maintenant p & q variables, & t conſtante; or, à cauſe que les quantités $\int P dt$, & $\int Q dt$ ne contiennent point de x, il eſt viſible qu'il reviendra au même d'intégrer $e^{p\sqrt{k}} dp \int P dt$, & $e^{-q\sqrt{k}} dq \int Q dt$, en ſuppoſant p & q ſeules variables, & de remettre après l'intégration au lieu de p & q leurs valeurs $x - t\sqrt{c}$, & $x + t\sqrt{c}$, que de reſtituer d'abord ces valeurs à la place de p & de q, & d'intégrer enſuite en faiſant varier x; d'où il s'enſuit qu'on aura $\int dx \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt = \int dp \int e^{p\sqrt{k}} P dt = \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int P dt$, & $\int dx \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt = \int dq \int e^{-q\sqrt{k}} Q dt = \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int Q dt$. Par conſéquent la transformée cherchée du terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int My dx$ deviendra après toutes les ſubſtitutions $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int P dt + \frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int Q dt$, laquelle, en mettant hors des ſignes d'intégration la quantité exponentielle $e^{-t\sqrt{ck}}$, qui eſt conſtante à l'égard de x, ſe réduit

duir plus ſimplément à $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}(\int e^{z\sqrt{k}}dx\int P dt + \int e^{-z\sqrt{k}}dx\int Q dt)$.

Par des opérations, & des réductions ſemblables on changera encore l'autre terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}}e^{-t\sqrt{ck}}\int e^{t\sqrt{ck}}dt\int My\,dx$ en $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}(\int e^{z\sqrt{k}}dx\int Q dt + \int e^{-z\sqrt{k}}dx\int P dt)$; donc en retranchant la transformée du ſecond terme de celle du premier, on aura $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}\int(e^{z\sqrt{k}}-e^{-z\sqrt{k}})(\int P dt - \int Q dt)\,dx = \int\frac{1}{2\sqrt{c}}(\int Q dt - \int P dt)$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx$. Subſtituant cette expreſſion dans l'équation (A) ci-deſſus, & égalant entr'eux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$, ſuivant les règles de notre méthode, on trouvera pour la valeur de ζ les formules qu'on a déja trouvé dans le Prob. I., jointes avec la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}}(\int Q dt - \int P dt)$.

Après avoir ainſi trouvé la valeur de ζ il ne ſera pas difficile de déduire celle de u de l'équation (B). Pour cela, comme dans cette équation les termes qui renferment y, ſont exempts du coéficient $\frac{1}{\sqrt{ck}}$, on y mettra d'abord, & ſans aucune préparation, à place de M ſa valeur exponentielle $\frac{e^{z\sqrt{k}}-e^{-z\sqrt{k}}}{2\sqrt{-1}}$; enſuite faiſant des obſervations & des réductions analogues à celles que nous avons faites plus haut, on trouvera que, ſi P' & Q' ſont pris pour exprimer les valeurs de y après les ſubſtitutions de $p + t\sqrt{c}$ & de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x, les termes dont il s'agit deviendront $\frac{1}{2}\int(\int P' dt + \int Q' dt)$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx$; par conſéquent l'expreſſion de u renfermera outre les formules

trouvées à la fin de *l'Art.* 6., encore celle-ci $\frac{\int P' dt + \int Q' dt}{2}$.

Corollaire.

38. Donc le terme y ajouté à l'équation $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$ produit dans les valeurs de ζ & de u une augmentation qu'on determinera ainſi. Soit intégré $y\,dx$, en ne faiſant varier que x; & l'intégrale trouvée $\int y\,dx$ étant multiplié par dt ſoit intégrée de nouveau en ſuppoſant d'abord $x + t\sqrt{c}$ conſtant, & t ſeul variable; puis en ſuppoſant $x - t\sqrt{c}$ conſtant, & t ſeul variable; retranchant cette ſeconde intégrale de la première, & diviſant la différence par $2\sqrt{c}$, on aura ce qu'il faut ajouter à la valeur de ζ. Enſuite ſoit intégré ſimplement $y\,dt$ d'abord en traitant $x - t\sqrt{c}$ comme conſtante, & t comme variable, puis en traitant $x - t\sqrt{c}$ comme conſtante, & t de même comme variable; la ſomme de ces deux intégrales diviſée par 2 ſera l'augmentation de la valeur de u.

Scolie I.

39. Dans l'excellent Traité de la cauſe des vents de M. D'Alembert on trouve à *l'Art.* 87. une méthode fort ſimple, & fort ingénieuſe pour rendre completes ces deux différentielles $\alpha\,ds + \beta\,du$, & $p\alpha\,du + \nu\beta\,ds + du\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s$. Le Problême ſe réduit à celui que nous venons de réſoudre; car en ſuppoſant la premiere de ces différentielles $= dp$, on trouve $\alpha = \frac{dp}{ds}$ & $\beta = \frac{dp}{du}$; mais pour que la ſeconde différentielle ſoit exacte, il faut que

$$\frac{d \cdot (\rho\alpha + \Delta u, s)}{ds} = \frac{d \cdot (\nu\beta + \Gamma u, s)}{du}$$

ce qui donne en ſubſtituant & différentiant

$\rho\,d^2 p$

$$\rho \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{d \cdot \Delta u, s}{ds} = \gamma \frac{d^2 p}{du^2} + \frac{d \cdot \Gamma u, s}{du},$$

Equation qui reviendra au même, que celle du Problême précédent, ſi on poſe ζ au lieu de p, t au lieu de s, x au lieu de u, c au lieu de $\frac{\gamma}{\rho}$, & y au lieu de $\frac{d \cdot \Gamma u, s}{\rho du} - \frac{d \cdot \Delta u, s}{\rho ds}$.

Si d'un coté la ſolution de M. D'Alembert eſt plus ſimple que la notre, de l'autre elle paroit inſuffiſante pour les cas, où les valeurs de p ſeroient priſes à volonté lorſque $s = o$; & c'eſt préciſément dans ces cas que rentre la queſtion qui eſt l'objet du Problême précédent. Au reſte ſi on introduit dans notre ſolution au lieu de Z & de V des fonctions indéterminées, on en tirera des formules analogues à celles que M. D'Alembert à trouvé par ſa méthode. Il eſt vrai, que nos formules ſe préſenteront ſous une autre forme, que celles de cet Auteur; mais la comparaiſon n'en ſera pas difficile, & ne demandera d'ailleurs que un peu d'adreſſe de calcul; c'eſt pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

Scolie II.

40. Ce Savant Géomètre a encore rendu l'uſage de ſa méthode plus général en l'appliquant à déterminer les quantités α & β par les conditions que $\alpha ds + \beta du$, & $\rho \alpha du + p \beta du + \gamma \beta ds + m \alpha ds + du \Delta u, s + ds \Gamma u, s$, ſoient l'une & l'autre des différentielles completes. Faiſant $\alpha ds + \beta du = dq$, & ſubſtituant dans la ſeconde différentielle les valeurs de α & β en q, on trouvera par les conditions de l'intégrabilité l'équation ſuivante,

$$\rho \left(\frac{d^2 q}{ds^2}\right) + p \left(\frac{d^2 q}{ds du}\right) + \left(\frac{d \cdot \Delta u, s}{ds}\right) = \gamma \left(\frac{d^2 q}{du^2}\right) + m \left(\frac{d^2 q}{du ds}\right) + \left(\frac{d \cdot \Gamma u, s}{du}\right)$$

qui

qui peut ſe rapporter à cette forme

$$\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = b\left(\frac{d^2\zeta}{dt\,dx}\right) + c\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right) + y$$

Quoique cette équation ſoit étrangère à la matière que nous traitons, je crois qu'on ne ſera point faché de voir comment notre méthode s'y applique. Je commence ici par ſuppoſer $\frac{d\zeta}{dt} = u$; & je décompoſe par ce moïen l'équation propoſée dans les deux ſuivantes

$$\frac{d\zeta}{dt} = u\text{; \& } \frac{du}{dt} = b\,\frac{du}{dx} + c\,\frac{d^2\zeta}{dx^2} + y\text{;}$$

Je multiplie la première de ces équations par $N\,dx$, & la ſeconde par $M\,dx$, je les ajoute enſemble, & j'en prens l'intégrale, en faiſant évanoüir par des intégrations par parties les différences de ζ qui naiſſent de la variabilité de x;

$$\text{j'ai } \int\left(N\,\frac{d\zeta}{dt} + M\,\frac{du}{dt}\right)dx =$$

$$\int\left(c\,\frac{d^2M}{dx^2}\,\zeta + \left[N - b\,\frac{dM}{dx}\right]u\right)dx + \int My\,dx$$

$$+ b\,Mu + c\,M\frac{d\zeta}{dx} - c\,\frac{dM}{dx}\,\zeta\text{.}$$

Négligeant ces derniers termes algébriques qui diſparoiſſent d'eux mêmes, dans la ſuppoſition que M ſoit $= 0$ au premier, & au dernier point de l'intégrale, & comparant terme à terme, on aura $kN = c\,\frac{d^2M}{dx^2}$; & $kM = N - b\,\frac{dM}{dx}$ d'où l'on tire $k^2M + bk\,\frac{dM}{dx} - c\,\frac{d^2M}{dx^2} = 0$, & $M = Ae^{mkx} + Be^{nkx}$, m & n étant les racines de l'équation $1 + by - cy^2 = 0$. Or M devant être $= 0$, lorſque $x = 0$, & $x = a$, on aura $B = -A$; & $e^{mka} - e^{nka} = 0$; ce qui fournira une infinité de valeurs de k ; on aura donc $M = e^{mkx} - e^{nkx}$; & par conſéquent $N = ck\,(m^2e^{mkx} - n^2e^{nkx})$. Soit maintenant $\int(N\zeta + Mu)\,dx = s$,

notre

notre equation deviendra $\frac{ds}{dt} = ks + \int M dy x$; d'où l'on tire en intégrant & conſervant les noms, que nous avons employé dans tout le cours des Recherches précédentes, $\int (N\zeta + Mu)\,dx = e^{kt} \int (NZ + MV)\,dx + e^{kt} \int e^{-kt} dt \int My\,dx$. Or la quantité N étant multipliée par un coéficient k, pour le faire diſparoître on changera les intégrales $\int N\zeta\,dx$, & $\int NZ\,dx$ en $-\int (\frac{d\zeta}{dx})\,dx \int N dx$ & $-\int (\frac{dZ}{dx})\,dx \int N dx$, en négligeant les autres termes qui deviennent nuls, à cauſe que ζ & Z diſparoiſſent quand $x = o$, & $= a$; ſubſtituant donc les valeurs de M, & de $\int N dx$, on aura

$$\int (u - cm \frac{d\zeta}{dx})\, e^{mkx} dx - \int (u - cn \frac{d\zeta}{dx})\, e^{nkx} dx =$$

$$\int (V - cm \frac{dZ}{dx})\, e^{(mx+t)k} dx - \int (V - cn \frac{dZ}{dx})\, e^{(nx+t)k} dx$$

$$+ e^{kt} \int e^{-kt} dt \int e^{mkx} y\,dx - e^{kt} \int e^{-kt} dt \int e^{nkx} y\,dx.$$

Soit P la fonction de p & de t qui vient de la ſubſtitution de p au lieu de $mx - t$ dans y, & Q la fonction de q & de t qui vient de la ſubſtitution de q à la place de $nx - t$ dans la même quantité y; les deux derniers termes de la formule précédente ſe changeront, ſelon ce qui a été enſeigné plus haut, en ceux-ci

$$\int (\int P dt)\, e^{mkx} dx - \int (\int Q dt)\, e^{nkx} dx.$$

Maintenant, puiſque m eſt ſuppoſé différent de n, il eſt clair, que les quantités exponentielles e^{mkx}, e^{nkx}, & $e^{(mx+t)k}$, $e^{(nx+t)k}$ ne ſauroient jamais devenir égales; donc il faudra néceſſairement décompoſer l'équation en deux, afin d'en chaſſer la quantité k; par ce moïen on trouvera, en retenant les expreſſions emploïées dans le Problême I.

$$u - cm\frac{d\zeta}{dx} = (V - cm\frac{dZ}{dx})^{(x-\frac{t}{m})} + \int P\,dt$$

$$u - cn\frac{d\zeta}{dx} = (V - cn\frac{dZ}{dx})^{(x-\frac{t}{n})} + \int Q\,dt.$$

S'il arrivoit que n fût $= m$, alors, la première de ces équations demeurant la même, on ne feroit qu'augmenter n d'une quantité infiniment petite α ; c'eſt-à-dire on ſuppoſeroit $n = m + u$; & ôtant la première équation de la ſeconde, il viendroit après avoir diviſé par α

$$\frac{d\zeta}{dx} = (\frac{dZ}{dx} - \frac{d\cdot(V - cm\frac{dZ}{dx})}{dx} \times \frac{t}{cm^2})^{(x-\frac{t}{m})}$$

$$+ \int (\frac{dP}{dp}) \times (\frac{P+t}{cm^2})\,dt.$$

Si n étoit infini, ce qui arrivera lorſque $c = 0$, alors on auroit auſſi $cn = 0$, & la ſeconde équation deviendroit $u = (V)^{(x)} + \int Q\,dt$.

Si on veut maintenant comparer les réſultats de cette ſolution avec ceux de M. D'Alembert, on prendra pour $(V - cm\frac{dZ}{dx})^{(x-\frac{t}{m})}$, & $(V - cn\frac{dZ}{dx})^{(x-\frac{t}{n})}$ des fonctions indéterminées de $x - \frac{t}{m}$, & de $x - \frac{t}{n}$, & faiſant les ſubſtitutions & les réductions néceſſaires, on trouvera pour α & β des formules analogues à celles que cet Auteur a donné; quoique j'aïe fait tous les calculs que cette comparaiſon demande, je ne les inférerai point ici pour ne pas paſſer les bornes que je me ſuis préſcrites dans cette Diſſertation.

Probleme V.

Conſtruire l'équation $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c(\frac{d^2z}{dx^2}) + c(\frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}) + y.$

41. En ſuivant notre méthode, on parviendra aux mêmes équations (A) & (B) du Prob. précéd., avec cette ſeule

seule différence, que la quantité M sera maintenant égale à sin. $x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k}$ cos. $x\sqrt{-k}$ comme dans le Prob. II.; ce qui rendra l'expression $\int My\,dx$ composée des deux termes $\int$sin. $x\sqrt{-k}\,y\,dx - \sqrt{-k}\int$cos. $x\sqrt{-k}\,y\,x\,dx$; on aura donc dans l'équation (A) $\frac{1}{2\sqrt{ck}}\int My\,dx =$ $\frac{1}{2\sqrt{ck}}\int$ sin. $x\sqrt{-k}\,y\,dx + \frac{1}{2\sqrt{c}\times\sqrt{-1}}\int$ cos. $x\sqrt{-k}\,y\,x\,dx =$ (en réduisant le premier terme, comme on a fait dans le Prob. préc.) $\frac{1}{2\sqrt{c}\times\sqrt{-1}}\int$ cos. $x\sqrt{-k}\,(\int y\,dx + xy)\,dx$; où il faudra pourtant observer que l'intégrale $\int y\,dx$ soit prise de manière qu'elle s'évanoüisse lorsque $x = a$, afin que le terme $\frac{\text{sin. } x\sqrt{-k}\int y\,dx}{\sqrt{ck}}$ que nous négligeons s'évanoüisse de même. Supposant donc maintenant $\int y\,dx + xy = Y$, & faisant les autres observations, & réductions suivant les principes établis dans les Prob. II. & IV., on trouvera que la valeur de ζ' savoir de $\zeta + \frac{d\cdot\zeta x}{dx}$, de *l'Art.* 20., devra être ici augmentée de la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}}(\int Q\,dt - \int P\,dt)$.

On tirera de même de l'équation (B) la valeur de u'; mais on pourra s'épargner la peine de ce calcul, en cherchant d'après la valeur trouvée de ζ' celle de $\frac{d\zeta'}{dt} = u'$.

Usage des Problèmes précédens.

42. Examinons d'abord le cas d'une ligne phisique d'air; il est facile de trouver que l'équation rigoureuse du mouvement des particules sera $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -c\frac{d\cdot\frac{dx}{dx+d\zeta}}{dx^2}\times(dx+d\zeta)$

P $= c$

$= c \frac{d^2\zeta}{dx(dx+d\zeta)}$; car la portion de fluide qui dans l'état d'équilibre occupe l'espace dx, après le tems t remplira l'espace $dx + d\zeta$, & son élasticité sera par conséquent diminuée dans le rapport $\frac{dx}{dx+d\zeta}$; donc la différence d'élasticité des deux particules adjacentes, s' exprimera par $\frac{d \cdot \frac{dx}{dx+d\zeta}}{dx} \times (dx + d\zeta)$; donc divisant par la masse dx de la particule intermédiaire, on aura la force qui tend la mouvoir, donc &c.

Je réduit la fraction $\frac{1}{dx+d\zeta}$ en suite par une division infinie ; il me vient $\frac{1}{dx} - \frac{d\zeta}{dx^2} + \frac{d\zeta^2}{dx^3} -$ &c. ; j' aurai donc en substituant $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\frac{d^2\zeta}{dx^2} - c\frac{d\zeta d^2\zeta}{dx^3} + c\frac{d\zeta^2 d^2\zeta}{dx^4} -$ &c. Or si on suppose $d\zeta$ infiniment petite par rapport à dx, il est clair que le second membre de cette équation se réduit au seul terme $c\frac{d^2\zeta}{dx^2}$, & qu'ainsi l'équation $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\frac{d^2\zeta}{dx^2}$ donnera une valeur de ζ qui pourra être regardée comme exacte ; c' est le cas que nous avons déja traité. Mais si on suppose seulement ζ fort petite, & cependant finie l' équation $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\frac{d^2\zeta}{dx^2}$ ne donnera plus qu'une valeur approchée de ζ ; on substituera donc cette valeur dans les termes $- c\frac{d\zeta d^2\zeta}{dx^3} + c\frac{d\zeta^2 d^2\zeta}{dx^4} -$ &c. qu'on avoit négligées, & intégrant l' équation par la méthode du Prob. IV., on aura une valeur de ζ plus exacte ; on substituera de nouveau la valeur de ζ ainsi corrigée, & l'on en tirera une autre encore plus exacte que la précédente ; en opérant ainsi de suite, on approchera toujours de plus en plus de la vraie valeur de ζ.

Or

Or ſi, pour faciliter le calcul, on introduit les fonctions indéterminées dans notre ſolution du Problême I., on a pour la première valeur de ζ, $\zeta = \varphi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})$; maintenant il faut ſuppoſer $y = -c\frac{d\zeta}{dx^2} + c\frac{d\zeta^2 d^2\zeta}{dx^4}$ — &c. ce qui donne $\int y\,dx = Y = -c\frac{d\zeta^2}{2dx^2} + c\frac{d\zeta^3}{3dx^3}$ — &c. $= -\frac{1}{2}c\varphi'^2(x + t\sqrt{c}) - \frac{1}{2}c\psi'^2(x - t\sqrt{c}) - c\varphi'(x + t\sqrt{c}) \times \psi'(x - t\sqrt{c})$, en négligeant les termes ſuivants qui doivent être regardés comme infiniment petits d'un ordre plus élévé; on aura donc

$$P = -\frac{1}{2}c\varphi'^2(p + 2t\sqrt{c}) - c\varphi'(p + 2t\sqrt{c}) \times \psi' p - \frac{1}{2}c\psi'^2 p \quad \&$$

$$Q = -\frac{1}{2}c\varphi'^2 q - c\varphi' q \times \psi'(q - 2t\sqrt{c}) - \frac{1}{2}c\psi'^2(q - 2t\sqrt{c}), \quad \& \text{ par conſéquent}$$

$$\int P\,dt = -\frac{1}{2}c\int\varphi'^2(p + 2t\sqrt{c})\,dt - \frac{\sqrt{c}}{2}\varphi(p + 2t\sqrt{c}) \times \psi' p - \frac{1}{2}ct\psi'^2 p$$

$$\int Q\,dt = -\frac{1}{2}ct\varphi'^2 q + \frac{\sqrt{c}}{2}\varphi' q \times \psi(q - 2t\sqrt{c}) - \frac{1}{2}c\int\psi'^2(q - 2t\sqrt{c})\,dt.$$

Que (φ) dénote la valeur de l'intégrale $\int\varphi'^2(p + 2t\sqrt{c})\,dt\sqrt{c}$, & (ψ) celle de l'intégrale $\int\psi'^2(q - 2t\sqrt{c})\,dt\sqrt{c}$, on trouvera après avoir reſtitué au lieu de p & de q leurs valeurs, $\frac{\int Q\,dt - \int P\,dt}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4}t\sqrt{c}\,[\psi'^2(x - t\sqrt{c})$

$-\varphi'^2(x+t\sqrt{c}]+\frac{1}{4}\psi(x-t\sqrt{c})\times\varphi'(x+t\sqrt{c})+$ $\psi'(x-t\sqrt{c})\times\varphi(x+t\sqrt{c})-\frac{1}{4}(\psi)+\frac{1}{4}(\varphi)$ quantité qui devra être ajoutée à la première valeur de z.

Pour voir maintenant combien cette correction peut influer sur la viteſſe de la propagation des ébranlemens, on obſervera que les fonctions φx & ψx doivent être telles qu'elles ſoient toujours $= o$, lorſque les abſciſſes x ne ſont pas très-petites (*Voïés Art.* 4.); d'où il ſuit que pour la propagation du côté des abſciſſes poſitives x, il ne faudra retenir que les fonctions de $x - t\sqrt{c}$, ou de $q - 2t\sqrt{c}$; on aura donc $z = \psi(x-t\sqrt{c}) + \frac{1}{4}t\sqrt{c}\,\psi'^2(x-t\sqrt{c})$ $-\frac{1}{4}(\psi)$. Or, en ſuppoſant la valeur de $\psi(x-t\sqrt{c})$ très-petite, $\psi'^2(x-t\sqrt{c})$ ſera infiniment petite du ſecond ordre; & (ψ) ſera auſſi du même ordre à très-peu-près, à cauſe que la fonction $\psi(x-t\sqrt{c})$ n'a de valeur que dans une fort petite étenduë de l'axe; mais $t\sqrt{c}$, devant être à peu-près $= x$, recevra une valeur conſidérable; donc le terme (ψ) s'évanoüira auprès du terme $t\sqrt{c}\,\psi'^2(x-t\sqrt{c})$; & la valeur de z ſe réduira à $\psi(x-t\sqrt{c})+\frac{1}{4}t\sqrt{c}$ $\psi'^2(x-t\sqrt{c})$.

Le premier terme $\psi(x-t\sqrt{c})$ donne, comme il eſt facile de voir, & comme on l'a démontré ailleurs, la viteſſe de la propagation $= \sqrt{c}$; & il eſt clair que cette viteſſe ne peut varier à moins que la quantité $\sqrt{c}$ ne varie de même; ſuppoſons donc $\sqrt{c}+\alpha$ au lieu de $\sqrt{c}$, α étant une quantité aſsès petite; on aura pour le premier terme de la valeur de z, $\psi(x-t\sqrt{c}-t\alpha)$, qui ſe réduit à $\psi(x-t\sqrt{c})-t\alpha\psi'(x-t\sqrt{c})$; comparant cette expreſſion avec celle qu'on a trouvé par notre approxima-

tion

tion, on a $\alpha = -\frac{\sqrt{c}}{4}\psi'(x - t\sqrt{c})$; mais $-\sqrt{c}\,\psi'(x - t\sqrt{c})$ $= \frac{d \cdot \psi(x - t\sqrt{c})}{dt} =$ à la viteſſe propre de la particule qui répond à l'abſciſſe x; donc ſi on nomme u cette viteſſe on aura $\alpha = \frac{u}{4}$, & par conſéquent la viteſſe de la propagation deviendra $= \sqrt{c} + \frac{u}{4}$ à très-peu-près. Cette concluſion paroit donc en quelque ſorte favorable à l'hipothèſe des ébranlemens finis; mais elles perdera toute ſa force pour peu qu'on s'arrête à l'examiner.

Par ce qu'on vient de trouver, on a $\zeta = \psi(x - t\sqrt{c} - \frac{tu}{4})$; ſoit a la longueur de l'onde aérienne excitée immédiatement par le corps ſonore, il eſt clair que ζ ne commencera à avoir une valeur, que quand $x - t\sqrt{c} - \frac{tu}{4}$ ſera $= a$; d'où il s'enſuit qu'au bout du tems t le Son ſera parvenu juſqu'à la particule qui répond à l'abſciſſe $x = a + t(\sqrt{c} + \frac{u}{4})$, u étant la viteſſe que cette particule reçoit en même tems. Or en premier lieu cette viteſſe ne peut être qu'infiniment petite, puiſque il ſeroit abſurde qu'une particule d'un fluide élaſtique reçût tout d'un coup une viteſſe finie par l'action des autres parties adjacentes; en ſecond lieu il eſt viſible que la formule trouvée détruiroit l'uniformité de la viteſſe du Son, & la feroit dépendre en quelque ſorte de la nature des ébranlemens primitifs; ce qui eſt contraire à toutes les expériences.

Il ſeroit, après cela, inutile de pouſſer plus loin l'approximation de la valeur de ζ; car, outre qu'il n'en réſulteroit que des termes moindres que celui que nous venons d'examiner, l'expreſſion de la viteſſe du Son deviendroit toujours

$= \zeta$ plus

plus compliquée, & par conſéquent moins conforme à la véritable.

43. Paſſons maintenant à l'hipothèſe des ondulations ſphériques; & cherchons par le moien du Prob. V. ſi le changement, que la ſuppoſition des ébranlemens finis cauſe dans leur propagation, peut s'accorder avec les phénomènes.

Par les principes poſés dans *l'Art.* 30., on trouvera pour l'équation rigoureuſe du mouvement du fluide

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -c\,\frac{d\cdot\dfrac{x^2dx}{(x+\zeta)^2(dx+d\zeta)}}{dx}\times\frac{(x+\zeta)^2(dx+d\zeta)}{x^2dx}$$

$$= \frac{d^2\zeta}{dx\,(dx+d\zeta)} + \frac{2\,d\zeta}{dx\,(x+\zeta)} - \frac{2\zeta}{x\,(x+\zeta)},$$

d'où l'on tire par la voie des ſeries

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{2\,d\cdot\frac{\zeta}{x}}{dx}\right) - c\left(\frac{d\zeta\,d^2\zeta}{dx^3} + 2\,\frac{\zeta}{x}\times\frac{d\cdot\frac{\zeta}{x}}{dx}\right)$$

$$+ c\left(\frac{d\zeta^2 d^2\zeta}{dx^4} + 2\,\frac{\zeta^2}{x^2}\times\frac{d\cdot\frac{\zeta}{x}}{dx}\right) - \text{ \&c.}$$

On aura donc ſelon le Prob. V. $y = -c\left(\frac{d\zeta\,d^2\zeta}{dx^3} + 2\,\frac{\zeta}{x}\times\frac{d\cdot\frac{\zeta}{x}}{dx}\right)$ en négligeant les autres termes qui renferment plus de deux dimenſions de ζ; donc $\int y\,dx = -\frac{c}{2}\frac{d\zeta^2}{dx^2} - c\,\frac{\zeta^2}{x^2}$; & $\int y\,dx + xy = Y = \frac{d\cdot x\int y\,dx}{dx} = -\frac{c}{2}\,\frac{d\cdot\frac{x\,d\zeta^2}{dx^2}}{dx} - c\,\frac{d\cdot\frac{\zeta^2}{x}}{dx}$. Maintenant il faut ſubſtituer au lieu de ζ, ſa valeur tirée des formules du Prob. II.; pour abréger ces ſubſtitutions je remarque d'abord, comme il eſt évident, qu'il ne faudra emploïer que les ſeules fonctions de $x - t\sqrt{c}$; d'où il ſuit que ſi on poſe

$$\zeta + \frac{d\cdot\zeta x}{dx} = \varphi(x - t\sqrt{c}), \text{ on aura}$$

$$\zeta =$$

$$\zeta = \frac{\varphi(x - t\sqrt{c})}{x} - \frac{\varphi(x - t\sqrt{c})}{x^2};$$

Je remarque enſuite que, lorſque x a une valeur conſidérable, on peut négliger, auprès des termes qui contiennent x ſeul au dénominateur, tous ceux qui ſont diviſés par des puiſſances d'x plus hautes que l'unité; par ce moïen on aura ſimplement $\zeta = \frac{\varphi(x - t\sqrt{c})}{x}$, &

$$Y = -c\,\frac{\varphi(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x - t\sqrt{c})}{x}, \text{ donc}$$

$$P = -\frac{c\varphi p \times \varphi' p}{p + t\sqrt{c}}; \int P\,dt = -\sqrt{c}\, l(p + t\sqrt{c}) \times \varphi p \times \varphi' p$$
$$= -\sqrt{c}\, l x \times \varphi(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x - t\sqrt{c});$$
$$Q = -\frac{c\varphi(q - 2t\sqrt{c}) \times \varphi'(q - 2t\sqrt{c})}{q - t\sqrt{c}};$$

d'où l'on tirera par les quadratures la valeur de $\int Q\,dt$; mais il eſt facile de voir que cette valeur ſera infiniment petite par rapport à celle de $\int P\,dt$, à cauſe que la fonction φ, & ſes différences ſont toujours infiniment petites, & qu'elles n'ont outre cela des valeurs réelles, que dans une très-petite portion de l'axe; ne prenant donc que la formule $\frac{1}{2\sqrt{c}} \int P\,dt$, & l'ôtant de $\zeta + \frac{d \cdot x\zeta}{dx}$, ſavoir de $\varphi(x - t\sqrt{c})$ on aura pour l'augmentation de cette fonction $\frac{1}{2} \cdot l\,x \times \varphi(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x - t\sqrt{c})$; or ſi on ſuppoſe comme on a fait plus haut, que la quantité $\sqrt{c}$ croiſſe d'une très-petite quantité α, on trouvera ici $\alpha = -\frac{l x \times \varphi(x - t\sqrt{c})}{2t}$, ce qui changera la fonction $\varphi(x - t\sqrt{c})$ en $\varphi[x - t\sqrt{c} + \frac{1}{2} l x \times \varphi(x - t\sqrt{c})]$. Prenant a pour le rayon de la première onde aérienne excitée par le corps ſonore, les loix de la propagation du Son ſeront donc contenues dans la for-

mule $x - t\sqrt{c} + \frac{1}{2} lx \times \varphi(x - t\sqrt{c}) = a.$

Je crois ſuperflu de m'arrêter ici à examiner les conſéquences de cette formule, car il eſt facile de voir qu'elles ne ſeront pas plus favorables à la ſuppoſition dont il s'agit, que ne l'ont été celles qu'on a trouvé dans *l'Article précédent*.

COROLLAIRE.

44. Après ce qu'on vient de démontrer je crois qu'on peut regarder comme une vérité aſsès conſtante, que l'hiporhèſe des ébranlemens infiniment petits, eſt la ſeule récévable dans la théorie de la propagation du Son, comme nous avions promis de le prouver dans *l'Art.* 10. Je vais donc rentrer dans cette hipothèſe, & chercher à déterminer les lois de la propagation du Son, d'une manière plus générale & plus exacte, que je ne l'ai fait.

§. II.

Eſſai d'une conſtruction générale des trois équations de l'Art. 10.

45. JE multiplie la première de ces équations par L, la ſeconde par M, & la troiſiéme par N (L, M, N étant ſuppoſées des fonctions quelconques de X, Y, Z); j'en fais une ſomme, que je multiplie encore par $dXdYdZ$, & dont je prens l'intégrale, en faiſant varier l'une après l'autre les trois changeantes X, Y, & Z. De cette manière j'aurai l'équation

$$\int \left(\frac{d^2x}{dt^2} L + \frac{d^2y}{dt^2} M + \frac{d^2z}{dt^2} N\right) dXdYdZ =$$

$$c\int\left(\frac{d^2x}{dX^2}L+\frac{d^2y}{dXdY}L+\frac{d^2z}{dXdZ}L+\frac{d^2y}{dY^2}M+\frac{d^2x}{dYdX}M\right.$$
$$\left.+\frac{d^2z}{dYdZ}M+\frac{d^2z}{dZ^2}N+\frac{d^2x}{dZdX}N+\frac{d^2y}{dZdY}N\right)dXdYdZ$$

qui renferme le mouvement de chaque point mobile du ſiſtème donné. On remarquera que c eſt miſe ici pour $\frac{2Eh}{T^2D}$, ainſi que nous l'avons pratiqué par tout ailleurs.

En ſuivant notre méthode on prendra autant d'intégrales par parties qu'il en faudra pour faire diſparoître toutes les différences de x, y, z ſuivant X, Y, Z; on aura donc

$$\int\frac{d^2x}{dX^2}LdXdYdZ=\int x\frac{d^2L}{dX^2}dXdYdZ$$
$$+\int\left(\frac{dx}{dX}L-x\frac{dL}{dX}\right)dYdZ$$
$$\int\frac{d^2y}{dXdY}LdXdYdZ=\int y\frac{d^2L}{dXdY}dXdYdZ$$
$$+\int\frac{dy}{dY}LdYdZ-\int y\frac{dL}{dX}dXdZ$$
$$\int\frac{d^2z}{dXdZ}LdXdYdZ=\int z\frac{d^2L}{dXdZ}dXdYdZ$$
$$+\int\frac{dz}{dZ}LdYdZ-\int z\frac{dL}{dX}dXdY$$
$$\int\frac{d^2y}{dY^2}MdXdYdZ=\int y\frac{d^2M}{dY^2}dXdYdZ$$
$$+\int\left(\frac{dy}{dY}M-y\frac{dM}{dY}\right)dXdZ$$
$$\int\frac{d^2x}{dYdX}MdXdYdZ=\int x\frac{d^2M}{dYdX}dXdYdZ$$
$$+\int\frac{dx}{dX}MdXdZ-\int x\frac{dM}{dY}dYdZ$$
$$\int\frac{d^2z}{dYdZ}MdXdYdZ=\int z\frac{d^2M}{dYdZ}dXdYdZ$$

$$+\int(dz$$

$$+\int \frac{d\zeta}{dZ} M dX dZ - \int \zeta \frac{dM}{dY} dX dY$$

$$\int \frac{d^2\zeta}{dZ^2} N dX dY dZ = \int \zeta \frac{d^2 N}{dZ^2} dX dY dZ$$

$$+\int \left(\frac{d\zeta}{dZ} N - \zeta \frac{dN}{dZ}\right) dX dY$$

$$\int \frac{d^2 x}{dZ dX} N dX dY dZ = \int x \frac{d^2 N}{dZ dX} dX dY dZ$$

$$+\int \frac{dx}{dX} N dX dY - \int x \frac{dN}{dZ} dY dZ$$

$$\int \frac{d^2 y}{dZ dY} N dX dY dZ = \int y \frac{d^2 N}{dZ dY} dX dY dZ$$

$$+\int \frac{dy}{dY} N dX dY - \int y \frac{dN}{dZ} dX dZ.$$

Dans ces transformées il y a, comme on le voit, deux sortes d'expreſſions intégrales; les unes plus générales renferment trois intégrations, ſuivant la variabilité des trois coordonnées X, Y, Z, & expriment par conſéquent la ſomme d'autant de valeurs particulières, qu'il y a de particules dans la maſſe totale du fluide; les autres, au contraire, moins générales ne renferment chacune que deux intégrations ſuivant la variabilité de deux des coordonnées X, Y, & Z; & ne dénotent, en conſéquente, que la ſomme d'autant de valeurs particulières qu'il y a de particules dans une ſeule tranche du fluide. Celles-ci pourront donc être regardées comme des conſtantes à l'égard de la troiſième variable manquante; & l'on ſera toujours le maître de les faire évanoüir, en donnant certaines limitations aux valeurs des quantités L, M, & N, ſelon la figure de l'eſpace, dans lequel on ſuppoſe que la maſſe de l'air eſt renfermée.

Ainſi, par exemple, ſi cette figure eſt celle d'un parallélépipéde quelconque, on voit aiſément que x eſt nul dans les deux plans oppoſés qui ſont perpendiculaires à la

ligne

ligne X; d'où il ſuit que les intégrales, qui contiennent x, ſeront auſſi nuls dans toute leur étendue, à cauſe que ces intégrales ne varient que ſuivant Y & Z; par une raiſon ſemblable on verra, que les intégrales contenant y & z s'évanoüiront auſſi d'elles-mêmes; donc pour achever de faire évanoüir les autres intégrales, on ſuppoſera L tel qu'il devienne $= 0$, lorſque $X = 0$, & lorſque $X = a$ quels que ſoient Y & Z; enſuite M devra devenir $= 0$, lorſque $Y = 0$, & $Y = b$, X & Z étant quelconques; enfin N devra diſparoître de même, en poſant $Z = 0$, & $Z = c$, pour toute l'étendue des X & Y; a, b, c étant les trois dimenſions du parallélépipéde donné.

Si la maſſe du fluide avoit une autre figure quelconque, on trouveroit auſſi, en aïant égard à cette figure, les conditions qui pourront faire diſparoître toutes les expreſſions intégrales à deux ſeules changeantes; il eſt vrai, que le plus ſouvent ces opérations ne pourront s'exécuter, faute de connoître les valeurs exactes & générales des quantités L, M, & N; mais il ſuffira de les imaginer exécutées pour démontrer que l'on peut toujours omettre les expreſſions intégrales dont nous parlons. Ainſi l'on aura ſimplement après les ſubſtitutions . . . . . .

$$\int \left(\frac{d^2x}{dt^2} L + \frac{d^2y}{dt^2} M + \frac{d^2z}{dt^2} N\right) dX dY dZ =$$

$$c \int \left[x \left(\frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dX dY} + \frac{d^2N}{dX dZ}\right) + y \left(\frac{d^2M}{dY^2} + \frac{d^2L}{dY dX} + \frac{d^2N}{dY dZ}\right) + z \left(\frac{d^2N}{dZ^2} + \frac{d^2L}{dZ dX} + \frac{d^2M}{dZ dY}\right) \right] dX dY dZ.$$

On fera maintenant

$$\frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dX dY} + \frac{d^2N}{dX dZ} = kL \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$\frac{d^2M}{dY^2} + \frac{d^2L}{dY dX} + \frac{d^2N}{dY dZ} = kM \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

$$\frac{d^2N}{dZ^2} + \frac{d^2L}{dZdX} + \frac{d^2M}{dZdY} = kN \quad \ldots\ldots \text{(C)}$$

Equations, par leſquelles on déterminera les valeurs des quantités L, M, & N. Il faudra de plus que ces valeurs ſatisfaſſent aux conditions énoncées ci-deſſus ; & c'eſt par là qu'on déterminera toutes les conſtantes que l'intégration aura entrainé, comme auſſi la conſtante k qui ne pourra manquer d'avoir autant de valeurs différentes qu'il y a des particules mobiles.

Cela fait, notre équation principale pourra ſe mettre ſous la forme ordinaire $\frac{d^2s}{dt^2} = kcs$, s étant ici $= \int(xL + yM + \zeta N)\, dXdYdZ$; d'où l'on tirera comme dans le Prob. I.

$$s = S \text{ cof. } t\sqrt{-ck} + \frac{R}{\sqrt{-ck}} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \text{ cof. } t\sqrt{-ck} - S\sqrt{-ck} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck}.$$

Or ſoit, $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, & $\frac{d\zeta}{dt} = \zeta'$; & que (x), (y), (ζ), (x'), (y'), (ζ') déſignent les valeurs de x, y, ζ, x', y', & ζ', lorſque $t = 0$, on aura donc

$$\text{(D)} \quad \ldots\ldots \int[xL + yM + \zeta N]\, dXdYdZ = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int[(x)L + (y)M + (\zeta)N]\, dXdYdZ + \frac{\text{ſin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int[(x')L + (y')M + (\zeta')N]\, dXdYdZ$$

$$\text{(E)} \quad \ldots\ldots \int[x'L + y'M + \zeta'N]\, dXdYdZ = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int[(x')L + (y')M + (\zeta')N]\, dXdYdZ - \sqrt{-ck} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck} \int[(x)L + (y)M + (\zeta)N]\, dZdYdZ.$$

Voilà les équations, d'où l'on tireroit ſuivant notre méthode les valeurs exactes de x, y, & ζ, ſi l'on avoit celles de L, M, & N, & qu'on pût faire diſparoître la quantité k, ainſi qu'on l'a fait dans les Prob. préc.

Mais le premier de ces objets, nous préſente d'abord des difficultés inſurmontables, ſoit qu'en effet les équations

(A),

(A), (B), (C) ne ſoient pas ſuſceptibles d'intégration, ſoit qu'elles demandent d'autres méthodes, que celles que nous connoiſſons. Si on vouloit ſe borner à des conſtructions particulières, il ſeroit aiſé d'en trouver; mais elles ne ſauroient être d'aucune utilité dans la recherche des loix de la propagation du Son.

46. Il eſt viſible, par exemple, qu'on peut ſuppoſer $L = Ae^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}$; $M = Be^{(pX+qX+rZ)\sqrt{k}}$; $N = Ce^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}$; A, B, C, p, q, r étant des conſtantes à déterminer par la ſubſtitution & la comparaiſon des termes; pour cela on trouvera les trois équations

$$A = c\,(Ap^2 + Bpq + Cpr)$$
$$B = c\,(Bq^2 + Apq + Crq)$$
$$C = c\,(Cp^2 + Apr + Bqr),$$

qui donnent, en poſant R pour $\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$, $p = \frac{A}{R\sqrt{c}}$, $q = \frac{B}{R\sqrt{c}}$, $r = \frac{C}{R\sqrt{c}}$; mais les valeurs de L, M, & N n'étant que particulières, on ne pourra s'en ſervir, ſuivant notre méthode, que dans l'hipothèſe que les valeurs de x, y, & z ſoient renfermées dans certaines conditions: car il eſt viſible, que L, M, & N étant exprimées par une même fonction de $pX + qY + qZ$, multipliée ſeulement par des conſtantes différentes, les valeurs de x, y, z devront être les mêmes pour tous les points, dont la poſition eſt renfermée dans la formule $pX + qY + rZ = \text{conſt}$, & de plus ces valeurs devront garder entr'elles un rapport conſtant. Suppoſé que ces conditions aient lieu, on pourra pourſuivre le calcul, en ſubſtituant les valeurs trouvées de L, M, & N dans l'équation (D), & transformant enſuite le terme $\int[A(x') + B(y') + C(z')]e^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}\,dX\,dY\,dZ$ en $-\sqrt{k}\int[pA\int(x')\,dX + qB\int(y')\,dY + rC\int(z')\,dZ]e^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}\,dX\,dY\,dZ$, & réduiſant cof. $t\sqrt{-ck}$, & ſin. $t\sqrt{-ck}$ en exponentielles imaginaires, on aura

$\int[A$

$$\int [Ax + By + C\zeta]\, e^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}\, dX dY dZ =$$

$$\frac{1}{2}\int [A(x) + B(y) + C(\zeta) - \frac{1}{\sqrt{c}} pA\int(x')\,dX - \frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$qB\int(y')\,dY - \frac{1}{\sqrt{c}} rC\int(\zeta')\,dZ]\, e^{(pX+qY+rZ+t\sqrt{c})\sqrt{k}}$$

$$dX dY dZ + \frac{1}{2}\int [A(x) + B(y) + C(\zeta) + \frac{1}{\sqrt{c}} pA$$

$$\int(x')\,dX + \frac{1}{\sqrt{c}} qB\int(y')\,dY + \frac{1}{\sqrt{c}} rC\int(\zeta')\,dZ]$$

$$e^{(pX+qY+rZ-t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dX dY dZ.$$

Equation, d'où l'on tirera ſuivant notre méthode,

$$Ax + By + C\zeta = \frac{1}{2}[A(x) + B(y) + C(\zeta)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{c}} pA\int(x')\,dX + \frac{1}{\sqrt{c}} qB\int(y')\,dY + \frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$rC\int(\zeta')\,dZ]^{(pX+qY+rZ+t\sqrt{c})} + \frac{1}{2}[A(x) +$$

$$B(y) + C(\zeta) - \frac{1}{\sqrt{c}} pA\int(x')\,dX - \frac{1}{\sqrt{c}} qB\int(y')\,dY$$

$$- \frac{1}{\sqrt{c}} rC\int(\zeta')\,dZ]^{(pX+qY+rZ-t\sqrt{c})}.$$

Les quantités miſes en forme d'expoſants denotent, comme dans le Problême I. les valeurs qu'il faut donner aux coordonnées; ainſi X, Y, Z étant les coordonnées qui répondent à x, y, ζ & (X), (Y), (Z) étant ſuppoſées celles qui répondent aux expreſſions qui ont l'expoſant $pX + qY + rZ \pm t\sqrt{c}$, les valeurs de ces dernières devront être telles, que $p(X) + q(Y) + r(Z) = pX + qY + rZ \pm t\sqrt{c}$.

Au reſte, ſi l'on introduit dans cette ſolution les fonctions indéterminées, elle reviendra au même, que celle que M. Euler a donné dans ſon Mémoire. Car on aura $Ax + By + C\zeta = \varphi(pX + qY + rZ + t\sqrt{c}) + \psi(pX + qY + rZ - t\sqrt{c})$; d'où l'on tirera les valeurs de

y &

y & de ζ en faiſant, ſelon l'hipothèſe, $y = fx$, $\zeta = hx$; ſubſtituant enſuite ces valeurs dans les équations différentielles de *l'Art.* 10., on trouvera $f = \frac{B}{A}$, & $h = \frac{C}{A}$, conformément aux formules de la *pag.* 7. *ci-deſſus*.

Voilà le Problême réſolu analitiquement pour une infinité de cas; mais il faut avoüer qu'aucune de ces ſolutions ne ſera applicable à la Théorie de la propagation du Son, dans laquelle les ébranlemens primitifs doivent être ſuppoſés quelconques. Il en ſera de même de toute autre ſolution qui ſe trouvera en intégrant les équations (A), (B), (C) dans des cas particuliers. C'eſt pourquoi nous rénoncerons pour le préſent à déterminer les valeurs exactes de x, y, & ζ, par les voies ordinaires de notre méthode, & nous nous bournerons à les trouver, s'il eſt poſſible, par approximation, en ſuppoſant que le tems t ſoit fort petit; nous verrons enſuite quelles conſéquences on pourra tirer d'un tel calcul pour la connoiſſance de loix de la propagation du Son en général.

47. Je commence par développer l'expreſſion $\text{cof. } t\sqrt{-k}$ en pouſſant la ſerie juſqu'aux quantités infiniment petites du quatrième ordre; j'ai $\text{cof. } t\sqrt{-ck} = 1 + \frac{1}{2} kt^2c + \frac{1}{2.3.4} k^2t^4c^2$; ce qui changera le terme $\text{cof. } t\sqrt{-ck} \int [(x)L + (y)M + (\zeta)N]\, dXdYdZ$ de l'équation (D) en

$$\int (x) \times \left[L + \frac{1}{2} t^2ckL + \frac{1}{2.3.4} t^4c^2k^2L\right] dXdYdZ$$
$$+ \int (y) \times \left[M + \frac{1}{2} t^2ckM + \frac{1}{2.3.4} t^4c^2k^2M\right] dXdYdZ$$
$$+ \int (\zeta) \times \left[N + \frac{1}{2} t^2ckN + \frac{1}{2.3.4} t^4c^2k^2N\right] dXdYdZ.$$

Or les équations (A), (B), (C) donnent d'abord

kL

$$kL = \frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dXdY} + \frac{d^2N}{dXdZ}; \; kM = \frac{d^2M}{dY^2} + \frac{d^2L}{dYdX} + \frac{d^2N}{dYdZ}; \; kN = \frac{d^2N}{dZ^2} + \frac{d^2L}{dZdX} + \frac{d^2M}{dZdY};$$

multipliant ces équations par k, & substituant de nouveau au lieu de kL, kM, kN leurs valeurs, on aura ensuite

$$k^2L = \frac{d^4L}{dX^4} + \frac{d^4L}{dX^2dY^2} + \frac{d^4L}{dX^2dZ^2} + \frac{d^4M}{dX^3dY} + \frac{d^4M}{dXdY^3} + \frac{d^4M}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4N}{dX^3dZ} + \frac{d^4N}{dXdZ^3} + \frac{d^4N}{dXdZdY^2};$$

$$k^2M = \frac{d^4M}{dY^4} + \frac{d^4M}{dY^2dX^2} + \frac{d^4M}{dY^2dZ^2} + \frac{d^4L}{dY^3dX} + \frac{d^4L}{dYdX^3} + \frac{d^4L}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4N}{dY^3dZ} + \frac{d^4N}{dYdZ^3} + \frac{d^4N}{dX^2dYdZ};$$

$$k^2N = \frac{d^4N}{dZ^4} + \frac{d^4N}{dZ^2dX^2} + \frac{d^4N}{dZ^2dY^2} + \frac{d^4L}{dZ^3dX} + \frac{d^4L}{dZdX^3} + \frac{d^4L}{dXdY^2dZ} + \frac{d^4M}{dZ^3dY} + \frac{d^4M}{dZdY^3} + \frac{d^4M}{dX^2dYdZ}.$$

Par là, on pourra faire évanoüir la lettre k de l'expression précédente; car on aura

$$L + \frac{1}{2}t^2ckL + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}t^4c^2k^2L = L + \frac{1}{2}t^2c\left(\frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dXdY} + \frac{d^2N}{dXdZ}\right) + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}t^4c^2\left(\frac{d^4L}{dX^4} + \frac{d^4L}{dX^2dY^2} + \frac{d^4L}{dX^2dZ^2} + \frac{d^4M}{dX^3dY} + \frac{d^4M}{dXdY^3} + \frac{d^4M}{dXdY^2dZ} + \frac{d^4N}{dX^3dZ} + \frac{d^4N}{dXdZ^3} + \frac{d^4N}{dXdY^2dZ}\right) \ldots\ldots (F)$$

M +

$$M + \frac{1}{2} t^2 c k M + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 M = M + \frac{1}{2} t^2 c \left(\frac{d^2 M}{dY^2} \right.$$
$$\left. + \frac{d^2 L}{dY dX} + \frac{d^2 N}{dY dZ} \right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 \left(\frac{d^4 M}{dY^4} + \frac{d^4 M}{dY^2 dX^2} \right.$$
$$+ \frac{d^4 M}{dY^2 dZ^2} + \frac{d^4 L}{dY^3 dX} + \frac{d^4 L}{dY dX^3} + \frac{d^4 L}{dX dY dZ}$$
$$\left. + \frac{d^4 N}{dY^3 dZ} + \frac{d^4 N}{dY dZ^3} + \frac{d^4 N}{dX^2 dY dZ} \right) \ldots \quad (G)$$

$$N + \frac{1}{2} t^2 c k N + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 N = N + \frac{1}{2} t^2 c \left(\frac{d^2 N}{dZ^2} \right.$$
$$\left. + \frac{d^2 L}{dZ dX} + \frac{d^2 M}{dZ dY} \right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 \left(\frac{d^4 N}{dZ^4} + \frac{d^4 N}{dZ^2 dX^2} \right.$$
$$+ \frac{d^4 N}{dZ^2 dY^2} + \frac{d^4 L}{dX^3 dX} + \frac{d^4 L}{dZ dX^3} + \frac{d^4 L}{dX dY^2 dZ}$$
$$\left. + \frac{d^4 M}{dZ^3 dY} + \frac{d^4 M}{dZ dY^3} + \frac{d^4 M}{dX^2 dY dZ} \right) \ldots \quad (H)$$

Or, quelles que soient les valeurs des quantités L, M, N, il est certain qu'elles seront des fonctions de X, Y, Z, ce que nous dénoterons ainsi $L^{(X, Y, Z)}$, $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$; de sorte, que si l'on suppose que les variables X, Y, Z deviennent $X + pt$, $Y + qt$, $Z + rt$, les valeurs correspondantes de L, M, N s'exprimeront à notre manière par $L^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)}$, $M^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)}$, $N^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)}$. Cela posé, on sait, que si L représente une fonction quelconque de la variable X, laquelle croisse d'une quantité très-petite pt, la valeur de L deviendra, en négligeant les quantités infiniment petites au dessus du quatrième ordre, $L + pt \frac{dL}{dX} + \frac{1}{2} p^2 t^2 \frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} p^3 t^3 \frac{d^3 L}{dX^3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^4 t^4 \frac{d^4 L}{dX^4}$; donc si on suppose que la fonction L renferme outre la variable X, les variables Y, & Z qui croissent en même tems des quantités très-petites qt, rt, on trouvera par un calcul assès simple

$$L(X+pt, Y+qt, Z+rt) = L + t\left(p\frac{dL}{dX} + q\frac{dL}{dY} + r\frac{dL}{dZ}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}t^2\left(p\frac{d^2L}{dX^2} + 2pq\frac{d^2L}{dXdY} + q^2\frac{d^2L}{dY^2} + 2pr\frac{d^2L}{dXdZ}\right.$$
$$\left. + 2qr\frac{d^2L}{dYdZ} + r^2\frac{d^2L}{dZ^2}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}t^3\left(p^3\frac{d^3L}{dX^3} + 3p^2q\right.$$
$$\frac{d^3L}{dX^2dY} + 3pq^2\frac{d^3L}{dXdY^2} + q^3\frac{d^3L}{dY^3} + 3p^2r\frac{d^3L}{dX^2dZ}$$
$$+ 3pr^2\frac{d^3L}{dXdZ^2} + 3q^2r\frac{d^3L}{dY^2dZ} + 3qr^2\frac{d^3L}{dYdZ^2} +$$
$$6pqr\frac{d^3L}{dXdYdZ} + r^3\frac{d^3L}{dZ^3}\Big) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}t^4\left(p^4\frac{d^4L}{dX^4}\right.$$
$$+ 4p^3q\frac{d^4L}{dX^3dY} + 6p^2q^2\frac{d^4L}{dX^2dY^2} + 4pq^3\frac{d^4L}{dXdY^3} +$$
$$q^4\frac{d^4L}{dY^4} + 4p^3r\frac{d^4L}{dX^3dZ} + 6p^2r^2\frac{d^4L}{dX^2dZ^2} + 4pr^3\frac{d^4L}{dXdZ^3} + 4q^3r\frac{d^4L}{dY^3dZ} + 6q^2r^3\frac{d^4L}{dY^2dZ^2} + 4qr^3\frac{d^4L}{dYdZ^3} + 12p^2qr\frac{d^4L}{dX^2dYdZ} + 12pq^2r\frac{d^4L}{dXdY^2dZ}$$
$$\left. + 12pqr\frac{d^4L}{dXdYdZ_2} + r^4\frac{d^4L}{dZ^4}\right).$$

De cette formule je déduis les ſuivantes

$$\frac{1}{8}L(X+pt, Y+qt, Z+rt) + \frac{1}{8}L(X+pt, Y-qt, Z+rt)$$
$$+ \frac{1}{8}L(X+pt, Y+qt, Z-rt) + \frac{1}{8}L(X+pt, Y-qt, Z-rt)$$
$$+ \frac{1}{8}L(X-pt, Y+t, Z+rt) + \frac{1}{8}L(X-pt, Y-qt, Z+rt)$$
$$+ \frac{1}{8}L(X-pt, Y+qt, Z-rt) + \frac{1}{8}L(X-pt, Y-qt, Z-rt)$$
$$= L + \frac{1}{2}t^2\left(p^2\frac{d^2L}{dX^2} + q^2\frac{d^2L}{dY^2} + r^2\frac{d^2L}{dZ^2}\right) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$$
$$t^4(p^4$$

$$t^4\left(p^4\frac{d^4L}{dX^4}+6p^2q^2\frac{d^4L}{dX^2dY^2}+q^4\frac{d^4L}{dY^4}+6p^2r^2\frac{d^4L}{dX^2dZ^2}\right.$$
$$\left.+6q^2r^2\frac{d^4L}{dY^2dZ^2}+r^4\frac{d^4L}{dZ^4}\right);$$

$$\frac{1}{4}L(X,Y+qt,Z+rt)+\frac{1}{4}L(X,Y-qt,Z+rt)$$
$$+\frac{1}{4}L(X,Y+qt,Z-rt)+\frac{1}{4}L(X,Y-qt,Z-rt)$$
$$=L+\frac{1}{2}t^2\left(q^2\frac{d^2L}{dY^2}+r^2\frac{d^2L}{dZ^2}\right)+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}t^4$$
$$\left(q^4\frac{d^4L}{dY^4}+6q^2r^2\frac{d^4L}{dY^2dZ^2}+r^4\frac{d^4L}{dZ^4}\right);$$

$$\frac{1}{8}L(X+pt,Y+qt,Z+rt)+\frac{1}{8}L(X+pt,Y+qt,Z-rt)$$
$$+\frac{1}{8}L(X-pt,Y-qt,Z+rt)+\frac{1}{8}L(X-pt,Y-qt,Z-rt)$$
$$-\frac{1}{8}L(X+pt,Y-qt,Z+rt)-\frac{1}{8}L(X+pt,Y-qt,Z-rt)$$
$$-\frac{1}{8}L(X-pt,Y+qt,Z+rt)-\frac{1}{8}L(X-pt,Y+qt,Z-rt)$$
$$=\frac{1}{2}t^2\times2pq\frac{d^2L}{dXdY}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}t^4\left(4p^3q\frac{d^4L}{dX^3dY}+\right.$$
$$\left.4pq^3\frac{d^4L}{dXdY^3}+12pqr^2\frac{d^4L}{dXdYdZ^2}\right);$$

$$\frac{1}{8}L(X+pt,Y+qt,Z+rt)+\frac{1}{8}L(X+pt,Y-qt,Z+rt)$$
$$+\frac{1}{8}L(X-pt,Y+qt,Z-rt)+\frac{1}{8}L(X-pt,Y-qt,Z-rt)$$
$$-\frac{1}{8}L(X+pt,Y+qt,Z-rt)-\frac{1}{8}L(X+pt,Y-qt,Z-rt)$$
$$-\frac{1}{8}L(X-pt,Y+qt,Z+rt)-\frac{1}{8}L(X-pt,Y-qt,Z+rt)$$
$$=\frac{1}{2}t^2\times2pr\frac{d^2L}{dXdZ}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}t^4\left(4p^3r\frac{d^4L}{dX^3dZ}+\right.$$
$$\left.4pr^3\right.$$

$$4\,p\,r^3\,\frac{d^4L}{dX\,dZ^3} + 12\,p\,q^2\,r\,\frac{d^4L}{dX\,dY^2\,dZ}\Big).$$

On formera de pareilles formules à l'égard des expreſſions $M^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, & $N^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, & en donnant des valeurs convenables aux conſtantes indéterminées p, q, r on changera, par les ſubſtitutions, l'équation (F) en celle-ci

$$(L)\ \ldots\ L + \frac{1}{2}t^2ckL + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}t^4c^2k^2L = L^{(X,\,Y,\,Z)}$$

$$- \frac{1}{4}L^{(X,\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4}L^{(X,\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{4}L^{(X,\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4}L^{(X,\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}L^{(X+t\sqrt{c},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}L^{(X+t\sqrt{c},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}L^{(X+t\sqrt{c},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}L^{(X+t\sqrt{c},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}L^{(X-t\sqrt{c},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}L^{(X-t\sqrt{c},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}L^{(X-t\sqrt{c},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}L^{(X-t\sqrt{c},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}M^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}M^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}M^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}M^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{8}M^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8}M^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{8}M^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8}M^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8}N^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8}N^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8}N^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8}N^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8}$$

$$-\frac{1}{8}N^{(x+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,z-i\sqrt{\frac{c}{2}})}-\frac{1}{8}N^{(x+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,z-i\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$-\frac{1}{8}N^{(x-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,z-i\sqrt{\frac{c}{2}})}-\frac{1}{8}N^{(x-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,z+i\sqrt{\frac{c}{2}})},$$

On trouvera de même les transformées (M) & (N) des deux autres équations (G) & (H), & l'on aura ainſi, en ſubſtituant, la transformée entière de la formule cof. $t\sqrt{-ck}\int[(x)L+(y)M+(z)N]\,dXdYdZ$, qu'on ſubſtituera enſuite dans l'équation (D).

Suppoſons, pour un moment, que les quantités (x'), (y'), (z') ſoient nulles dans cette équation, la lettre k s'en ira entiérement, & ne ſe trouvera plus que dans les expreſſions des quantités L, M, & N. Or, quoique nous ne conoiſſions point la forme de ces expreſſions, on pourra cependant vérifier l'équation indépendanment de k, comme notre méthode le demande; car pour cela il ne s'agira que de comparer enſemble les quantités qui ſe trouveront multipliées par les fonctions L, M, N qui auront des valeurs égales.

Que (X), (Y), (Z) dénotent les coordonnées qui répondent à l'expreſſion générale $L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, on aura, ſelon notre hipothèſe, $(X)=X+pt$, $(Y)=Y+qt$, $(Z)=Z+rt$; X, Y, Z étant les coordonnées, qui répondent à l'expreſſion L ſimplement, & aux quantités x, y, z, (x), (y), (z). Suppoſons donc que les valeurs de (X), (Y), (Z) ſoient diminuées des quantités pt, qt, rt, (ce qui eſt permis, puiſque ces quantités ſont conſtantes à l'égard des intégrations indiquées dans l'équation) elles deviendront X, Y, Z; mais en même tems les coordonnées correſpondantes à (x), (y), (z), & qui étoient auparavant X, Y, Z, deviendront $X-pt$, $Y-qt$, $Z-rt$. De cette manière toutes les quantités exprimées généralement par $L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, $M^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$ $N^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, redeviendront

dront $L^{(X,Y,Z)}$, $M^{(X,Y,Z)}$, $N^{(X,Y,Z)}$, ou ſimplement L, M, N; mais à leur tour les quantités (x), (y), (z), qui les multiplient, ſe changeront en $(x)^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}$, $(y)^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}$, $(z)^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}$.

Après ces transformations on joignera enſemble tous les termes de l'équation qui ſe trouvent multipliés par L, M, N, & on décompoſera enſuite cette équation en trois portions, dont chacune devra ſe vérifier ſéparément, & indépendamment des valeurs de L, M, & N. On aura donc par là

(P) . . . . . $x = (x)^{(X,Y,Z)}$

$$-\frac{1}{4}(x)^{(X,\,Y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}-\frac{1}{4}(x)^{(X,\,Y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$-\frac{1}{4}(x)^{(X,\,Y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{6}})}-\frac{1}{4}(x)^{(X,\,Y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z,\,+i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(x)^{(X-i\sqrt{c},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}+\frac{1}{8}(x)^{(X-i\sqrt{c},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(x)^{(X-i\sqrt{c},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{6}})}+\frac{1}{8}(x)^{(X-i\sqrt{c},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(x)^{(X+i\sqrt{c},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}+\frac{1}{8}(x)^{(X+i\sqrt{c},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(x)^{(X+i\sqrt{c},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{6}})}+\frac{1}{8}(x)^{(X+i\sqrt{c},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(y)^{(X-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}+\frac{1}{8}(y)^{(X-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(y)^{(X+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}+\frac{1}{8}(y)^{(X+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$-\frac{1}{8}(y)^{(X-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}-\frac{1}{8}(y)^{(X-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$-\frac{1}{8}(y)^{(X+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{6}})}-\frac{1}{8}(y)^{(X+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(z)^{(X-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{2}})}+\frac{1}{8}(z)^{(X-i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-i\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+\frac{1}{8}(z)^{(X+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{2}})}+\frac{1}{8}(z)^{(X+i\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+i\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+i\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+\frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{8}(\zeta)^{(X-\iota\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-\iota\sqrt{\frac{b}{2}},\,Z+\iota\sqrt{\frac{c}{2}})}-\frac{1}{8}(\zeta)^{(X-\iota\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+\iota\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+\iota\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$-\frac{1}{8}(\zeta)^{(X+\iota\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-\iota\sqrt{\frac{b}{2}},\,Z-\iota\sqrt{\frac{c}{2}})}-\frac{1}{8}(\zeta)^{(X+\iota\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+\iota\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-\iota\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

On aura de même, pour les valeurs de y & de ζ, deux autres formules que je nommerai (Q) & (R), & que je m'abſtiens de rapporter, puiſque on peut les déduire de la précédente en changeant ſimplément, x, (x), X en y, (y), Y pour la formule (Q), & en ζ, (ζ), Z pour la formule (R), & réciproquement.

Ce ſont là les valeurs de x, y, ζ dans l'hipothèſe que (x'), (y'), &(ζ') ſoient nulles. Suppoſons maintenant que ces quantités aient une valeur, mais qu'en même tems les (x), (y), & (ζ) ſoient nulles; il eſt clair que dans l'équation (D) on aura, à la place du terme $\text{cof.}\, t\sqrt{-ck}\int[(x)L+(y)M+(\zeta)N]\,dXdYdZ$, l'autre terme $\frac{\text{ſin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}}\int[(x')L+(y')M+(\zeta')N]\,dXdYdZ$;

Or ſi l'on fait attention que $\text{ſin.}\,\frac{t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}}=\int\text{cof.}\, t\sqrt{-ck}dt$, il ne ſera pas difficile d'appercevoir que les expreſſions de L, M, & N qui ſe trouveront en faiſant diſparoître la la lettre k ne ſeront que les intégrales de celles qu'on a trouvé plus haut, priſes en regardant t ſeul comme variable. Ainſi un terme quelconque de la transformée ſera repréſenté par $\int[(x')\int L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}\,dt]\,dXdYdZ$; or il eſt viſible que l'intégration ſuivant t, dans l'expreſſion $\int L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}\,dt$, ſe réduit à trois intégrations, ſuivant X, Y, Z; d'où il s'enſuit que l'intégrale de $[(x')\int L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}\,dt]\,dXdYdZ$ pourra ſe transformer, par des intégrations par parties, en celle-ci $-\int[L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}\int(x')\,dt]\,dXdYdZ$, qui pourra encore ſe mettre ſous cette autre forme $\int[L^{(X,\,Y,\,Z)}\int(x')^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}\,dt]\,dXdYdZ$,

où

où l'intégrale de $(x')^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)}$ devra être prise en faisant varier t dans les valeurs $X-pt$, $Y-qt$, $Z-rt$ des coordonnées de (x').

Faisant des observations & des réductions semblables sur tous les autres termes, & comparant ensuite les quantités L, M, & N entr'elles, on trouvera pour x, y, z des formules qui ne différeront de celles qu'on a trouvé ci-dessus, qu'en ce qu'à la place des quantités (x), (y), (z) il y aura les quantités intégrales $\int(x')\,dt$, $\int(y')\,dt$, $\int(z')\,dt$.

Il est maintenant facile de voir, en examinant l'équation (D), que les deux solutions particulières, qui viennent d'être trouvées, renferment la solution générale, & qu'il ne faudra qu'ajouter ensemble les expressions trouvées de x, y, z dans les cas, où (x'), (y'), (z'), ou (x), (y), (z) sont nulles, pour avoir les expressions completes pour le cas où ces quantités sont toutes réelles.

De plus, comme l'équation (E) n'est que la différentielle de l'équation (D) prise en variant t seul, on aura tout d'un coup les valeurs de vitesses, en différentiant les formules qu'on vient de trouver pour les valeurs des espaces x, y, z; il viendra donc

$$(P') \quad x' = (x')^{(X,\ Y,\ Z)}$$

$$- \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\ Y-\imath\sqrt{\frac{c}{a}},\ Z-\imath\sqrt{\frac{c}{a}})}$$

$$- \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\ Y+\imath\sqrt{\frac{c}{a}},\ Z-\imath\sqrt{\frac{c}{a}})}$$

$$- \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\ Y-\imath\sqrt{\frac{c}{a}},\ Z+\imath\sqrt{\frac{c}{a}})}$$

$$- \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\ Y+\imath\sqrt{\frac{c}{a}},\ Z+\imath\sqrt{\frac{c}{a}})}$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X-\imath\sqrt{c},\ Y-\imath\sqrt{\frac{c}{a}},\ Z-\imath\sqrt{\frac{c}{a}})}$$

$$+ \frac{1}{8}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X-\iota\sqrt{\epsilon},Y+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}},Z-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X-\iota\sqrt{\epsilon},Y-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}},Z+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X-\iota\sqrt{\epsilon},Y+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}},Z+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X+\iota\sqrt{\epsilon},Y-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}},Z-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X+\iota\sqrt{\epsilon},Y+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}},Z-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X+\iota\sqrt{\epsilon},Y-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}},Z+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X+\iota\sqrt{\epsilon},Y+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}},Z+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Z-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Z+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Z-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Z+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Z-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Z+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Z-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Z+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d\cdot(z)}{dt}\right](X-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}},Z-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d\cdot(z)}{dt}\right](X-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}},Y+\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{6}},Z-\iota\sqrt{\frac{\epsilon}{2}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(\zeta')+\frac{d\cdot(\zeta)}{dt}\right](x+\iota\sqrt{\tfrac{c}{2}},r-\iota\sqrt{\tfrac{c}{6}},z+\iota\sqrt{\tfrac{c}{3}})$$

$$+\frac{1}{8}\left[(\zeta')+\frac{d\cdot(\zeta)}{dt}\right](x+\iota\sqrt{\tfrac{c}{2}},r+\iota\sqrt{\tfrac{c}{6}},z+\iota\sqrt{\tfrac{c}{3}})$$

$$-\frac{1}{8}\left[(\zeta')+\frac{d\cdot(\zeta)}{dt}\right](x-\iota\sqrt{\tfrac{c}{2}},r-\iota\sqrt{\tfrac{c}{6}},z+\iota\sqrt{\tfrac{c}{3}})$$

$$-\frac{1}{8}\left[(\zeta')+\frac{d\cdot(\zeta)}{dt}\right](x-\iota\sqrt{\tfrac{c}{2}},r+\iota\sqrt{\tfrac{c}{6}},z+\iota\sqrt{\tfrac{c}{3}})$$

$$-\frac{1}{8}\left[(\zeta')+\frac{d\cdot(\zeta)}{dt}\right](x+\iota\sqrt{\tfrac{c}{2}},r-\iota\sqrt{\tfrac{c}{6}},z-\iota\sqrt{\tfrac{c}{3}})$$

$$-\frac{1}{8}\left[(\zeta)+\frac{d\cdot(\zeta)}{dt}\right](x+\iota\sqrt{\tfrac{c}{2}},r+\iota\sqrt{\tfrac{c}{6}},z-\iota\sqrt{\tfrac{c}{3}}).$$

Les valeurs de y' & de ζ' se trouveront de même en substituant dans cette formule à la place de x', (x), (x'), X, leurs correspondantes y', (y), (y'), Y, ou ζ', (ζ), (ζ'), Z, & réciproquement.

48. Voila des formules très-générales, par lesquelles, connoissant dans un instant quelconque le mouvement de toutes les parties du fluide, on pourra déterminer à très-peu-près leur mouvement dans les instans suivans, au moins pendant un intervalle de tems fort court. Or, si après ce tems on recommence le calcul, en substituant à la place de (x), (y), (ζ), (x'), (y'), (ζ') les valeurs trouvées de x, y, ζ, x', y', ζ', on en tirera des nouvelles valeurs de x, y, ζ, x', y', ζ' qui serviront pour un second intervalle de tems égal au premier; & opérant ainsi de suite on pourra trouver les mouvemens du fluide par tel espace de tems qu'on voudra; mais il faut avoüer que cette méthode ne sera guere pratiquable pour un tems assès long; car, nos formules n'étant qu'approchées, l'inexactitude de chaque résultat influira nécessairement sur tous les résultats suivans, & par conséquent, plus le nombre des opérations sera grand, plus aussi on risquera de s'éloigner de la vérité.

Consé-

Conſéquences qui réſultent des formules précédentes par rapport à la propagation du Son.

49. Imaginons d'abord qu'un corps ſonore n'ébranle qu'une ſeule particule d'air, dont la poſition ſoit déterminée par les coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, & voïons comment & par quels dégrès cet ébranlement unique ſe propagera au loin dans toute la maſſe de l'air pendant un tems quelconque t fort court.

Il eſt d'abord évident que dans les équations (P), (Q), (R), (P'), (Q'), (R') il faudra regarder comme nulles toutes les quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z'), qui auront un autre expoſant que $([X], [Y], [Z])$; or ſoit en général l'expoſant de chacune de ces quantités exprimé par $(X - pt, Y - qt, Z - rt)$, il ſuit de ce qu'on vient de dire, que les valeurs de x, y, z, x', y', z' ſeront auſſi nulles pour toutes les particules, dont la poſition ne ſera point déterminée par des coordonnées X, Y, Z, telles que $X - pt = [X]$, $Y - pt = [Y]$, $Z - qt = [Z]$, ſavoir que $X = [X] + pt$, $Y = [Y] + qt$, $Z = [Z] + rt$; ſi donc on donne ſucceſſivément à p, q, r, toutes leurs valeurs particuliéres conformément à nos formules, on aura autant de valeurs de X, Y, Z, qui détermineront la poſition de toutes les particules de l'air qui auront quelque mouvement au bout du tems t.

Suppoſons p, q, r donnés, & faiſons varier t; il eſt clair que les coordonnées X, Y, Z ſeront à une ligne droite qui paſſera par le point, auquel répondent les coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, & qui fera avec les lignes X, Y, Z des angles dont les coſinus ſeront $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, $\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, $\frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$; d'où il s'enſuit qu'en donnant à p, q, r des valeurs différentes,

on aura auſſi des droites de différente poſition, mais qui s' entrecouperont toutes dans un même point, & qu'on pourra par conſéquent regarder comme autant de rayons ſonores, excités par l' ébranlement donné de la particule qui eſt à leur centre.

Ces rayons croîtront uniformément avec le tems, de ſorte qu'au bout d'un tems quelconque t leur longueur ſera généralement exprimée par $t\sqrt{c}\,(p^2+q^2+r^2)$; l' on aura donc, pour la viteſſe de la propagation du Son dans chacun d'eux, la formule $\sqrt{c}\,(p^2+q^2+r^2)$, dont la valeur ſe connoîtra en ſubſtituant au lieu de p, q, r leurs valeurs particuliéres. Par ces ſubſtitutions on aura les trois quantités ſuivantes, $\sqrt{c}\,(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}) = \sqrt{\frac{c}{3}}$, $\sqrt{c}\,(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}) = 2\sqrt{\frac{c}{3}}$, $\sqrt{c}\,(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}) = \sqrt{\frac{3c}{6}}$; qui conſtitueront pour ainſi dire autant d' eſpèces différentes de rayons ſonores.

C' eſt une choſe digne de remarque que la plus grande viteſſe $2\sqrt{\frac{c}{3}}$ approche beaucoup de celle qu'on trouve par l' expérience; car $\sqrt{c}$ étant environ $= 979$ piés, & $c = 958441$, on aura $\sqrt{\frac{c}{3}} = 565$, & par conſéquent $2\sqrt{\frac{c}{3}} = 1130$, qui eſt à très-peu-près le nombre de pieds que le Son parcourt dans une ſeconde, ſelon les expériences moïennes. Cependant il ne paroit pas que ce réſultat ſoit encore capable de mettre la Théorie d' accord avec l' expérience ſur la viteſſe de la propagation du Son. Voici les raiſons qui m' oblige à ſuſpendre mon jugement la-deſſus. 1° Nos formules ne ſont qu'approchées, & ne peuvent avoir lieu que pendant un tems aſsès court, après lequel chaque particule mobile doit être regardée, comme un nouveau centre de rayons ſonores; 2° La poſition de chaque rayon n' eſt pas fixe, puiſque elle dépand de celles des trois axes principaux, laquelle eſt abſolument arbitraire; d' où il ſuit qu'en changeant la poſition des axes, les rayons qui avoient aupatavant une viteſſe donnée,

pourront

pourront prendre la place de ceux qui avoient des viteſſes différentes ; ce qui paroit renfermer une eſpèce de contradiction, puiſque une même particule de fluide pourroit en ce cas avoir ou ne pas avoir du mouvement. Cet inconvénient, qui vient ſans doute de ce que nos formules ne renferment pas tous les termes néceſſaires, ſera auſſi attaché à toutes les autres formules qu'on trouvera par approximation ; d'où il réſulte que, juſqu'à ce qu'on ait trouvé des formules tout-à-fait exactes & rigoureuſes, on ne ſera pas en état de prononcer ſur le point dont il s'agit ; 3° Nous avons trouvé dans les deux hypothèſes du *Chap.* III. la viteſſe du Son $= \sqrt{c}$; & cette même valeur peut ſe trouver auſſi par les formules de ce *Chap.* en conſidérant la plus grande viteſſe des rayons eſtimée ſuivant la direction de chacun des trois axes ; ce qui paroit mieux quadrer avec la nature particuliére de ces formules.

5o. Nous n'avons encore conſidéré que l'effet qui réſulte de l'ébranlement d'une ſeule particule d'air ; ſuppoſons maintenant, que tant des particules qu'on voudra ſoient ébranlées d'une maniére quelconque dans le premier inſtant du tems t ; on trouvera, en raiſonnant ſur nos formules de la même maniére qu'on a fait ci-deſſus, que chacun des ébranlemens primitifs, excitera dans le fluide environnant les mêmes rayons ſonores, que s'il étoit ſeul ; de ſorte que les particules d'air qui ſe trouveront dans la rencontre de pluſieurs rayons auront un mouvement compoſé de tous les mouvemens, qui dépandront de chaque ondulation particuliére. C'eſt ce qui nous fournit une explication complete & rigoureuſe de la maniére, dont pluſieurs ſons différens peuvent coéxiſter & ſe repandre dans une même maſſe d'air, ſans ſe nuire mutuellement les uns aux autres. *Voïés l'Art.* 63. *des Réch. préc.*

Au reſte, comme chaque particule d'air ébranlée devient

elle

elle même un centre de rayons ſonores, il eſt évident que le Son doit ſe repandre également en tous ſens; ce qui eſt auſſi un des principaux phénomènes de ſa propagation.

51. Quoique il ne ſoit pas néceſſaire de connoître la nature particuliére de chaque ébranlement, il eſt cependant bon de faire attention à la différence qui ſe trouve entre les ébranlemens primitifs & dérivatifs, par rapport à leur propagation. Suppoſons pour cela qu'aïant déduit de nos formules les valeurs de x, y, z, &c. pour un tems quelconque déſigné par (t), on les ſubſtitue dans les mêmes formules à la place de (x), (y), (z) &c. pour trouver les valeurs correſpondantes de x, y, z &c. pour un ſecond intervalle, de tems marqué par t; & ſoit par exemple $\alpha\,[(x) + \int(x')\,dt]^{(X+p(t),\,Y+q(t),\,Z+r(t))}$ un terme quelconque de la valeur de x, & $\alpha\,[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X+p(t),\,Y+q(t),\,Z+r(t))}$ le terme correſpondant de la valeur de x', leſquels doivent être ſubſtitués au lieu de (x), & de (x') dans les termes de la forme de $\alpha\,[(x) + \int(x')\,dt]^{(X+pt,\,+Yqt,\,Z+rt)}$ pour la valeur de x, & dans ceux de la forme de $\alpha\,[(x') + \frac{d\,(x)}{dt}]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$ pour la valeur de x'. On remarquera d'abord que dans nos formules un terme quelconque, dont l'expoſant eſt $(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)$ eſt toujours accompagné d'un autre terme exprimé de la même maniére, mais avec l'expoſant $(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)$; on ſait de plus, par ce qui a été dit ci-deſſus que les termes

$$[(x) + \int(x')\,dt]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)},$$
$$[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$$

marquent la propagation des ébranlemens (x), (x') ſuivant

vant une ligne qui fait, avec les trois axes principaux des angles, dont les cosinus sont $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, $\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, $\frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, d'où il s'ensuit que les termes

$$[(x)+\int(x')\,dt]^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)},$$

$$[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}$$ dénoteront

la propagation des mêmes ébranlemens (x), & (x') dans la même ligne prolongée du côté opposé. Or, cela posé, je dis, que si Cc (*fig.* 12.) représente un rayon de la propagation d'un ébranlement primitif excité en C, la propagation de l'ébranlement dérivatif qui est en c sera nulle suivant la direction cC opposée à celle de son ébranlement primitif. Pour le prouver, il n'y a qu'à faire voir qu'en substituant

$$\alpha[(x)+\int(x')\,dt]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$$ au lieu de (x)

& $\alpha[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$ au lieu de (x')

dans les termes

$$[(x)+\int(x')\,dt]^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}$$

$$[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}$$ ces termes

deviendront nuls. Or, comme dans les exposans $X-pt$, $Y-qt$, $Z-rt$, le tems t est négatif par rapport aux coordonnées X, Y, Z, il est visible, que l'intégrale $\int(x)\,dt$, & la différentielle $\frac{d\cdot(x)}{dt}$ seront aussi nécessairement négatives ; d'où l'on aura par la substitution $[(x)-\int(x')\,dt]=\alpha[(x)+\int(x')\,dt-\int(x')\,dt-(x)]=0$, & de même $[(x')-\frac{d\cdot(x)}{dt}]=\alpha[(x)+\frac{d\cdot(x)}{dt}-\frac{d\cdot(x)}{dt}-x']=0$, donc &c.

Au reſte la remarque que nous venons de faire ſur les formules générales de ce Chap., eſt entiérement analogue à celle qu'on a déja fait ſur les formules particuliéres du Chap. III. dans l'art. 16., remarque dont nous ſommes rédévables à M. Euler, & qui eſt d'une grande importance dans la Théorie de la propagation du Son.

52. Il ne nous reſte plus qu'à examiner le changement qui doit arriver aux rayons ſonores par la rencontre d'un obſtacle quelconque, qui s'oppoſe entiérement, ou en partie au mouvement des particules contigues de l'air. Pour cela il n'y a qu'à chercher quelle devra être la poſition d'une particule mobile quelconque, lorſque les coordonnées $X = [X] + pt$, $Y = [Y] + qt$, $Z = [Z] + rt$ tomberont au delà de l'obſtacle immobile. Or en examinant les calculs de *l'Art.* 47. on voit que les valeurs des X, Y, Z pour une particule quelconque mobile ſont les mêmes que celles qui conſtituent les fonctions $L^{(X, Y, Z)}$, $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$; donc tout ſe réduit à examiner la nature de ces fonctions, & à voir de quelle maniére il faudra les transformer, afin que les quantités X, Y, Z ne ſurpaſſent jamais des valeurs données.

Imaginons donc que la maſſe de l'air ſoit interrompuë de quelque côté, & comme terminée par une eſpèce de parois immobile de figure donnée; il eſt conſtant par ce qui a été enſeigné dans *l'Art.* 45. que les expreſſions intégrales à deux ſeules changeantes, que nous avons traité comme nulles dans *l'Art. cité*, devront diſparoître par elles mêmes, en tant qu'elles ſe rapporteront à un point quelconque de la figure propoſée. Rapellons-nous ces expreſſions négligées dans les calculs précédens, & conſidérons d'abord celles qui ont le ſigne $-$; je dis que leur ſomme eſt toujours évanoüiſſante, quelle que ſoit la figure à quelle il faille les rapporter. Pour le prouver ajoutons-les enſemble; on aura

$\int (dL$

$\int\left(\frac{dL}{dX}+\frac{dM}{dY}+\frac{dN}{dZ}\right)\times(x\,dY\,dZ+y\,dY\,dZ+z\,dX\,dY)$.

Or ſoit le rapport entre les trois coordonnées X, Y, Z exprimé par l'équation $dZ = P\,dX + Q\,dY$; il eſt aiſé de prouver qu'on peut ramener tous les termes de l'expreſſion précédente à la variabilité des ſeules coordonnées X, Y, en ſubſtituant au lieu de dZ, $P\,dX$ dans le produit $dY\,dZ$, & $Q\,dY$ dans le produit $dX\,dZ$; d'où l'on aura la transformée $\int\left(\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dY}+\frac{dN}{dZ}\right)\times(xP+yQ+z)\,dX\,dY$ qu'il faudra maintenant intégrer en faiſant varier X & Y l'une après l'autre. Mais x, y, z dénotant les eſpaces parcourus par une même particule ſuivant les directions des trois coordonnées X, Y, Z, il n'eſt pas difficile de voir que $\frac{xP+yQ+z}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$ dénotera l'eſpace que cette même particule décrira ſuivant une direction perpendiculaire à la ſurface dont l'équation eſt $dZ = P\,dX + Q\,dX$; or il eſt clair, que dans notre cas, cet eſpace doit être nul, puiſque le mouvement eſt entiérement arrêté ſuivant la direction perpendiculaire à chaque point de la paroi immobile; donc on aura $\frac{xP+yQ+z}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}} = 0$; & par conſéquent $xP + yQ + z = 0$.

Joignant enſemble les autres formules qui ont le ſigne $+$; on aura l'expreſſion $\int\left(\frac{dx}{dX}+\frac{dY}{dY}+\frac{dZ}{dZ}\right)\times(L\,dY\,dZ + M\,dX\,dZ + N\,dX\,dY)$ qui doit auſſi être $= 0$, en tant qu'elle ſe rapporte à chacun des points de la ſurface exprimée par $dZ = P\,dX + Q\,dY$. Or le facteur $L\,dY\,dZ + M\,dX\,dZ + N\,dX\,dY$ ſe réduira, de la même façon que ci-deſſus, à $(LP + MQ + N)\,dX\,dY$, d'où l'on tirera l'équation $LP + MQ + N = 0$, qui devra avoir lieu pour tous les points de la ſurface propoſée; & cette équa-

tion renfermera en général les conditions que doivent avoir les valeurs de L, M, N. (*Voïés ci-deſſus art.* 45.).

Suppoſons maintenant, pour ſimplifier les choſes, $P = 0$ & $Q = 0$, de ſorte que la paroi immobile ſoit un plan perpendiculaire à l'axe des Z; l'équation trouvée ſe réduira à $N = 0$; ou bien, ſi on veut que le plan donné ſoit perpendiculaire à l'axe des X, & que ſa diſtance au point de l'origine des abſciſſes ſoit $= a$, on aura $L = 0$, X étant $= a$, & Y & Z étant quelconques; ce qui s'exprimera à notre maniére par $L^{(a, Y, Z)} = 0$. Or, ſi dans l'expreſſion générale $L^{(X, Y, Z)}$ on ſuppoſe que X ſurpaſſe a d'une quantité infiniment petite u, de ſorte que $X = a + u$, on aura $L^{(X, Y, Z)} = L^{(a+u, Y, Z)} = L^{(a, Y, Z)} + u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$ à très-peu-près, $= u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$; de même, ſi on ſuppoſe u négative, on aura $L^{(a-u, Y, Z)} = -u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$; d'où je tire $L^{(a-u, Y, Z)} = -L^{(a-u, Y, Z)}$; & remettant pour u ſa valeur $X - a$, $L^{(X, Y, Z)} = -L^{(2a-X, Y, Z)}$.

Maintenant, comme les fonctions $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$ doivent avoir un certain rapport avec la fonction $L^{(X, Y, Z)}$, en vertu des équations (A), (B), (C), il eſt clair que la même condition de $L^{(a, Y, Z)} = 0$ ſervira auſſi à trouver les transformations qui conviennent aux fonctions M & N, lorſque X eſt ſuppoſé plus grand que a; pour y parvenir je reprens les équations mentionnées, & comparant la première, différentiée ſuivant la variable Y & diviſée par dY, à la ſeconde, différentiée ſuivant la variable X & diviſée par dX, je trouve $\frac{dL}{dY} = \frac{dM}{dX}$; & de même comparant la première, différentiée ſuivant Z, & diviſée par dZ à la troiſiéme, différentiée ſuivant X, & diviſée par dX, j'ai

$\frac{dL}{dZ}$

$\frac{dL}{dZ} = \frac{dN}{dX}$; posons dans ces deux équations $X = a$, de sorte que $\frac{dL^{(a,Y,Z)}}{dY} = \frac{dM^{(a,Y,Z)}}{dX}$, & $\frac{dL^{(a,Y,Z)}}{dZ} = \frac{dN^{(a,Y,Z)}}{dX}$; or aïant en général $L^{(a,Y,Z)} = 0$, on aura auſſi $\frac{dL^{(a,Y,Z)}}{dY} = 0$, & $\frac{dL^{(a,Y,Z)}}{dZ} = 0$; donc, $\frac{dM^{(a,Y,Z)}}{dX} = 0$, & $\frac{dN^{(a,Y,Z)}}{dX} = 0$; Suppoſons maintenant dans les fonctions indéterminées $M^{(X,Y,Z)}$, $N^{(X,Y,Z)}$, $X = a + u$, & développons-les, en pouſſant les ſeries juſqu'aux infinimens petits du ſecond ordre; on aura $M^{(a+u,Y,Z)} = M^{(a,Y,Z)} + u\frac{d \cdot M^{(a,Y,Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2 \cdot M^{(a,Y,Z)}}{dX^2}$, & $N^{(a+u,Y,Z)} = N^{(a,Y,Z)} + u\frac{d \cdot N^{(a,Y,Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2 N^{(a,Y,Z)}}{dX^2}$; & de même, en prenant u négativement, $M^{(a-u,Y,Z)} = M^{(a,Y,Z)} - u\frac{dM^{(a,Y,Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2 M^{(a,Y,Z)}}{dX^2}$, & $N^{(a-u,Y,Z)} = N^{(a,Y,Z)} - u\frac{d \cdot N^{(a,Y,Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2 N^{(a,Y,Z)}}{dX^2}$; d'où l'on déduit, à cauſe de $\frac{dM^{(a,Y,Z)}}{dX} = 0$, & $\frac{dN^{(a,Y,Z)}}{dX} = 0$ par hipothèſe, $M^{(a+u,Y,Z)} = M^{(a-u,Y,Z)}$, & $N^{(a+u,Y,Z)} = N^{(a-u,Y,Z)}$, ou bien, reſtituant pour u ſa valeur $X - a$,

$$M^{(X,Y,Z)} = M^{(2a-X,Y,Z)}$$
$$N^{(X,Y,Z)} = N^{(2a-X,Y,Z)}$$

Soient repriſes maintenant les formules (D), (E), & ſuppoſant que X ſurpaſſe a d'une quantité infiniment petite, on commencera par changer l'expreſſion $L^{(X,Y,Z)}$ des termes xL, $x'L$, ou ce qui eſt la même choſe, des termes $xL^{(X,Y,Z)}$, $x'L^{(X,Y,Z)}$ en $-L^{(2a-X,Y,Z)}$, lorſque

X deviendra plus grand que a, & l'on aura par conſéquent ces termes transformés en $-x\,L^{(2a-X,Y,Z)}$, $-x'\,L^{(2a-X,Y,Z)}$, ſur leſquels on opérera comme auparavant, pour en tirer les valeurs de x & x'. Or, puiſque les coordonnées qui répondent à x & x' ſont les mêmes, que celles qui entrent dans l'expreſſion de L, il eſt clair que, ſans autre opération, il ſuffira de changer la valeur X de l'abſciſſe de x & x' en $2a - X$, en rendant en même tems ces quantités x & x' négatives. On changera de même les expreſſions $M^{(X,Y,Z)}$, $N^{(X,Y,Z)}$ qui entrent dans les termes My, My', & $N\zeta$, $N\zeta'$ des mêmes formules (D), (E), en $M^{(2a-X,Y,Z)}$ & $N^{(2a-X,Y,Z)}$, & par un raiſonnement ſemblable au précédent, on trouvera que l'abſciſſe X en tant qu'elle répond aux autres quantités y, y', ζ, ζ' deviendra de même $2a - X$, mais ſans que la valeur de ces quantités ſoit changée.

On conclura donc pour notre cas, que, lorſque le tems t ſera tel, que l'abſciſſe $[X] + pt$ ſurpaſſera a, il faudra mettre à ſa place l'abſciſſe $2a - [X] - pt$, & faire en même tems l'eſpace x négatif, laiſſant les mêmes les deux coordonnées $[Y] + pt$, & $[Z] + qt$, & les deux autres eſpaces y, ζ.

Voici maintenant le changement qu'il en réſultera dans les rayons ſonores. Que CA (*fig.* 13.) repréſente l'axe des X, qui eſt le même que celui des $[X]$, & qui rencontre perpendiculairement le plan inébranlable AB; que C ſoit un centre de rayons ſonores déterminé par les trois coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$; & que CD ſoit un de ces rayons quelconque déterminé par les coordonnées $[X] + pt$, $[Y] + qt$, $[Z] + rt$. Suppoſons maintenant que t ſoit augmenté en ſorte, que $[X] + pt$ ſurpaſſe a, c'eſt-à-dire que pt ſurpaſſe CA, & ſoit par exemple $= CA'$, le point A' tombant derriére l'obſtacle immobile AB; il faudra, ſuivant ce que nous venons d'enſeigner, chan-

ger

ger la valeur de $[X] + pt$ en $2a - [X] - pt$; ce qui donnera, en ſuppoſant $CA = \alpha$ & par conſéquent $a = [X] + \alpha$, $[X] + 2\alpha - pt$ au lieu de $[X] + pt$; ou bien, poſant $AA' = \theta$ & par conſéquent $pt = \alpha + \theta$, $[X] + \alpha - \theta$ au lieu de $[X] + pt$, ſavoir de $[X] + \alpha + \theta$; d'où l'on voit que le point A' ſera tranſporté en A, les diſtances AA' & $A'A$ au plan AB étant égales de part & d'autre; donc, comme les deux autres coordonnées perpendiculaires à l'axe CA demeurent les mêmes, le rayon CD ſera continué du côté CA dans la direction de la droite DE, dont la poſition devra être telle qu'elle ſe trouve dans le plan des deux lignes CD, CA, & qu'elle faſſe de plus avec le plan BA l'angle BDE égal à l'angle CDA. Le rayon CD ſera donc réfléchi par le plan BA; en ſorte que l'angle de réflexion ſoit égal à l'angle d'incidence, tout de même que il arrive à un corps parfaitement élaſtique.

Voilà donc la réflexion du Son, déduite de ſes vrais principes, & prouvée d'une maniére rigoureuſe & exacte, ce que perſonne n'avoit encore fait. *Voïés ce que j'ai dit ſur ce ſujet Art. 61. des Rech. préc.*

Au reſte, ſi nous n'avons conſidéré qu'une ſurface plane, ce n'a été que pour rendre notre calcul moins embarraſſant; car il n'auroit pas été difficile de l'appliquer auſſi à des ſurfaces courbes d'une nature quelconque; mais, comme les rayons ſonores ſe multiplient continuellement, & ſe repandent en tout ſens, comme on l'a fait voir (*Art.* 50.), il ſeroit aſsès inutile de déterminer les loix de la réflexion de chaque rayon à la rencontre d'un obſtacle de figure quelconque. Il ſuffit pour l'explication des *Echos*, d'avoir prouvé que cette réflexion doit toujours avoir lieu, lorſque l'air eſt appuïé ſur un obſtacle quelconque inébranlable.

SCOLIE

Scolie I.

53. Il eſt viſible que, dans les formules (P), (Q), (R), (P'), (Q'), (R'), on peut regarder les expreſſions $(x)^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}$ &c. comme des fonctions indéterminées de $X+pt$, $Y+qt$, $Z+rt$; de ſorte qu'en ſubſtituant pour (x), (x'), (y), (y'), (z), (z') des fonctions de différente nature, & compoſées des mêmes variables qui conſtituent l'expoſant de chacune des quantités (x), (x') &c., on aura les valeurs de x, x', y &c. données en fonctions indéterminées, ainſi que M. D'Alembert l'a pratiqué le premier dans la Théorie des vibrations des cordes, & ailleurs.

Au reſte pour démontrer que ces valeurs de x, y, z ſatisfont aux trois équations de *l'Art.* 10., il faudra néceſſairement regarder t comme infiniment petit, & développer les fonctions indéterminées comme on l'a pratiqué à l'égard des fonctions L, M, N (*Art.* 47. *ci-deſſus*), en négligeant tous les termes qui ſeront multipliés par des puiſſances de t plus hautes que la quatriéme.

Scolie II.

54. Si on vouloit ſe borner à chercher les valeurs de x, y, z par les ſeries, on y parviendroit fort aiſément par les principes de *l'Art.* 47. Car développant en ſuites infinies les expreſſions cof. $t\sqrt{-ck}$, & ſin. $t\sqrt{-ck}$ de l'équation (D), & faiſant enſuite évanoüir toutes les puiſſances de k, par les transformations enſeignées dans le même *Art.*, on obtiendra une équation qui ne renfermera que les fonctions inconnues L, M, N avec leurs différences; or ces différences pourront toujours ſe réduire aux quantités finies L, M, N par les opérations connues des inté-

grations

grations par parties. Car, soit par exemple $\frac{1}{2}\, t^2 c f(x) \frac{d^2 L}{dX^2} dX dY dZ$ un terme quelconque de l'équation (D), transformée comme nous venons de la dire, ce terme se réduira, en négligeant toujours les intégrales à deux seules changeantes, à $\frac{1}{2}\, t^2 c \int \frac{d^2(x)}{dX^2} L\, dX dY dZ$, & généralement il suffira d'ôter les différentiations aux quantités L, M, N, & de les appliquer aux quantités (x), (y), (ζ), (x'), (y'), (ζ'), par lesquelles celles-là sont multipliées. Cela fait, comme l'équation ne renfermera plus que les fonctions finies L, M, N, qui, à cause de la quantité k qu'elles contiennent, ne doivent point entrer dans les valeurs de x, y, ζ, on trouvera ces valeurs, en comparant ensemble tous les termes qui seront multipliés séparément par L, M, N. On aura donc par là

$$x = (x) + t(x') + \frac{1}{2}\, t^2 c \left[\frac{d^2(x)}{dX^2} + \frac{d^2(y)}{dX dY} + \frac{d^2(\zeta)}{dX dZ} \right] + \&c.$$

$$y = (y) + t(y') + \quad \&c.$$

$$\zeta = (\zeta) + t(\zeta') + \quad \&c.$$

où les quantités (x), (y), (ζ), (x'), (y'), (ζ') devront être regardées comme des fonctions indéterminées des trois variables X, Y, Z, pour qu'on puisse avoir les valeurs des différences $\frac{d^2(x)}{dX^2}$, $\frac{d^2(y)}{dX dY}$ &c. Or dans le cas où t est supposé infiniment petit, si on néglige les termes multipliés par des puissances de t plus hautes que la quatriéme, & qu'on pratique ensuite sur les fonctions (x), (y), &c. des réductions analogues à celles qui ont été pratiquées sur les fonctions L, M, N dans le calcul de *l'Art.* 47., il sera aisé de réduire les expressions de x, y, ζ à des fonctions de $X + pt$, $Y + qt$, $Z + rt$, comme dans le Scolie précédent, ce qui sera une preuve de la justesse de nos calculs.

Au

Au reſte la méthode, que nous n' avons fait qu'indiquer dans ce Scolie, eſt générale & peut auſſi être appliquée à la réſolution d'une infinité d' autres équations de la nature de celles que nous avons examiné dans tout le cours des Recherches précédentes. Mais on trouvera toujours des ſeries compoſées de puiſſances croiſſantes de t, & qui, par conſéquent, ne ſeront bonnes que tant t aura des valeurs fort-petites.

§. III.

Conjectures ſur la loi de l'élaſticité des particules de l'air.

55. Nous avons vu que la viteſſe du Son, ſuivant la Théorie, eſt exprimée par $\sqrt{c} = \frac{\sqrt{2hE}}{T^2D}$, & nous avons vu auſſi qu'elle différe de la véritable d'environ 163 pieds par ſeconde, quantité qui ne peut raiſonnablement être négligée ; comment donc concilier ſur ce point la Théorie & l' Expérience?

L'expreſſion $\frac{\sqrt{2hE}}{T^2D}$ eſt fondée ſur l' hypothèſe ordinaire que l' élaſticité des parties de l'air ſoit exactement proportionnelle à leur denſité ; mais ne pourroit-on pas ſuppoſer que l' élaſticité variât dans uue autre raiſon peu différente de celle de la denſité ſimple. Si on vouloit en général ſuppoſer E proportionel à φD, comme dans *l'Art.* 11., il n' y auroit qu'à mettre dans nos calculs $E\varphi' D$ au lieu de E tout le reſte demeurant le même ; ce qui ne produiroit d' autre différence dans les réſultats, ſi non que la viteſſe du Son ſeroit augmentée dans la raiſon de $\sqrt{\varphi' D} : 1$.

Soit l' élaſticité proportionnelle à une puiſſance quelconque m de la denſité, ce qui paroit le cas le plus naturel ;

on

on aura $\varphi D = D^m$ & $\varphi' D = m D^{m-1}$; d'où, en posant $D = 1$, l'on tire la viteſſe du Son $= \sqrt{m} \times \sqrt{c} = 979\sqrt{m}$ piés par ſeconde; par conſéquent, en prenant 1142 piés par ſeconde pour l'expreſſion véritable de cette viteſſe, il faudra que $979\sqrt{m} = 1142$, ce qui donnera $\sqrt{m} = \frac{1142}{979}$ & $m = 1 \cdot 3' 6''$ en fractions décimales, ou $m = 1 + \frac{1}{7}$ à très-peu-près. Or, comme l'élaſticité ſe meſure par le poid comprimant, il eſt clair que ſi cette hypothèſe a lieu dans la nature, il faudra que la denſité devenant double, triple, quadruple &c., les poids comprimans croiſſent comme les nombres $2\sqrt[3]{2}$, $3\sqrt[3]{3}$, $4\sqrt[3]{4}$ &c. qui ſurpaſſent les nombres de la progreſſion aritméthique 2, 3, 4 &c. d'environ $\frac{518}{1000}$, $1\frac{326}{1000}$, $1\frac{848}{1000}$.

Ces différences paroiſſent à la vérité trop fortes, pour qu'on puiſſe raiſonablement ſuppoſer qu'elles ayent échappées aux ſavans Phiſiciens, qui ont déterminé par l'expérience les loix de la compreſſion de l'air; auſſi je ne donne l'hypothèſe de l'élaſticité proportionelle à $D^{1+\frac{1}{3}}$, que comme une légére conjecture, & je me contenterai ſeulement de faire obſerver, que l'expérience même paroit juſqu'à un certain point favorable à la ſuppoſition, que l'élaſticité croiſſe dans une raiſon plus grande que la denſité; puiſque on ſait que de très-habiles Phiſiciens ont trouvé que, lorſque la denſité eſt devenue quadruple de la naturelle, l'air ne ſe comprime plus que ſuivant une proportion moindre que celle des poids.

56. Au reſte il eſt clair que ſi l'hypothèſe $P = D$, & en général $P = D^m$ avoit exactement lieu dans la nature, la denſité d'une particule d'air deviendroit nulle, lorſque le poid comprimant ſeroit nul, ce qui paroit renfermer quelque eſpèce de contradiction; ſi donc, pour éviter un pareil inconvénient, on ſuppoſe que le poid comprimant ſoit pro-

portionel à quelque autre fonction φ de la denſité, on ſatisfaira tout-à-la-fois à la Théorie de la propagation du Son, & aux expériences de la compreſſion de l'air, ſi on peut déterminer φ en ſorte que $\varphi' D$ ſoit (en y mettant $D = 1$) $= 1 + \frac{1}{3}$, & qu'en même tems φD ſoit aſsès ſenſiblement proportionel à D, tant que D eſt contenu entre les limites 1 & 4.

CHAPITRE VI.

Reflexions ſur la Théorie des inſtrumens à vent.

57. DAns *l'Art.* 52. *des Rech. préc.* j'ai réduit la Théorie des flutes à celle des oſcillations d'une fibre élaſtique d'air, dont les deux extrémités ſoient fixes, comme dans les cordes ſonores; mais cette ſuppoſition n'eſt pas exacte; car on ſait que l'air renfermé dans le tuïau communique toujours avec l'air extérieur, ou de deux côtés, comme dans toutes les eſpèces de flutes, ou d'un côté ſeulement comme dans les trompettes, les cors de chaſſe, & dans les tuïaux d'orgue bouchés; je vais donc maintenant avoir égard à ces circonſtances.

Conſidérons d'abord des flutes de forme exactement cilindrique, & ſuppoſons que la colonne d'air qui y eſt renfermée ſoit ſoutenue, à ſes deux extrémités, par une force égale au reſſort naturel de l'air extérieur.

Dénotant par ζ les excurſions longitudinales de chaque partie d'air, on aura l'équation $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c\,\frac{d^2\zeta}{dx^2}$; d'où il ſera aiſé de tirer par le Prob. 1. ci-deſſus, les mêmes réſultats que dans *l'Art. cité*, en ſuppoſant, comme on l'a pratiqué partout ailleurs, ζ nul, lorſque $x = 0$, & $x = a$, a étant ici la longueur entière de la flute; mais, dans le

cas

cas que nous nous propoſons d'examiner, ce n'eſt plus cette condition qui doit avoir lieu, mais il faut que l'élaſticité de la premiére & de la derniére particule ſoit la même que l'élaſticité naturelle de l'atmoſphère, ſavoir que $c\left(1-\frac{d\zeta}{dx}\right)=c$, ou bien $\frac{d\zeta}{dx}=0$, lorſque $x=0$, & $x=a$. Or, puiſque dans ces deux points les deux termes $\frac{d\zeta}{dx}M-\zeta\frac{dM}{dx}$ doivent diſparoître d'eux mêmes, par la nature de notre méthode, (*Voïés Prob.* 1.) il faudra que la différentielle $\frac{dM}{dx}$ y devienne nulle; c'eſt pourquoi l'on aura $M=A$ cof. $x\sqrt{-k}$, & $\sqrt{-k}=\frac{y\pi}{2a}$, & par conſéquent les équations

$$\int\zeta \text{ cof. } x\sqrt{-k}\,dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck}\int Z \text{ cof. } x\sqrt{-k}\,dx + \frac{\text{ſin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}}\int V \text{ cof. } x\sqrt{-k}\,dx$$

$$\int u \text{ cof. } x\sqrt{-k}\,dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck}\int V \text{ cof. } x\sqrt{-k}\,dx - \sqrt{-ck} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck}\int Z \text{ cof. } x\sqrt{-k}\,dx.$$

Ces équations fourniront une conſtruction à peu-près ſemblable à celle de *l'Art.* 7.; mais on pourra s'en paſſer, lorſqu'il ne ſera queſtion que de déterminer la durée commune des oſcillations des particules de l'air. Car il ſuffira pour cela de conſidérer, que les équations trouvées demeurent invariables, lorſqu'on augmente la valeur de t d'un multiple quelconque de $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; d'où il s'enſuit qu'au bout de chaque intervalle de tems $\frac{2a}{\sqrt{c}}$ les valeurs de ζ & de u reviendront les mêmes, & que par conſéquent toutes les particules reprendront auſſi la même ſituation, & le même mouvement; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans l'endroit cité des *Rech. préc.*, quoique d'après une autre hipothèſe.

Cela aura lieu en général pour toutes les valeurs poſſibles de ν ; mais ſi on ſuppoſe que les valeurs de ν ſoient renfermées dans la formule particuliére $\nu = m \times \mu$, m étant un nombre entier, poſitif & déterminé, & μ un nombre quelconque entier; il eſt évident, par la nature des ſinus & coſinus, que les valeurs de ζ & de u reviendront les mêmes après chaque intervalle de tems $= \frac{2a}{m\sqrt{c}}$, & qu'ainſi la durée des oſcillations ſe réduira à la moitié, au tiers, au quart &c., ſelon que m ſera exprimé par 2, 3, 4 &c.

Or dans ce cas il eſt clair, que ſi on décrit une courbe, où les abſciſſes étant x, les ordonnées ſoient coſ. $x\sqrt{-k}$, cette courbe aura autant de ventres égaux & ſemblables qu'il y a d'unités dans le nombre m; par conſéquent les quantités Z, V, ζ, u qui ſont multipliées par chacune de ces ordonnées devront former auſſi des courbes de pareille forme; autrement le Problême demeureroit indéterminé, ou plutôt indéterminable, puiſque on pourroit trouver pour ζ & u pluſieurs valeurs différentes, ce qui ſeroit abſurde.

On voit parlà que ce cas répond exactement à celui, que nous avons examiné dans *l'Art.* 49. *des Rech. préc.*, & qu'il contient par conſéquent l'explication des Sons harmoniques.

58. Suppoſons maintenant que la flute ſoit bouchée à l'extrémité oppoſée à l'embouchure; puiſque alors $\zeta = 0$, x étant $= a$, le terme ζdM diſparoîtra de lui même, & le terme reſtant $Md\zeta$ donnera $M = 0$, d'où l'on tirera coſ. $a\sqrt{-k} = 0$, & $\sqrt{-k} = (2\nu + 1)\frac{\pi}{4a}$, ν marquant un nombre quelconque entier poſitif, ou négatif.

Cette valeur ſubſtituée dans les deux équations de *l'Art. préc.*, on verra aiſément que les termes coſ. $t\sqrt{-ck}$, & ſin. $t\sqrt{-ck}$ ne reprendront les mêmes valeurs, que lorſque t ſera

t ſera augmenté de $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; ce qui donnera la durée des oſcillations double de celle qu'on a trouvé dans le cas précédent.

Ce fait eſt confirmé par l'expérience, par laquelle on trouve en effet que les tuïaux bouchés donnent juſtement l'octave du ſon, qu'ils donneroient étant ouverts. Mais il y a plus; comme la durée des oſcillations ne peut s'acourcir à moins que $2\nu + 1$ ne devienne le produit de deux nombres entiers & par conſéquent impairs, il s'enſuit qu'elle ne pourra devenir que le tiers, ou la cinquiéme partie, ou &c. de la durée naturelle $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; d'où il réſulte qu'une flute bouchée, après avoir rendu le ſon fondamental, ira immédiatement à la quinte en haut de ce même ſon, & puis à la double tierce &c. ſans paſſer par aucune des octaves intermédiaires.

Voilà l'explication exacte d'un phénomène aſsès ſingulier, que M. Daniel Bernoulli a le premier fait remarquer dans *l'Art. III. de ſon Mémoire ſur les vibrations des cordes* (*Acad. de Berlin* 1753.); mais dont ni lui, ni aucun autre, que je ſache, n'avoit encore juſqu'ici rendu raiſon.

59. Lorſque les flutes n'ont pas une forme cilindrique, ou en général, lorſqu'il s'agit des trompettes & des cors de chaſſe, il ſemble qu'on pourroit tirer leur Théorie des calculs de *l'Art.* 30. *ci-deſſus*; cependant voici une difficulté.

On ſait, que ces inſtrumens, quelque figure qu'ils aient, donnent toujours, par une ſimple variation d'embouchure, tous les ſons qui répondent aux nombres 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c. & il n'eſt pas difficile de voir, en appliquant aux formules générales de *l'Art.* 28. les remarques des *Art. précéd.*, que cela demande néceſſairement que les valeurs de k ſoient 1, 2, 3, 4 &c. comme dans les flutes cilindriques. Or je ne vois point comment l'expreſſion de M de *l'Art.* 27.

Pour-

pourroit fournir des telles valeurs pour k, à moins que les coéficiens alternatifs A, C &c., ou B, D &c. ne fussent nuls, ainsi qu'on l'a déja remarqué dans *l'Art.* 32.

Au reste quels que soient les mouvemens des particules de l'air dans les instrumens à vent, ils seront toujours renfermés dans les trois équations générales de *l'Art.* 10., dont nous avons donné une construction approchée dans le *Chap. préc.* Il est vrai que cette construction ne nous apprendra rien sur la nature des vibrations des particules; mais les équations (D), & (E) font connoître que, pour ces vibrations deviennent sinchrones, il faut que toutes les valeurs de $\sqrt{-k}$ soient commensurables entr'elles, afin qu'il y ait un certain intervalle de tems, après lequel les fonctions sin. $t\sqrt{-ck}$ & cos. $t\sqrt{-ck}$ reprenant toujours les mêmes valeurs, les équations mentionnées redeviennent aussi exactement les mêmes.

Cette condition cependant n'est point nécessaire, si on suppose que les équations dont il s'agit soient vérifiées indépendamment des quantités sin. $\sqrt{-ck}$, & cos. $\sqrt{-ck}$; ce qui à lieu, lorsque chacune des intégrales $\int(xL+yM+\zeta N)\,dXdYdZ$, $\int(x'L+y'M+\zeta'N)\,dXdYdZ$, $\int[(x)L+(y)M+(\zeta)N]\,dXdYdZ$, $\int[(x')L+(y')M+(\zeta')N]\,dXdYdZ$ s'évanoüit d'elle même. Il ne sera donc pas inutile d'examiner ici quelles doivent être les valeurs de x, y, ζ, x', y', ζ' &c. pour que ces derniéres conditions aïent lieu.

60. Pour cela soient substituées au lieu de L, M, N leurs valeurs tirées des équations de condition (A), (B), (C) de *l'Art.* 45.; & faisant évanoüir par des intégrations par parties les différences de L, M, N, on aura d'abord, en négligeant les intégrales à deux seules changeantes qui sont nulles par la nature mêmes des quantités x, y, ζ, & des fonctions L, M, N, la transformée suivante

$\int(xL$

$\int (xL + yM + \zeta N)\, dXdYdZ = \frac{1}{k} \int [(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY}$
$+ \frac{d^2z}{dXdZ}) L + (\frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2x}{dYdX} + \frac{d^2z}{dYdZ}) M$
$+ (\frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY}) N]\, dXdYdZ$, où l'on voit que les quantités multipliées par L, M, N, ſont les mêmes que celles qui compoſent les ſeconds membres des équations différentielles propoſées; ce qui ne pourra jamais être autrement, quelque forme que puiſſent avoir ces équations; puiſque il eſt clair que les nouvelles intégrations par parties, dont on fait uſage ici, ne ſervent qu'à defaire ce qu'on avoit fait par les premiéres.

On aura donc, en poſant α pour une conſtante quelconque,
$\int [(\alpha x + \frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ}) L + (\alpha y$
$+ \frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2z}{dYdZ} + \frac{d^2x}{dYdX}) M + (\alpha \zeta + \frac{d^2z}{dZ^2}$
$+ \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY}) N]\, dXdYdZ = (\alpha + k)$
$\int (xL + yM + \zeta N)\, dXdYdZ$, & par conſéquent, tant que α ne ſera pas $= -k$, on ſatisfera à l'équation $\int (xL + yM + \zeta N)\, dXdYdZ = 0$, en faiſant ſéparément

$$(a) \ldots\ldots \alpha x + \frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ} = 0$$

$$(b) \ldots\ldots \alpha y + \frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2z}{dYdZ} + \frac{d^2x}{dYdX} = 0$$

$$(c) \ldots\ldots \alpha \zeta + \frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs de x, y, ζ qu'on pourra exprimer généralement ainſi: $x = A\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $y = A\psi(\alpha, X, Y, Z)$, $\zeta = A\chi(\alpha, X, Y, Z)$, les lettres φ, ψ, χ marquant des fonctions variables données.

La

La conſtante A peut-être quelconque, & même une fonction du tems t qui eſt ici regardé comme conſtant, mais les autres conſtantes qui ſe trouveront dans les fonctions φ, ψ, χ devront être déterminées par les conditions qu'on ſuppoſera aux quantités x, y, z; conditions qui dépendront dans le cas préſent de la figure du tuïau qui renferme les particules mobiles de l'air.

A l'égard de la conſtante α, elle ſera ſuſceptible d'une infinité de valeurs, qui ſeront les mêmes préciſément que celles de la la quantité k, mais priſes négativement; ce qu'on peut démontrer en général de la maniére ſuivante. Les équations trouvées (a), (b), (c) comparées avec les équations fondamentales de *l'Art.* 10. donnent $\frac{d^2x}{dt^2} = -c\alpha x$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -c\alpha y$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -c\alpha z$; d'où l'on tire l'équation $\frac{d^2s}{dt^2} = -c\alpha s$, qui comparée avec l'équation en s trouvée dans *l'Art.* 45. $\frac{d^2s}{dt^2} = kcs$ donne $-\alpha = k$, & $\alpha = -k$.

En raiſonnant & opérant de même ſur les autres formules intégrales qui doivent auſſi être $= 0$, on trouvera pour x', y', z', comme auſſi pour (x), (y), (z), & (x'), (y'), (z') des valeurs qui ne différeront de celles de x, y, z que dans la conſtante arbitraire, par laquelle les fonctions φ, ψ, χ peuvent être multipliées; on aura ainſi

$x' = B\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $y' = B\psi(\alpha, X, Y, Z)$
$z' = B\chi(\alpha, X, Y, Z)$;
$(x) = E\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $(y) = E\psi(\alpha, X, Y, Z)$
$(z) = E\chi(\alpha, X, Y, Z)$; &
$(x') = F\varphi(\alpha, X, Y, Z$, $(y') = F\psi(\alpha, X, Y, Z)$
$(z') = F\chi(\alpha, X, Y, Z)$.

Maintenant il faut obſerver que comme les équations (a), (b), (c) ne rendent l'intégrale propoſée $= 0$ que tant

tant que α n'eſt pas $= -k$, & que d'ailleurs les équations (D) & (E) de *l'Art.* 45. doivent avoir lieu en général pour toutes les valeurs de k, il reſtera encore à vérifier ces équations dans le cas de $k = -\alpha$; or ſubſtituant dans l'équation (D) les valeurs trouvées ci-deſſus de x, y &c. il viendra $A\int[L\varphi(\alpha, X, Y, Z) + M\psi(\alpha, X, Y, Z) + N\chi(\alpha, X, Y, Z)]\,dX\,dY\,dZ = (E\,\text{cof.}\,t\sqrt{c\alpha} + \frac{F\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}})\int[L\varphi(\alpha, X, Y, Z) + M\psi(\alpha, X, Y, Z) + N\chi(\alpha, X, Y, Z)]\,dX\,dY\,dZ$; ce qui donnera $A = E\,\text{cof.}\,t\sqrt{c\alpha} + \frac{F\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}$. On aura de même, par l'équation (E), $B = F\,\text{cof.}\,t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha}\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha}$, donc

$$x = [E\,\text{cof.}\,t\sqrt{c\alpha} + \frac{F\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}]\,\varphi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$y = [E\,\text{cof.}\,t\sqrt{c\alpha} + \frac{F\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}]\,\psi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$z = [E\,\text{cof.}\,t\sqrt{c\alpha} + \frac{F\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}]\,\chi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$x' = [F\,\text{cof.}\,t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha}\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha}]\,\varphi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$y' = [F\,\text{cof.}\,t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha}\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha}]\,\psi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$z' = [F\,\text{cof.}\,t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha}\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha}]\,\chi(\alpha, X, Y, Z).$$

Il n'eſt pas difficile de voir ici, que les vibrations des particules ſeront toutes ſyncrones à celles d'une pendule ſimple, dont la longueur ſoit $= \frac{2h}{\alpha T^2 c} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{D}{E}$; par conſéquent, quelles que ſoient les valeurs de α, le fluide pourra toujours faire des oſcillations iſochrones d'autant d'eſpèces qu'il y aura de différentes valeurs de α. Au reſte ce cas eſt celui de l'iſochroniſme ordinaire, où les forces accélératrices ſont proportionelles aux eſpaces à parcourir.

61. Suppoſons maintenant

$$\alpha x + \frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ} = p$$

$$\alpha y + \frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2z}{dYdZ} + \frac{d^2x}{dYdX} = q$$

$$\alpha z + \frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY} = r$$

on aura $\int(pL + qM + rN)\,dXdYdZ = (\alpha + k)\int(xL + yM + zN)\,dXdYdZ$.

Donc, pour que $\int(xL + yM + zN)\,dXdYdZ$ devienne $= 0$, il ſuffira de faire $\int(pL + qM + rN)\,dXdYdZ = 0$, ſans qu'il ſoit ſéparément $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, comme dans les équations (a), (b), (c).

Or cette derniére formule étant ſemblable à la formule $\int(xL + yM + zN)\,dXdYdZ$ qui a fourni les équations (a), (b), (c); on trouvera par des pareils procédés les équations ſuivantes

$$(p) \ldots\ \beta p + \frac{d^2p}{dX^2} + \frac{d^2q}{dXdY} + \frac{d^2r}{dXdZ} = 0$$

$$(q) \ldots\ \beta q + \frac{d^2q}{dY^2} + \frac{d^2r}{dYdZ} + \frac{d^2p}{dYdX} = 0$$

$$(r) \ldots\ \beta r + \frac{d^2r}{dZ^2} + \frac{d^2p}{dZdX} + \frac{d^2q}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs de p, q, r qui étant ſubſtituées ci-deſſus donneront des nouvelles valeurs de x, y, z &c.

Il faut remarquer que dans la transformation de la formule $\int(pL + qM + rN)\,dXdYdZ$, on trouvera des intégrales à deux changeantes de même forme que celles qui réſultent de la formule $\int(xL + yM + zN)\,dXdYdZ$; il faudra donc les faire évanoüir, en ſuppoſant aux valeurs de p, q, r, les mêmes conditions qu'à celles de x, y, z; d'où il s'enſuit que, comme les équations (p), (q), (r) ſont d'ailleurs entiérement ſemblables aux équations (a), (b), (c), on aura de même $p =$

$A\varphi(\beta, X, Y, Z)$, $q = A\psi(\beta, X, Y, Z)$, $r = A\chi(\beta, X, Y, Z)$, & de plus que la quantité β aura les mêmes valeurs que la lettre $-k$.

Maintenant au lieu de ſubſtituer ces valeurs de p, q, r dans les équations en x, y, z; je multiplie ces mêmes équations telles qu'elles ſont par un coéficient indéterminé H, & j'ajoute chacune d'elles avec ſa correſpondante d'entre les trois autres (p), (q), (r), ce qui me donne

$$H\alpha x + (\beta - H)p + \frac{Hd^2x}{dX^2} + \frac{d^2p}{dX^2} + \frac{Hd^2y}{dXdY}$$
$$+ \frac{d^2q}{dXdY} + \frac{Hd^2z}{dXdZ} + \frac{d^2r}{dXdZ} = 0$$
$$H\alpha y + (\beta - H)q + \&c. = 0$$
$$H\alpha z + (\beta - H)r + \&c. = 0.$$

Soit donc fait $\beta - H = \alpha$; ſavoir $H = \beta - \alpha$, & ſuppoſant pour abreger $Hx + p = p'$, $Hy + q = q'$, $Hz + r = r'$ on aura

$$\alpha p' + \frac{d^2p'}{dX^2} + \frac{d^2q'}{dXdY} + \frac{d^2r'}{dXdZ} = 0$$
$$\alpha q' + \frac{d^2q'}{dY^2} + \frac{d^2r'}{dYdZ} + \frac{d^2p'}{dYdX} = 0$$
$$\alpha r' + \frac{d^2r'}{dZ^2} + \frac{d^2p'}{dZdX} + \frac{d^2q'}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera comme ci-deſſus $p' = A\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $q' = A\psi(\alpha, X, Y, Z)$, $r' = A\chi(\alpha, X, Y, Z)$, A marquant une nouvelle conſtante arbitraire.

Or les conditions qui déterminent les conſtantes de p, q, r étant les mêmes que celles qui déterminent les conſtantes de x, y, z, par ce qui a été dit ci-deſſus, elles ſeront encore les mêmes pour les conſtantes de p', q', r'; d'où il s'enſuit qu'on aura auſſi pour α les mêmes valeurs que pour β, ſavoir les mêmes que celles de la quantité $-k$.

Maintenat comme $x = \frac{p'-p}{H}$, $y = \frac{q'-q}{H}$, $\zeta = \frac{r'-r}{H}$; on aura en ſubſtituant, & prenant deux différentes conſtantes arbitraires A', A'', & marquant par α', α'' deux valeurs quelconques de $-k$;

$$x = A'\varphi(\alpha', X, Y, Z) + A''\varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$y = A'\psi(\alpha', X, Y, Z) + A''\psi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$\zeta = A'\chi(\alpha', X, Y, Z) + A''\chi(\alpha'', X, Y, Z);$$

formules qui ſerviront auſſi pour les autres variables x', y', ζ', (x), (y) &c. en ne faiſant que changer les conſtantes A', A''.

Or pour trouver le rapport entre les quantités x, y, ζ, x', y', ζ', & (x), (y), (ζ), (x'), (y'), (ζ') dépandant du tems t, on remarquera qu'il y a ici deux cas, où les équations (p), (q), (r) ne rempliſſent point la condition propoſée de $\int(xL + yM + \zeta N)\,dXdYdZ = 0$; ſavoir celui, où k eſt $= -\alpha'$, & celui où $k = -\alpha''$. Il faudra donc dans ces cas recourir immédiatement aux équations (D) & (E), & ſubſtituant au lieu de x, y, ζ &c. les expreſſions trouvées faire en ſorte, que ces équations deviennent poſſibles, lorſque $k = -\alpha'$, & $k = -\alpha''$.

Soient déſignées par B', B'', les conſtantes qui répondent aux quantités x, y, ζ, & par E', E'', F', F'' celles qui répondent aux quantités (x), (y), (ζ), & (x'), (y'), (ζ'), & poſons d'abord $k = -\alpha'$, il eſt clair que la formule $\int[L\varphi(\alpha'', X, Y, Z) + M\psi(\alpha'', X, Y, Z) + N\chi(\alpha'', X, Y, Z)]\,dXdYdZ$, évanoüira par elle même, ſuivant ce qui a été démontré dans *l'Art. préc.*; donc l'équation (D) ſe réduira comme ci-deſſus à

$$A'\int[L\varphi(\alpha', X, Y, Z) + M\psi(\alpha', X, Y, Z) + N\chi(\alpha', X, Y, Z)]\,dXdYdZ = \left(E' \cos. t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F' \sin. t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}}\right)\int[L\varphi(\alpha', X, Y, Z) + M\psi(\alpha', X, Y, Z) + N\chi(\alpha', X, Y, Z)]\,dXdYdZ;$$

d'où

d'où l'on tire $A' = E' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F' \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}}$. On tirera de même de l'équation (E), $B' = F' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha'}$.

Après cela on suppose $k = -\alpha''$, & l'on trouvera par des procédés semblables $A'' = E'' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F'' \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}}$, $B'' = F' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha''}$.

On aura donc,

$$x = [E' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha'}]\,\varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [E'' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha''}]\,\varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$y = [E' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha'}]\,\psi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [E'' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha''}]\,\psi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$z = \&c.$
$$x' = [F' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha'}]\,\varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [F'' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha''}]\,\varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$y' = \&c.$
$z' = \&c.$

On voit par ces formules que le mouvement de chaque particule sera composé de deux mouvemens analogues chacun au mouvement représenté par les formules de *l'Art. préc.*; d'où il est aisé de conclure, que les vibrations ne seront jamais isochrones, à moins que les mouvemens composans ne soient sinchrones entr'eux, ce qui ne pourra arriver que, lorsque les quantités α' & α'' seront commensurables entr'elles.

62. En suivant la méthode que nous venons d'expliquer on pourra supposer de nouveau au lieu des équations (p), (q), (r);

$$\beta p + \frac{d^2 p}{dX^2} + \frac{d^2 q}{dX\,dY} + \frac{d^2 r}{dX\,dZ} = P$$

$$\beta q + \frac{d^2 q}{dY^2} + \frac{d^2 r}{dY\,dZ} + \frac{d^2 p}{dY\,dX} = Q$$

$$\beta r + \frac{d^2 r}{dZ^2} + \frac{d^2 p}{dZ\,dX} + \frac{d^2 q}{dZ\,dY} = R$$

& enſuite

$$\gamma P + \frac{d^2 P}{dX^2} + \frac{d^2 Q}{dX\,dY} + \frac{d^2 R}{dX\,dZ} = 0$$

$$\gamma Q + \frac{d^2 Q}{dY^2} + \frac{d^2 R}{dY\,dZ} + \frac{d^2 P}{dY\,dX} = 0$$

$$\gamma R + \frac{d^2 R}{dZ^2} + \frac{d^2 P}{dZ\,dX} + \frac{d^2 Q}{dZ\,dY} = 0;$$

d'où, par des opérations analogues à celles qui ont été pratiqué ci-deſſus, on parviendra aux formules ſuivantes,

$$x = [E' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha'}]\,\varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [E'' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha''}]\,\varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$+ [E''' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha'''} + \frac{F'''}{\sqrt{c\alpha'''}} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha'''}]\,\varphi(\alpha''', X, Y, Z)$$

$y =$ &c.

$z =$ &c.

$$x' = [F' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha'}]\,\varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [F'' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha''}]\,\varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$+ [F''' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha'''} - E'''\sqrt{c\alpha'''} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha'''}]\,\varphi(\alpha''', X, Y, Z)$$

$y' =$ &c.

$z' =$ &c.

qui donnent les mouvemens des particules compoſés de trois mouvemens ſimples, analogues chacun à celui de *l'Art.* 60.; d'où il s'enſuit que l'iſochroniſme n'y aura lieu que, lorſque les quantités α', α'', α''' qui expriment trois valeurs quelconques de $-k$ ſeront toutes commenſurables entr'elles.

En

En ſuivant encore la même méthode, on trouvera pour les valeurs de x, y, z, x', y', z' des formules compoſées de 4, 5, 6 &c. termes ſemblables donc chacun répondra à une quelconque des valeurs de k; on pourra donc par ce moïen avoir autant de ſolutions particuliéres, qu'il y aura de combinaiſons à faire, à une à une, à deux à deux, à trois à trois &c. des valeurs de k, de ſorte, que leur nombre étant m, celui de ſolutions particuliéres ſera $2^m - 1$; mais ſi le nombre des valeurs commenſurables eſt ſeulement $= n$, il n'y aura que $2^n + m - n - 1$ de ces ſolutions qui rendent les oſcillations iſochrones.

Remarque.

63. Si on pouſſoit les expreſſions des valeurs de x, y &c. juſqu'à ce que le nombre de leurs termes fût égal à celui des valeurs de k, on auroit alors une ſolution générale, & applicable à tous les cas poſſibles; quoique cette propoſition ne ſoit pas une ſuite néceſſaire de l'Analiſe précédente, il eſt aiſé de la démontrer en rigueur par le moïen des principes juſqu'ici établis.

Pour cela je ſuppoſe qu'on développe la formule (D) en autant de formules particuliéres qu'il y a de valeurs de k, & qu'on en tire par la combinaiſon la valeur de chacune des quantités x, y, z, ſoit en ſe ſervant des régles ordinaires, où en emploïant une méthode analogue à celle, dont nous avons fait uſage dans le *Chap III. des Recher. préc.*, *Art.* 24.; il eſt facile de voir que ces valeurs ſeront exprimées de la maniére ſuivante;

$$x = P' \left[S' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha'} \right]$$
$$+ P'' \left[S'' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha''} \right]$$
&c. &c.

+

$$+ P^m \left[S^m \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha^m} \right]$$

$$y = Q' \left[S' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha'} \right]$$

$$+ Q'' \left[S'' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha''} \right]$$

&c. &c.

$$+ Q^m \left[S^m \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha^m} \right]$$

$$z = R' \left[S' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha'} \right]$$

$$+ R'' \left[S'' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha''} \right]$$

&c. &c.

$$+ R^m \left[S^m \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha^m} \right];$$

poſant α^m pour la derniére des valeurs de $-k$.

Les quantités S', S'' &c. S^m & V', V'' &c. V^m ſont miſes pour dénoter les valeurs des expreſſions $\int [(x)L + (y)M + (z)N]\,dX\,dY\,dZ$, & $\int [(x')L + (y')M + (z')N]$, lorſque on fait ſucceſſivement $-k = \alpha'$, $= \alpha''$ &c. $= \alpha^m$. Les autres quantités P', P'' &c. P^m, Q', Q'' &c. Q^m, R', R'' &c. R^m ſont différentes pour chaque particule, c'eſt-à-dire, ſont des fonctions variables de X, Y, Z.

Or, ſi l'on regarde ces fonctions comme indéterminées, on pourra en connoître la valeur par le moïen de la ſubſtitution & de la comparaiſon, ainſi qu'on le pratique dans la méthode connue des indéterminées. Subſtituons donc au lieu de x, y, z dans l'équation (D) les expreſſions ci-deſſus, & ſuppoſant pour abreger que S, V dénotent en géneral les valeurs de S', S'' &c. V', V'' &c., lorſqu'il y a encore $-k$ au lieu de α', α'' &c. on aura

$$\left[S' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha'} \right] \int (P'L + Q'M + R'N)\,dX\,dY\,dZ$$

$$+ [S''$$

$$+\left[S'' \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha''}\right]\int(P''L+Q''M+R''N)\,dXdYdZ$$

&c. &c.

$$+\left[S^m \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha^m}\right]\int(P^mL+Q^mM+R^mN)\,dXdYdZ$$

$$= S \text{ cof. } t\sqrt{-ck} + \frac{V}{\sqrt{-ck}} \text{ fin. } t\sqrt{-ck}.$$

Equation qui doit être identique en faiſant $-k = \alpha'$, $= \alpha''$, $=$ &c., $= \alpha^m$.

Soit donc poſé, en général $-k = \alpha^\mu$, le ſecond membre de l'équation deviendra S^μ cof. $t\sqrt{c\alpha^\mu} + \frac{V^\mu}{\sqrt{c\alpha^\mu}}$ fin. $t\sqrt{c\alpha^\mu}$, & le terme μ^{me} du premier membre étant

$$S^\mu \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha^\mu} + \frac{V^\mu}{\sqrt{c\alpha^\mu}} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha^\mu}\Big]\int(P^\mu L+Q^\mu M+R^\mu N)\,dXdYdZ,$$

pour identifier les deux membres, on ſuppoſera que $\int(P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N)\,dXdYdZ$ ſoit $= 1$, & que toutes les autres formules exprimées généralement $\int(PL + QM + RN)\,dXdYdZ$ ſoient nulles, $-k$ étant $= \alpha^\mu$ dans les valeurs de L, M, N; d'où l'on voit que les valeurs de P, Q, R devront être telles que la formule générale $\int(P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N)\,dXdYdZ$ ſoit toujours $= 1$, lorſque $k = -\alpha^\mu$, & qu'elle ſoit toujours $= 0$, lorſque k a une autre valeur quelconque.

Or, par ce qui a été démontré dans *l'Art.* 60., on trouvera d'abord, pour remplir cette dernière condition, les équations ſuivantes,

$$\alpha^\mu P^\mu = \frac{d^2P^\mu}{dX^2} + \frac{d^2Q^\mu}{dXdY} + \frac{d^2R^\mu}{dXdZ}$$

$$\alpha^\mu Q^\mu = \frac{d^2Q^\mu}{dY^2} + \frac{d^2R^\mu}{dYdZ} + \frac{d^2P^\mu}{dYdX}$$

$$\alpha^\mu R^\mu = \frac{d^2R^\mu}{dZ^2} + \frac{d^2P^\mu}{dZdX} + \frac{d^2Q^\mu}{dZdY};$$

d'où il réſultera comme dans *l'Art.* cité

$P^{\mu} = A\varphi(\alpha^{\mu}, X, Y, Z)$; $Q^{\mu} = A\psi(\alpha^{\mu}, X, Y, Z)$
$R^{\mu} = A\chi(\alpha^{\mu}, X, Y, Z.$

Soit maintenant la valeur de $\int[L\varphi(\alpha^{\mu}, X, Y, Z) + M\psi(\alpha^{\mu}, X, Y, Z) + N\chi(\alpha^{\mu}, X, Y, Z)]\,dX\,dY\,dZ$, en y posant $-k = \alpha^{\mu}$, exprimée par D^{μ}; on aura pour satisfaire à la premiére condition $AD^{\mu} = 1$, & par conséquent $A = \frac{1}{D^{\mu}}$.

Substituant enfin les valeurs trouvées de P, Q, R, dans les expressions de x, y, z, & posant pour plus de simplicité E', E'', &c. au lieu de $\frac{S'}{D'}$, $\frac{S''}{D''}$ &c. & F', F'', &c. au lieu de $\frac{V'}{D'}$, $\frac{V''}{D''}$ &c. il viendra

$$x = [E' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha'}]\varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [E'' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha''}]\varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
&c. &c.
$$+ [E^{m} \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha^{m}} + \frac{F^{m}}{\sqrt{c\alpha^{m}}} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha^{m}}]\varphi(\alpha, X, Y, Z)$$
$y =$ &c.
$z =$ &c.

Par des raisonnemens, & des opérations semblables on tirera de l'équation (E)

$$x' = [F' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha'}]\varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [F'' \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha''}]\varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$+$ &c.
$$+ [F^{m} \text{ cos. } t\sqrt{c\alpha^{m}} - E^{m}\sqrt{c\alpha^{m}} \text{ sin. } t\sqrt{c\alpha^{m}}]\varphi(\alpha^{m}, X, Y, Z).$$
$y' =$ &c.
$z' =$ &c.

Voilà, comme l'on voit, une construction générale des mêmes équations que nous avons déja traité dans le §. 2. du *Chap. préc.* par une voie fort différente, & seulement par

par approximation; mais il faut avouer que cette construction n' est guères utile pour la connoissance du mouvement des particules de l'air. Car les valeurs de x, y, z sont composées de suites infinies, dont les termes ne sont point convergens, ou du moins ne peuvent point être regardés comme tels, puisque les constantes E, F, que ces termes renferment, dépendent des premiéres valeurs de x, y, z, & de x', y', z', qui doivent être supposées quelconques.

Scolie.

64. Il est clair que la méthode de la Remarque précédente peut aussi être emploïée dans une infinité d'autres équations de même espèce, & qu'elle s'applique également, soit que le nombre des corps mobiles soit infini, ou qu'il soit fini; de sorte qu'on peut la regarder comme une simplification, & une généralisation de celle, dont nous nous sommes servis dans le *Chap. III. des Rech. préc.*

Au reste cette méthode sert à démontrer la belle Proposition de M. Daniel Bernoulli que, lorsque un système quelconque de corps fait des oscillations infiniment petites, le mouvement de chaque corps peut être considéré, comme composé de plusieurs mouvemens partiels, & synchrones chacun à celui d'un pendule simple. *Voïés les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année* 1753.

Fautes à corriger dans la Dissertation précédente.

Pag. 15 *lig.* 16; & qui renferme même quelque chose de contradictoire à la nature du Problême; *lisez* & qui est même incompatible avec les principes de l'Analise de M. Newton.

Pag. 23 *lig.* 4; *au lieu de R dans le terme* $R\sqrt{-ck}$ *sin.* $t\sqrt{-ck}$; *mettez S.*

ibid. changez les signes aux deux dernières termes des équations $s = \&c.$, $\&\ r = \&c.$ *comme aussi aux termes correspondans des équations qui suivent* $\int z M dx = \&c.$, $\int u M dx = \&c.$ *Au reste cette faute a été corrigée dans la suite du calcul.*

Pag. 25 *lig.* 16; dans les seconds termes; *lisez* dans les seconds membres.

lig. 19; dans ces termes; *lisez* dans les termes de ces membres.

Pag. 32 *lig.* 27; de sa partie $A\ S$; *mettez* de sa partie $A'\ S'$.

lig. suiv.; comme aussi que; *effacez* que.

Pag. 48 *lig.* 21 *au lieu de* $\frac{2h}{T^2} \times \frac{E}{D}$; *posez* $\frac{1}{T}\sqrt{\frac{2hE}{D}}$.

Pag. 52 *lig.* 6; que l'autre; *effacez* l'autre.

Pag. 59; *dans l'équation* $r = \&c.$ *au lieu de* $R\sqrt{ck}$ sin. $t\sqrt{-ck}$; *mettez* $S\sqrt{-ck}$ sin. $t\sqrt{-ck}$.

Pag. 67 *lig.* 5; & de dy au lieu; *mettez* & $-dy$ au lieu.

lig. 7; *placez le signe* $-$ *avant le premier terme de la valeur de* (Z). *Même correction aux formules des lig.* 22 *&* 23.

Pag. 72 *lig.* 17; *changez le signe* $-$ *en* $+$ *avant le dernier terme de l'équation de cette ligne,* $\varphi(a+y) = \&c.$

lig. 22; *mettez* $\varphi(a+y)$ *au lieu de* $\varphi(a+z)$.

Pag. 96 *lig. dernière*; $X = hx^m$, *posez* $X = hx^n$.

Pag. 104 *lig.* 17; $s + \mu v$ *lisez* $s + \mu r$.

lig. 21; *posez* $e^{t\sqrt{ck}}$ *au lieu de* $e^{-t\sqrt{ck}}$ *après le signe* $\int$ *dans le dernier terme de l'équation* (A).

Pag. 105 *lig.* 6; *après* $\int Z M dx$, *ajoutez* $\int V M dx$.

Pag. 110 *lig.* 17; que M soit; *lisez* que z, & M soient.

Pag. 140 *lig.* 14; $= \frac{\sqrt{3c}}{6}$; *lisez* $= \frac{\sqrt{7c}}{6}$.

Pag. 146 *lig.* 16; *au lieu de* $L^{(a-u, Y, Z)}$; $= \&c.$ *mettez* $L^{(a+u, Y, Z)} = \&c.$

Pag. 157 *lig.* 13 *&* 14; à la quinte en haut de ce même Son, & puis à la double tierce; &c. *lisez pour plus d'intelligence* à la douxiéme, & puis à la dixseptiéme &c. de ce même Son.

ESSAI

D'UNE NOUVELLE METHODE

POUR DÉTERMINER LES *MAXIMA*, ET LES *MINIMA* DES FORMULES INTEGRALES INDEFINIES.

PAR M. DE LA GRANGE.

POUR peu qu'on ſoit au fait des Principes du Calcul différentiel, on connoit la méthode de déterminer les plus grandes, & les moindres ordonnées des courbes; mais il eſt des queſtions *de maximis & minimis* d'un genre plus élévé, & qui, quoique dépendantes de la même méthode ne s'y appliquent pas ſi aiſément. Ce ſont celles, où il s'agit de trouver les courbes mêmes, dans leſquelles une expreſſion intégrale donnée ſoit un *maximum*, ou un *minimum* par rapport à toutes les autres courbes.

Le premier Problême de ce genre, que les Géomètres aïent reſolu, eſt celui de la *Brachyſtochrone*, ou ligne de la plus vite deſcente, que M. Jean Bernoulli propoſa vers la fin du ſiécle paſſé. On n'y parvint alors que par des voïes particuliéres, & ce ne fut que quelque tems après, & à l'occaſion des recherches ſur les *Iſopérimètres*, que le grand Géomètre dont nous venons de parler, & ſon Illuſtre frere M. Jacque Bernoulli donnerent quelques régles générales pour réſoudre pluſieurs autres queſtions de même nature. Mais ces régles n'aïant pas aſsès d'étendue, le célèbre M. Euler a entrepris de réduire toutes les recherches de ce genre à une méthode générale, dans l'ouvrage intitulé : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes : ſive ſolutio Problematis iſoperimetrici latiſſimo ſenſu accepti.* Ouvrage original, & qui brille par tout d'une pro-

profonde ſcience de calcul. Cependant, quelque ingénieuſe & feconde que ſoit ſa méthode, il faut avouer qu'elle n'a pas toute la ſimplicité qu'on peut déſirer dans un ſujet de pure Analiſe. L'Auteur le fait ſentir lui même dans *l'Art.* 39. du *Chap.* 2. de ſon livre par ces paroles: *Deſideratur itaque methodus a reſolutione geometrica & lineari libera, qua pateat in tali inveſtigatione maximi minimique, loco* Pdp *ſcribi debere* — pdP.

Maintenant voici une méthode qui ne demande qu'un uſage fort ſimple des principes du Calcul différentiel & intégral; mais avant tout je dois avertir que, comme cette méthode exige que les mêmes quantités varient de deux maniéres différentes, pour ne pas confondre ces variations, j'ai introduit dans mes calculs une nouvelle carathériſtique δ. Ainſi δZ exprimera une différence de Z qui ne ſera pas la même que la dZ, mais qui ſera cependant formée par les mêmes régles; de ſorte qu'aïant une équation quelconque $dZ = m\delta x$, on pourra avoir également $\delta Z = m\delta x$, & ainſi des autres. Cela poſé je viens d'abord au Problême ſuivant.

I.

Probleme I. Etant propoſée une formule intégrale indéfinie repréſentée par $\int Z$, où Z déſigne une fonction quelconque déterminée des variables x, y, z, & de leurs différences dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z &c., trouver la rélation que ces variables doivent avoir entr'elles, pour que la formule $\int Z$ devienne un *maximum*, ou un *minimum*.

Solution. Suivant la méthode connue *de maximis, & minimis*, il faudra différentier la propoſée $\int Z$, en regardant les quantités x, y, z, d^2x, d^2y, d^2z &c. comme variables, & faire la différentielle, qui en réſulte, égale à zero. Marquant donc ces variations par δ, on aura d'abord pour l'équation du *maximum*, ou *minimum* $\delta \cdot \int Z = 0$, où, ce qui en eſt l'équivalent, $\int \delta Z = 0$. Or

Or ſoit Z tel que $\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x$ + &c. + $N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + R\delta d^3y$ + &c. + $\nu\delta\zeta$ + $\pi\delta d\zeta + \chi\delta d^2\zeta + \rho\delta d^3\zeta$ + &c. il en viendra l'équation

$$\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2x + \int r\delta d^3x + \&c. +$$
$$\int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \int R\delta d^3y + \&c. +$$
$$\int \nu\delta\zeta + \int \pi\delta d\zeta + \int \chi\delta d^2\zeta + \int \rho\delta d^3\zeta + \&c. = 0;$$

Mais on comprend aiſément que $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$, & ainſi des autres; de plus on trouve par la méthode des intégrations par parties $\int p d\delta x = p\delta x - \int dp\delta x$, $\int q d^2\delta x = q d\delta x - dq\delta x + \int d^2q\delta x$, $\int r d^3\delta x = r d^2\delta x - dr\delta x + d^2r\delta x - \int d^3r\delta x$; & ainſi du reſte; donc l'équation précédente ſe changera en celle-ci,

$$(A) \ldots \int (n - dp + d^2q - d^3r + \&c.)\,\delta x +$$
$$\int (N - dP + d^2Q - d^3R + \&c.)\,\delta y +$$
$$\int (\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c.)\,\delta\zeta +$$
$$(p - dq + d^2r - \&c.)\,\delta x + (q - dr\,\&c.)\,d\delta x +$$
$$(r - \&c.)\,d^2\delta x + \&c. +$$
$$(P - dQ + d^2R - \&c.)\,\delta y + (Q - dR\,\&c.)\,d\delta y +$$
$$(R - \&c.)\,d^2\delta y + \&c. +$$
$$(\pi - d\chi + d^2\rho - \&c.)\,\delta\zeta + \chi - d\rho\,\&c.)\,d\delta\zeta +$$
$$(\rho - \&c.)\,d^2 + \&c. = 0;$$

d'où l'on tirera premiérement l'équation indéfinie

$$(B) \ldots (n - dp + d^2q - d^3r + \&c.)\,\delta x +$$
$$(N - dP + d^2Q - d^3R + \&c.)\,\delta y +$$
$$(\nu - d\pi + d\chi - d^3\rho + \&c.)\,\delta\zeta = 0;$$

& enſuite l'équation déterminée

$$(C) \ldots (p - dq + d^2r - \&c.)\,\delta x + (q - dr + \&c.)\,d\delta x$$
$$+ (r - \&c.)\,d^2\delta x + \&c. +$$
$$(P - dQ + d^2R - \&c.)\,\delta y + (Q - dR + \&c.)\,d\delta y$$
$$+ (R - \&c.)\,d^2\delta y + \&c. +$$
$$(\pi - d\chi + d^2\rho - \&c.)\,\delta x + \chi - d\rho + \&c.)\,d\delta\zeta$$
$$+ (\rho - \&c.)\,d^2\delta\zeta + \&c. = 0.$$

Cette équation ſe rapporte au dernier point de l'intégrale $\int Z$; mais il faut obſerver, que comme chacun de ſes ter-

mes

mes comme $p\delta x$ dépend d'une intégration partielle de la formule $\int p\,d\delta x$, on peut lui ajouter, ou en retrancher une quantité conſtante. Or la condition, par laquelle cette conſtante doit ſe déterminer eſt qu'elle faſſe évanoüir le terme $p\delta x$ au point, où commence l'intégrale $\int p\,d\delta x$; il faudra donc retrancher de $p\delta x$ ſa valeur en ce point; d'où réſulte la régle ſuivante. Soit le premier membre de l'équation (C) exprimé généralement par M, & ſoit la valeur de M, au point où commence l'intégrale $\int Z$, déſignée par M, & au point où cette intégrale finit, déſignée par M', on aura $M' - M = 0$, pour l'expreſſion complete de l'équation (C).

Maintenant pour ſe défaire dans les équations trouvées des différences indéterminées δx, δy, δz; $d\delta x$, $d\delta y$ &c. on examinera d'abord ſi par la nature du Problême il y a entr'elles quelque rapport donné; & les aïant réduit au plus petit nombre poſſible, on fera enſuite le coéficient de chacune de celles qui reſteront égal à zero. Si elles ſont abſolument indépendantes les unes des autres, l'équation (B) nous donnera ſur le champ les trois ſuivantes

$$n - dp + d^2q - d^3r + \&c. = 0$$
$$N - dP + d^2Q - d^3R + \&c. = 0$$
$$\pi - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c. = 0$$

II.

Exemple. Soit cherchée la courbe brachriſtochrone dans le vuide. Nommant x l'abſciſſe verticale, & y, & z les deux ordonnées orizontales, & perpendiculaires l'une à l'autre, la formule qui exprime le tems ſera $\int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{x}}$, laquelle étant comparé à $\int Z$, on a $Z = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{x}}$; & différentiant par δ ſuivant les régles ordinaires des différentiations, δZ

$= -$

$$= -\frac{\delta x \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{2x\sqrt{x}} + \frac{dx\,\delta\,dx}{\sqrt{x}\times\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$$
$$+ \frac{dy\,\delta\,dy}{\sqrt{x}\times\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}} + \frac{dz\,\delta\,dz}{\sqrt{x}\times\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$$ donc, posant pour abreger $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, $n = -\frac{ds}{2x\sqrt{x}}$ $p = \frac{dx}{ds\sqrt{x}}$, $P = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}$, $\pi = \frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, & toutes les autres quantités q, r, N, Q &c. $= 0$.

III.

Premier cas. Or si le Problême est de trouver en général, entre toutes les courbes possibles, celle de la plus vite descente, on aura en ce cas les équations $n - dp = 0$; $dP = 0$; $dP' = 0$, savoir $-\frac{ds}{2x\,dx} - d\cdot\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$; $-d\cdot\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$; $-d\cdot\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$; ces trois équations devant représenter une courbe unique, il faut qu'elles se réduisent à deux seulement; c'est de quoi il est facile de s'assurer par le calcul; car, la seconde étant multipliée par $2\frac{dy}{ds\sqrt{x}}$ & ajoutée à la troisiéme multipliée par $2\frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, il vient, à cause de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, $d\cdot(\frac{1}{x} - \frac{dx^2}{ds^2 x}) = 0$, savoir, en différentiant & divisant le tout par $\frac{2\,dx}{ds\sqrt{x}}$, $-\frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d\cdot\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$ qui est la premiére équation.

Présentement, si l'on intégre les deux équations $d\cdot\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, & $d\cdot\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$, on a $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, & $\frac{dz}{ds\sqrt{x}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{b}}$; d'où l'on tire d'abord $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; ce qui fait voir que la courbe cherchée eſt toute dans un même plan vertical, & que par conſéquent elle eſt à ſimple courbure. Pour la mieux connoître rapportons-là à deux coordonnées priſes dans ſon même plan. Que x ſoit l'une, & t l'autre, on aura $\sqrt{(y^2 + z^2)} = t$, & puiſque $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, on aura en intégrant $z = y\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (je n'ajoute point de conſtante, parce que je ſuppoſe que l'axe des x paſſe par la courbe même); d'où l'on tire $z = t\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b)}}$, $y = t\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$, $dy = dt\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dt^2)}$, & enfin $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{b}\,dt}{\sqrt{(a+b)} \times \sqrt{x} \times \sqrt{(dx^2 + dt)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ce qui ſe réduit, en poſant $\frac{ab}{a+b} = c$, à $dt = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}$, équation d'une cicloïde décrite ſur une baſe horizontale par un cercle, dont le diamêtre $= c$.

IV.

Maintenant, ſi le premier & le dernier point de la brachiſtochrone ſont donnés, il eſt clair que, les coordonnées x, y, z étant invariables pour ces points, leurs différences δx, δy, δz, $d\delta x$, $d\delta y$ &c. ſeront nulles, & par conſéquent auſſi tous les termes de l'équation (C); la conſtante c devra donc être déterminée en ſorte, que la cicloide paſſe par les deux points donnés.

Si le premier point eſt donné, & que la brachiſtochrone doive être telle qu'un corps partant de ce point arrive dans le moindre tems à un plan horizontal donné, alors M ſera

ſera nul de lui même, & l'équation (*C*) donnera $M' = o$, ſavoir $\frac{dx}{ds\sqrt{x}}\delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\delta y + \frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}}\delta\zeta = o$, équation qui devra avoir lieu ſeulement dans le point où la courbe rencontre le plan; or ce plan étant donné de poſition, l'abſciſſe x qui y répond ſera donnée auſſi, par conſéquent on aura $\delta x = o$, & le reſte de l'équation devra être vrai quelles que ſoient δy, & $\delta\zeta$. On aura donc $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = o$, $\frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} = o$, $a = \infty$, $b = \infty$, ce qui transformera la cicloïde en une droite verticale. Mais ſi le plan donné au lieu d'être horizontal, étoit vertical, & perpendiculaire à l'axe des y, ou des ζ, on auroit alors $\delta y = o$ & par conſéquent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = o$, $\frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} = o$ pour le premier cas, & $\delta\zeta = o$, & par conſéquent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = o$ $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = o$ pour le ſecond; par-là on détermineroit les conſtantes a, & b, & l'on trouveroit que la cicloïde devroit être telle qu'elle rencontrât le plan donné à angles droits.

En général ſi au lieu d'un plan, on prend une ſurface quelconque pour terme de la brachriſtocrhone, il eſt clair que les δx, δy, $\delta\zeta$ de l'équation (*C*) devront avoir entr'elles un rapport dépendant de la nature de la ſurface donnée; de ſorte, que $d\zeta = Tdx + Vdy$ étant ſuppoſée l'équation différentielle de cette ſurface, on aura $\delta\zeta = T\delta x + V\delta y$; donc ſubſtituant cette valeur de $\delta\zeta$ dans l'équation (*C*) on aura

$$\left(\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + T\frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}}\right)\delta x + \left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}} + V\frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}}\right)\delta y = o;$$

d'où l'on tire ſéparément $dx + Td\zeta = o$; & $dy + Vd\zeta$

$V d\zeta = 0$. Equations qui font connoître que la ſurface propoſée doit toujours être coupée à angles droits par la courbe cherchée.

Si la brachriſtochrone doit ſimplement être terminée par deux ſurfaces données de poſition; alors pour remplir l'équation (C) il eſt néceſſaire de faire ſéparément $M = 0$, & $M' = 0$; d'où l'on tire pour le premier, & le dernier point de la courbe les mêmes conditions qu'on a trouvé dans le cas précédent pour le dernier point ſeulement; on en conclura donc que la courbe cherchée ſera celle, d'entre toutes les cicloides poſſibles, qui rencontrera perpendiculairement les deux ſurfaces propoſées.

V.

Second cas. Suppoſons maintenant que la brachriſtochrone doive être toute couchée ſur une ſurface donnée, dont l'équation ſoit $d\zeta = p dx + q dy$; changeant la caratheriſtique d en δ, on aura donc $\delta\zeta = p\delta x + q\delta y$, équation qui donne le rapport qu'il doit y avoir en général entre les différences $\delta\zeta$, δy, δx. Subſtituant cette valeur de $\delta\zeta$ dans l'équation (B), & faiſant enſuite les deux coéficiens de δx, & de δy chacun $= 0$ on aura pour la courbe cherchée

$$-p\, d \cdot \frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} - \frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$$

$$-q\, d \cdot \frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0.$$

Ces équations reviennent au même, étant combinées avec l'équation à la ſurface $d\zeta = p dx + q dy$. Car multipliant la premiére par $\frac{2dx}{ds\sqrt{x}}$, & la ſeconde par $\frac{2dy}{ds\sqrt{x}}$ & les joignant enſemble, on trouve, après toutes les

réductions, $-d \cdot \frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2} = 0$. On prendra donc une de ces équations à volonté, & on la combinera avec l'équation $dz = p\,dx + q\,dx$, pour avoir la brachriſtochrone cherchée.

VI.

A l'égard de l'équation (C) il eſt clair que tous les termes de cette équation s'évanoüiront, lorſque on ſuppoſera donnés le premier & le dernier point de la courbe; mais ſi l'un d'eux étoit arbitraire, alors aïant ſubſtitué au lieu de δz ſa valeur $p\,\delta x + q\,\delta y$, on auroit les équations $p\,\frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$, & $q\,\frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, qu'il faudroit vérifier par rapport à ce point. Mais ſi l'on avoit tracée ſur la ſurface une courbe, à laquelle le mobile dût arriver dans le tems le plus court; ſuppoſant cette courbe donnée par l'équation $dy = m\,dx$, on auroit de même $\delta y = m\,\delta x$; &, cette valeur de δy étant ſubſtituée dans l'équation (C) on feroit $p\,\frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} + (q\,\frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy}{ds\sqrt{x}})\,m = 0$, ou bien $(p + q\,m)\,dz + dx + m\,dy = 0$; équation qui renferme les conditions néceſſaires pour que la brachriſtochrone rencontre à angles droits la courbe propoſée.

VII.

Remarque 1. M. Euler eſt le premier qui ait donné des formules générales pour trouver les courbes, dans leſquelles une fonction intégrale donnée eſt la plus grande, ou la plus petite; (*Voïés le Traité dont on a fait mention plus haut.*) mais

mais les formules de cet Auteur ſont moins générales que les notres ; 1.° parce qu'il ne fait varier que la ſeule changeante y dans l'expreſſion Z ; 2.° parce qu'il ſuppoſe, que le premier & le dernier point de la courbe ſont fixes. En introduiſant ces conditions dans nos formules, elles deviendront entiérement conformes à celles du Prob. V. du Traité cité ; il faudra ſeulement mettre $Z\,dx$ au lieu de Z, & enſuite $\frac{P}{dx}$, $\frac{Q}{dx^2}$ &c. au lieu de P, Q &c., dx étant conſtant.

VIII.

REMARQUE 2. Soit ſuppoſé $dy = A\,dx$, $dA = B\,dx$ &c. $d\zeta = \alpha\,dx$, $d\alpha = \beta\,dx$ &c. il eſt clair, qu'en ſubſtituant ces valeurs dans l'expreſſion Z, elle prendra cette forme $X dx$, où X ſera une fonction quelconque algébrique des variables finies x, y, ζ, A, B &c. α, β &c. ; faiſons donc $\delta X = N'\delta x + n'\delta y + \nu'\delta\zeta + P'\delta A + Q\delta B +$ &c. $+ \pi'\delta\alpha + \chi'\delta\beta +$ &c. on aura $\delta Z = \delta \cdot X dx = \delta X dx + X\delta dx = \delta X dx + \frac{Z\delta dx}{dx} =$ $N' dx\delta x + \frac{Z}{dx}\delta dx + n' dx\delta y + \nu' dx\delta\zeta + P' dx\delta A + Q' dx\delta B +$ &c. $+ \pi' dx\delta\alpha + \chi' dx\delta\beta +$ &c. Or $dy = A\,dx$, $d^2y = B\,dx^2 + A\,d^2x$, &c. donc $\delta dy = \delta A\,dx + A\delta dx$, $\delta d^2y = \delta B\,dx^2 + \delta A\,d^2x + 2B\,dx\delta dx + A\delta d^2x$, &c. ; on trouvera de même $\delta d\zeta = \delta\alpha\,dx + \alpha\delta dx$, $\delta d^2\zeta = \delta\beta dx^2 + \delta\alpha d^2x + 2\beta\,dx\delta dx + \alpha\delta d^2x$, &c. ; ſubſtituant ces valeurs dans l'expreſſion de δZ, & ordonnant les termes on aura $\delta Z = n\delta x + (p + PA + 2QB\,dx +$ &c. $+ \pi\alpha + 2\chi\beta\,dx +$ &c.$)\delta dx + (q + QA +$ &c. $+ \chi\alpha +$ &c.$)\delta d^2x +$ &c. $+ N\delta y + \nu\delta\zeta + (P\,dx + Q\,d^2x +$ &c.$)\delta A + (Q\,dx^2 +$ &c.$)\delta B +$ &c. $+ (\pi\,dx + \chi\,d^2x +$ &c.$)$

&c.) $\delta\alpha + (\chi dx^2 + \&c.)\delta\beta + \&c.$ Cette valeur de δZ doit être identique avec celle qu'on trouvé précédemment ; comparant donc les termes affectés de δdx, $\delta\delta^2 x$ &c. on aura les équations $\frac{Z}{dx} = p + PA + 2QBdx + \&c. + \pi\alpha + 2\chi\beta dx + \&c.\ q + QA + \&c. + \chi\alpha + \&c. = 0$.

La seconde étant différentiée, & ensuite retranchée de la première, on a $\frac{Z}{dx} = p - dq + \&c. + PA + QBdx - dQA + \&c. + \pi\alpha + \chi\beta dx - d\chi\alpha + \&c. = 0$. La même èquation étant multipliée par d^2x, & ensuite ajoutée à celle-ci multipliée par dx, il vient $Z = pdx + Pdy + \pi d\zeta + qd^2x - dqdx + Qd^2y - dQdy + \chi d^2\zeta - d\chi d\zeta + \&c.$ Différentiant, & effaçant ce qui se détruit, on aura, à cause de $dZ = ndx + Ndy + \nu d\zeta + pd^2x + Pd^2y + \&c.$, $(n - dp + d^2q + \&c.)dx + (N - dP + d^2Q + \&c.)dy + (\nu - d\pi + d^2\chi - \&c.)d\zeta = 0$; équation qui est d'elle même identique, & qui montre par conséquent, que les équations trouvées à la fin de *l'Art. I.* sont telles, que si on en prend deux à volonté, la troisiéme s'ensuit toujours nécessairement.

I X.

Probleme 2. Rendre la formule $\int Z$ un *maximum*, ou un *minimum*, en supposant que Z est une fonction quelconque algébrique composée des changeantes x, y, ζ avec leurs différences dx, dy, $d\zeta$, d^2x, d^2y &c., & de la quantité $\Pi = \int Z'$, Z' étant une autre fonction algébrique quelconque des seules changeantes x, y, ζ &c., & de leurs différences dx, dy, $d\zeta$, d^2x, d^2y &c.

Solution. Soit, en différentiant par δ, & ne regardant que y comme variable, $\delta Z = L\delta\Pi + n\delta x + p\delta dx +$

$+ q\delta d^2x +$ &c. $+ N'\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y +$ &c. $+ \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z +$ &c. & $\delta Z' = n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c. $+ N'\delta y + P'\delta dy + Q'\delta d^2y +$ &c. $+ \nu'\delta z + \pi'\delta dz + \chi\delta d^2z +$ &c., on aura, par l'hipothèse, $\delta\Pi = \delta\int Z' = \int\delta Z' = \int[n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$]$, donc $\delta\cdot\int Z = \int\delta Z = \int[n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x +$ &c.$] + \int L\int[n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$]$. La premiére partie se réduira, comme dans le Prob. 1., à $\int(n - dp + d^2q -$ &c.$)\delta x + (p - dq +$ &c.$)\delta x + (q -$ &c.$)d\delta x +$ &c. A l'égard de la seconde on la transformera d'abord en $\int L \times \int[n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$] - \int[\int L \times (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$)]$.

Or soit la valeur totale de l'intégrale $\int L$ représentée par H, prenant cette quantité H pour constante, la transformée précédente se réduira à celle-ci

$\int[(H - \int L) \times (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$)]$

laquelle se transformera aisément, par des intégrations par parties, en

$\int[n'(H-\int L) - d\cdot p'(H-\int L) + d^2\cdot q'(H-\int L) -$ &c.$]\delta x$
$+ [p'(H - \int L) - d\cdot q'(H - \int L) +$ &c.$]\delta x$
$+ [q'(H - \int L) -$ &c.$]d\delta x +$ &c.

Posant donc pour abréger

$n + n'(H - \int L) = (n)$, $p + p'(H - \int L) = (p)$
$q + q'(H - \int L) = (q)$ &c., & de même $N + N'(H - \int L) = (N)$, $P + P'(H - \int L) = (P)$ $P + Q'(H - \int L) = (Q)$ &c. comme aussi $\nu + \nu'(H - \int L) = (\nu)$, $\pi + \pi'(H - \int L) = (\pi)$, $\chi + \chi'(H - \int L) = (\chi)$ &c., on aura en général

$$\delta\cdot\int Z = \int[(n) - d\cdot(p) + d^2(q) -\text{ &c.}]\delta x + \int[(N) - d\cdot(P) + d^2(Q) -\text{ &c.}]\delta y + \int[(\nu) - d\cdot(\pi) + d^2(\chi) -\text{ &c.}]\delta x + [(p) - d\cdot(q) +\text{ &c.}]\delta x + [(q) -\text{ &c.}]\delta dx +\text{ &c.} + [(P) - d\cdot(Q) +\text{ &c.}]\delta y + [(Q) -\text{ &c.}]\delta dy +\text{ &c.}$$

+

$+ [(\pi) - d\cdot(\chi) + \&c.]\,\delta\zeta + [(\chi) - \&c.]\,\delta d\zeta + \&c.$
$= 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$

Equation réduite à la forme de l'équation (A) du Prob. préc.; donc &c.

X.

Corollaire. Ce ſeroit la même méthode qu'il faudroit ſuivre ſi la quantité Z' renfermoit une autre fonction intégrale indéfinie $\Pi' = \int Z''$, enſorte que $\delta Z' = L'\delta\Pi' + n'\delta x + p'\delta dx + \&c.$, & $\delta Z'' = n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \&c. + N''\delta y + P''\delta dy + Q''\delta d^2y + \&c. + \nu''\delta\zeta + \pi''\delta d\zeta + \chi''\delta d^2\zeta + \&c.$ Alors l'expreſſion de $\delta\int Z$ ſeroit augmentée de la formule $\int L\int L'\int(n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \&c.)$; or cette formule ſe réduit d'abord à $\int[(H - \int L)L'\int(n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \&c.)]$, & enſuite à $\int[(H' - \int(H - \int L)L')\times(n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \&c.)]$, en poſant H' pour la valeur totale de l'intégrale $\int(H - \int L)L'$. Par conſéquent il n'y aura qu'à augmenter, dans la formule (D), la valeur de (n) de la quantité $n''[H' - \int(H - \int L)L]$, celle de (p) de la quantité $p''[H' - \int(H - \int L)L]$, & ainſi des autres.

Il eſt aiſé de voir maintenant le procédé qu'il faudroit ſuivre ſi la formule Z'' contenoit encore une autre formule intégrale $\int Z'''$, & ainſi de ſuite.

X I.

Probleme 3. Trouver l'équation du *maximum*, ou du *minimum* de la formule $\int Z$, lorſque Z eſt donné ſimplement par une équation différentielle qui ne renferme d'autres différences de Z que la premiére.

Solution. Quelle que ſoit l'équation propoſée, pourvû qu'elle ſoit délivrée de tout ſigne d'intégration, il eſt clair, qu'en la différentiant par δ, on pourra toujours la mettre

ſous la forme ſuivante $\delta dZ + T\delta Z = n\delta x + p\delta dx + \&c. + N\delta y + P\delta dy + \&c. + \nu\delta z + \pi\delta dz + \&c.$; d'où l'on tirera, à cauſe de $\delta dZ = d\delta Z$, la valeur de δZ exprimée par $e^{-\int T}\int e^{\int T}(n\delta x + p\delta dx + \&c.)$, & delà $\delta\int Z = \int e^{-\int T}\int e^{\int T}(n\delta x + p\delta dx + \&c.)$.

En ſuivant les principes établis dans le Problême précédent, on ſuppoſera que G ſoit la valeur totale de $\int e^{-\int T}$, & faiſant enſuite $ne^{\int T}(G - \int e^{-\int T}) = (n)$, $pe^{\int T}(G - \int e^{-\int T}) = (p)$, $qe^{\int T}(G - \int e^{-\int T}) = (q)$ &c., on trouvera pour l'expreſſion de $\delta\int Z$ une formule tout-à-fait ſemblable à la formule (D) ci-deſſus.

XII.

Scholie. Les formules qui ſont l'objet des deux Problêmes précédens, ſont analogues à celles que M. Euler a traitées dans le Chap. III. de ſon Ouvrage ſur cette matiére.

Le Lecteur qui ſera curieux de comparer nos ſolutions avec celles que ce ſavant Auteur a trouvées par une méthode différente verra qu'elles s'accordent dans les réſultats, en aïant égard à ce qu'on a dit dans *l'Art. VII. ci-deſſus*. Au reſte M. Euler n'eſt pas allé plus loin, & n'a point examiné les cas où la formule Z dépendroit d'une équation différentielle, d'un ordre plus élévé que le premier. Le Corollaire ſuivant ne laiſſera plus rien à déſirer ſur ce ſujet.

XIII.

Corollaire. Suppoſons que dans l'équation différentielle propoſée il ſe trouve des différences de Z du ſecond ordre; de ſorte qu'en différentiant par δ, il vienne $\delta d^2Z + T\delta dz + V\delta Z = n\delta x + p\delta dx + \&c.$ Je commence par mettre la caractériſtique d avant la caractériſtique δ, enſuite je multiplie toute l'équation par une variable indéter-

déterminée α, & j'en prend la ſomme, en affectant les deux membres du ſigne $\int$; après je transforme le premier membre $\int(\alpha d^2\delta Z + \alpha T d\delta Z + \alpha V \delta Z)$ en $\alpha d\delta Z + (\alpha T - d\alpha)\delta Z + \int[\alpha V - d\cdot(\alpha T - d\alpha)]\delta Z$, & ſuppoſant α tel que $\alpha V - d\cdot(\alpha T - d\alpha) = 0$, j'ai l'équation $d\delta Z + \frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha}\delta Z = \frac{1}{\alpha}\int(n\delta x + p\delta dx + \&c.)\alpha$; d'où l'on tire aiſément $\delta Z = e^{-\int T'}\int\frac{e^{\int T'}}{\alpha}\int(n\delta x + p\delta dx + \&c.)\alpha$; T' étant mis pour $\frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha}$; & enfin $\delta\cdot\int Z = \int e^{-\int T'}\int\frac{e^{\int T'}}{\alpha}\int(n\delta x + p\delta dx + \&c.)\alpha$, formule qui eſt dans le cas de celle qu'on a traitée dans *l'Art. X.*

Par des procédés ſemblables on trouvera l'expreſſion de $\delta\cdot\int Z$ lorſque δZ ſera donnée par une équation différentielle du troiſiéme ordre, & au delà, & cette expreſſion ſera toujours ſuſceptible de la métode expliquée dans le Prob. II.

X I V.

Remarque. L'équation de condition $\alpha V - d\cdot(\alpha T - d\alpha) = 0$ eſt du ſecond ordre, & ne peut-être intégrée que dans certains cas particuliers; mais notre ſolution n'en eſt pas moins générale. Car, pour délivrer l'équation du *maximum*, ou du *minimum* de l'inconnue α, il ne faudra que la combiner avec la précédente par le moïen de pluſieurs différentiations réitérées; il n'y aura de difficulté que la longueur du calcul.

X V.

Scholie. Il eſt clair que la méthode du Corol. préc. ſuffit pour déterminer les *maxima*, & les *minima* de toutes

les formules intégrales imaginables ; car dénotant par Π la formule propoſée, il ſera toujours poſſible d'exprimer Π par une équation différentielle, qui ne renferme aucun ſigne d'intégration ; ainſi l'on aura, en différentiant par δ, une nouvelle équation qui contiendra $\delta\Pi$ avec ſes différences $d\delta\Pi$ &c., & on en tirera l'expreſſion intégrale de $\delta\Pi$, & par conſéquent l'équation du *maximum*, ou *minimum* par les régles enſeignées.

APPENDICE I.

Par la méthode qui vient d'être expliquée on peut auſſi chercher les *maxima*, & les *minima* des ſurfaces courbes, d'une maniére plus générale qu'on ne l'a fait juſqu'ici.

Pour ne donner là-deſſus qu'un exemple très-ſimple, ſuppoſons qu'il faille trouver la ſurface qui eſt la moindre de toutes celles qui ont un même périmètre donné. Aïant pris trois coordonnées rectangles x, y, z, & la ſurface étant ſuppoſée repréſentée par l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, on trouvera pour l'élément de la quadrature $dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)}$; par conſéquent la ſurface entiére ſera $= \iint dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)}$, où les deux ſignes $\iint$ marquent deux intégrations ſucceſſives, l'une par rapport à x & l'autre par rapport à y, ou réciproquement. On aura donc, ſuivant notre métode, $\delta\cdot\iint dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)} = 0$ ce qui ſe réduit d'abord à $\iint\delta\cdot dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ = (en différentiant, & ſuppoſant dx, dy conſtantes) $\iint dx\,dy\,\frac{p\,\delta p + q\,\delta q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = 0$. Or $p = (\frac{dz}{dx})$, $q = (\frac{dz}{dy})$; donc $\delta p = (\frac{\delta dz}{dx}) = (\frac{d\delta z}{dx})$, $\delta q = (\frac{\delta dz}{dy}) = (\frac{d\delta z}{dy})$; donc $\iint dx\,dy\,\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\times(\frac{d\delta z}{dx}) + \iint dx dy$

$\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dy}\right) = 0$. Maintenant, comme dans l'expreſſion $\left(\frac{d\delta\zeta}{dx}\right)$, $d\delta\zeta$ exprime la différence de $\delta\zeta$, x ſeul étant variable, il eſt clair que pour faire diſparoître cette différence, il ne faudra conſidérer, dans la formule $\iint dx\,dy$ $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{\delta d\zeta}{dx}\right)$, que l'intégration rélative à x; ſoit donc pris l'intégrale $\int dx \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dx}\right)$, où x ſeul varie; il eſt facile de la transformer par des intégrations par parties, en $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\delta\zeta - \int d \cdot \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \delta\zeta$, ce qui ſe réduit, en ſuppoſant les premiers & les derniers ζ donnés, à $-\int d \cdot \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \delta\zeta$, la différentielle de $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ étant priſe en variant ſeulement x. Soit, pour abreger, $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = P$; on aura, en multipliant par dy & intégrant de nouveau, $\int dy \int dx \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dx}\right)$, ou (ce qui eſt la même choſe) $\iint dx\,dy$ $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dx}\right) = -\int dy \int dx \left(\frac{dP}{dx}\right)\delta\zeta, = -\iint dx\,dy \left(\frac{dP}{dx}\right)\delta\zeta$. On trouvera de même, en n'aïant égard qu'à la variabilité de y, & poſant Q pour $\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$, $\int dy \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dy}\right) = Q\delta\zeta - \int dy \left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta\zeta = -\int dy \left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta\zeta$, & $\iint dx\,dy \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dy}\right) = -$

$\iint dx$

$\iint dx\,dy\,(\frac{dQ}{dy})\,\delta z$. Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle deviendra $-\iint dx\,dy\,[(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})]\,\delta z = 0$, laquelle devra être vraie indépendenment de δz; on aura donc en général, pour tous les points de la surface cherchée, $(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy}) = 0$; ce qui montre que cette quantité $P\,dy - Q\,dx$, savoir $\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ doit être une différentielle complette. Le Problême se réduit donc à chercher p & q par ces conditions que $p\,dx + q\,dy$, & $\frac{p\,dy - p\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ soient l'une & l'autre des différentielles exactes.

Il est d'abord clair qu'on satisfera à ces conditions en faisant p & q constantes, ce qui donnera un plan quelconque pour la surface cherchée, mais ce ne sera là qu'un cas très-particulier; car la solution générale doit être telle que le périmétre de la surface puisse être déterminé à volonté.

Si la surface cherchée ne devoit être un *minimum*, qu'entre toutes celles qui forment des solides égaux, alors $z\,dx\,dy$ étant l'élément du solide, il faudroit que la formule $\iint z\,dx\,dy$ demeurât la même pendant que l'autre la formule $\iint dx\,dy\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ varie; on auroit donc à la fois les deux équations $\delta \cdot \iint z\,dx\,dy = 0$, & $\delta \cdot \iint dx\,dy\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = 0$, savoir $\iint dx\,dy\,\delta z = 0$, & $\iint dx\,dy\,[(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})]\,\delta z = 0$. Qu'on multiplie la premiére par un coéficient quelconque k, & qu'on l'ajoute à la seconde, on aura $\iint dx\,dy\,[k + (\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})]\,\delta z = 0$, d'où l'on tire l'équation générale $k + (\frac{dP}{dx})$

+

$+ \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0$, qui aura lieu toutes les fois que $(P + kx)\,dy - Q\,dx$ ſera une différentielle complette. Donc la queſtion ſera réduite à chercher p, & q par cette condition que $p\,dx + q\,dy$ étant une différentielle exacte, $\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} + kx\,dy$ en ſoit une auſſi.

L'équation de la ſphére eſt en général $(z - a)^2 + (y - b)^2 + (x - c)^2 = r^2$; ce qui donne

$$dz = \frac{(y - b)\,dy + (x - c)\,dx}{\sqrt{[r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2]}}, \text{ donc}$$

$$p = \frac{x - c}{\sqrt{[r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2]}},$$

$$q = \frac{y - b}{\sqrt{[r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2]}}, \text{ donc}$$

$$\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} + kx\,dy = \left(\frac{1}{r} + k\right) x\,dy - \frac{1}{r}\,y\,dx + \frac{b\,dx - c\,dy}{r},$$ qui eſt une différentielle complette ſi $\frac{1}{r} + k = -\frac{1}{r}$.

Appendice 2.

Soit propoſé de trouver celui, d'entre tous les poligones qui ont un nombre donné de côtés donnés, dont l'aire eſt la plus grande. La méthode de ce Mémoire eſt auſſi applicable à ces ſortes de queſtions; car ſoit y une ordonnée quelconque du poligone, & x l'abſciſſe correſpondante, on aura pour l'élément fini de l'aire, $(y + \frac{1}{2}dy)\,dx$ comme il eſt aiſé de s'en aſſurer par l'inſpection d'une figure fort ſimple; par conſéquent l'aire entiére ſera $\int (y + \frac{1}{2}dy)\,dx$. Donc, ſuivant notre méthode, $\delta \cdot \int (y + \frac{1}{2}dy)\,dx = \int [\delta y\,dx + \frac{1}{2}\delta dy\,dx + (y + \frac{1}{2}dy)\,\delta dx] = 0$. Or chaque

chaque côté du poligone eſt en général $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc on aura $\delta \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$, c'eſt-à-dire $dx\,\delta dx + dy\,\delta dy = 0$, & $\delta dx = -\frac{dy\,\delta dy}{dx}$; ſubſtituant cette valeur de δdx dans l'équation précédente, elle deviendra celle-ci $\int [dx\,\delta y + (\frac{1}{2}\,dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\,\frac{dy^2}{dx})\,\delta dy] = 0$. Qu'on mette au lieu de δdy ſon égale $d\delta y$, & qu'on faſſe pour abréger $\frac{1}{2}\,dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\,\frac{dy^2}{dx} = \zeta$, on aura la formule $\zeta d\delta y$ qu'il faudra intégrer par parties, afin de faire diſparoître la différence de δy. Pour cela je remarque que dans le cas des différences finies, on a $d \cdot \zeta\,\delta y = d\zeta\,\delta y + \zeta d\delta y + d\zeta d\delta y = \zeta d\delta y + d\zeta\,(\delta y + d\delta y) =$ (en dénotant par $\delta y'$ le terme qui ſuit δy) $\zeta d\delta y + d\zeta\,\delta y'$; donc $\zeta\,\delta y = \int \zeta d\delta y + \int d\zeta\,\delta y'$, donc $\int \zeta d\delta y = \zeta\,\delta y - \int d\zeta\,\delta y'$, où (ce qui eſt la même choſe) $\zeta dy - \int d`\zeta\,\delta y$, $d`\zeta$ étant le terme qui précéde $d\zeta$, & qui par conſéquent, eſt multiplié par δy; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation ci-deſſus, elle deviendra $\zeta\,\delta y + \int (dx - d`\zeta)\,\delta y = 0$.

Suppoſons que le poligone coupe l'axe en deux points, en ſorte que le premier, & le dernier y ſoient nuls, auſſi bien que leurs différences δy; le terme $\zeta\,\delta y$ qui eſt hors du ſigne $\int$, diſparoîtra; & l'on aura ſimplement $\int (dx - d`\zeta)\,\delta y = 0$; ce qui donnera en général $dx - d`\zeta = 0$; c'eſt-à-dire, en intégrant, $a = x - `\zeta = x' - \zeta = x + dx - \zeta = x + dx - \frac{1}{2}\,dx + \frac{y\,dy}{dx} + \frac{1}{2}\,\frac{dy^2}{dx}$; multipliant par dx eſt réduiſant, on aura $a\,dx = (x + \frac{1}{2}\,dx)\,dx + (y + \frac{1}{2}\,dy)\,dy = \frac{1}{2}\,d \cdot x^2 + \frac{1}{2}\,d \cdot y^2$; & intégrant de nouveau, $2ax + r^2 = x^2 + y^2$. Equation à un cercle,

cle, dont le centre eſt dans l'axe des x, donc l'on voit que le poligone cherché doit être tel qu'il puiſſe être inſcrit dans la demie circonférence d'un cercle.

Si la baſe du poligone étoit donnée, alors il faudroit que le dernier δx fût $= 0$; or $\delta x = -\int \frac{dy\, d\delta y}{dx}$; il faudroit donc que la valeur totale de $\int \frac{dy\, d\delta y}{dx}$ fût $= 0$ en même tems que celle de $\int [dx\delta y + (\frac{1}{2}dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx})\, d\delta y]$ eſt auſſi $= 0$. Pour cela ſoit multipliée la premiére formule par un coéficient indéterminé k, & enſuite ajoutée à la ſeconde, on aura

$$\int [dx\delta y + (k\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx})\, ddy] = 0;$$

donc, faiſant $k\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx} = \zeta$, on parviendra, comme ci-deſſus, à l'équation $a = x + dx - \zeta$, qui ſe réduit, en multipliant par dx, à $a\,dx = k\,dy + \frac{1}{2}\,d\cdot x^2 + \frac{1}{2}\,d\cdot y^2$, dont l'intégrale eſt $ax + b^2 = ky + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$; équation pour un cercle en général; d'où réſulte ce Théoréme, que le plus grand poligone qu'on puiſſe former avec des côtés donnés eſt celui qui peut être inſcrit dans un cercle.

M. Cramer a démontré ce théoréme ſyntétiquement dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1752.

Si l'on veut que les cotés du poligone ne ſoient pas donnés chacun en particulier, mais ſeulement leur ſomme, c'eſt-àdire le périmètre du poligone, on fera ſimplément égale à zéro la différence de l'intégrale $\int V(dx^2 + dy^2)$; ce qui donnera l'équation $\delta \cdot \int V(dx^2 + dy^2)$

$= \int$

$= \int \frac{dx\delta dx + dy\delta dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$, laquelle devra avoir lieu en même tems que l'équation du *maximum* $\int [dx\delta y + \frac{1}{2} dx\delta dy + (y + \frac{1}{2} dy)\delta dx] = 0$. Multipliant donc une de ces équations, par un coéficient indéterminé k, & les ajoutant enſemble, on aura en général $\int [dx\delta y + (\frac{1}{2} dx + \frac{k\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}})\delta dy + (y + \frac{1}{2} dy + \frac{k\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}})\delta dx] = 0$. Soit ſuppoſé $\frac{1}{2} dx + \frac{k\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = z$, & $y + \frac{1}{2} dy + \frac{k\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = u$, on aura $\int (dx\delta y + z\delta dy + u\delta dx) = 0$, équation qui ſe transforme, par la même méthode que ci-deſſus, en $z\delta y + u\delta x - \int [(dx - d'z)\delta y - d'u\delta x) = 0$, d'où l'on tire $dx - d'z = 0$, & $d'u = 0$; on aura donc, en intégrant, $x - z = a$, ſavoir $x + dx - z = a$, & $u = b$, ſavoir $u = b$; c'eſt-à-dire, en ſubſtituant pour z & u leurs valeurs, $x + \frac{1}{2} dx - \frac{k\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = a$, $y + \frac{1}{2} dy + \frac{k\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = b$.

Qu'on multiplie la premiére par dx, & la ſeconde par dy, & qu'enſuite on les ajoute enſemble, il viendra $(x + \frac{1}{2} dx)dx + (y + \frac{1}{2} dy)dy = a\,dx + b\,dy$; & en intégrant $\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 = ax + by + r^2$, équation à un cercle en général. Qu'on reprenne les mêmes équations, & qu'on les quarre, après avoir tranſpoſé les termes $x + \frac{1}{2} dx$ & $y + \frac{1}{2} dy$, on aura $\frac{k^2 dy^2}{dx^2 + dy^2} = (a - x - \frac{1}{2} dx)^2$, $\frac{k^2 dx^2}{dx^2 + dy^2} = (b - y - \frac{1}{2} dy)^2$; ces équations étant ajoutées enſemble donnent, $k^2 = (a - x - \frac{1}{2} dx)^2 + (b - y - \frac{1}{2} dy)^2 = a^2 + b^2 - 2ax - 2by$;

+

$+ x^2 + y^2 - (a-x)\,dx - (b-y)\,dy + \frac{1}{4}dx^2 + \frac{1}{4}dy^2$ $= [$ à cauſe de $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2$, & $(a-x)\,dx + (b-y)\,dy = \frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{2}dy^2\,]\ a^2 + b^2 + r^2 - \frac{1}{4}dx^2 - \frac{1}{4}dy^2$; donc $\surd(dx^2 + dy^2) = 2\surd(a^2 + b^2 + r^2 - k^2)$ ce qui montre que tous les côtés du poligone doivent être égaux entr'eux, & que par conſéquent le poligone doit être régulier.

A l'égard des termes $\zeta\delta y$, $u\delta x$, il eſt clair que ces termes diſparoîtront d'eux mêmes, ſi on ſuppoſe les premiers, & les derniers x, & y donnés; mais ſi la baſe du poligone étant donnée, & $= c$, le y qui y répond ne ne l'étoit pas, il faudroit faire u & $\zeta = 0$, lorſque $x = c$; on auroit donc $b = 0$, $c = a$, & la baſe c deviendroit le diamètre du cercle circonscrit au poligone.

Fautes à corriger dans le Mémoire précédent.

Pag. 173. *lign.* 16.; Brachryſtochrone; *liſez* Brachyſtochrone. *Faites la même correction dans la ſuite du Mémoire.*

Pag. 174. *lign.* 1. de calcul; *liſez* du calcul.

dans la lign. 9. *de l'Art. I.* les quantités x, y, ζ, d^2x, d^2y, $d^2\zeta$, *&c.*; *mettez* les quantités x, y, ζ, dx, dy, $d\zeta$, d^2x, d^2y, $d^2\zeta$ *&c.*

Pag. 175. *dans la ligne* 5. *de l'équation* (C); *changez* δx *en* $\delta\zeta$.

Pag. 177. *dans la ligne* 4. *de l'Art. III. au lieu de* $dP = 0$, $dP' = 0$; *écrivez* $-dP = 0$; $-d\pi = 0$.

Pag. 182. *dans la ligne* 16. de l'Art. VIII. *après ces mots* l'expreſſion de δZ; *ajoutez pour plus d'intelligence* de l'Art. I.

Application de la Méthode précédente à la ſolution de différens Problêmes de Dynamique.

PAR M. DE LA GRANGE.

M. Euler dans une Addition à ſon excellent Ouvrage qui a pour titre *Methodus maximorum &c.* a démontré ce Principe que, dans les trajectoires que des corps décrivent par des forces centrales, l'intégrale de la viteſſe multipliée par l'élément de la courbe fait toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

Je me propoſe ici de généraliſer ce même Principe, & d'en faire voir l'uſage pour réſoudre avec facilité toutes les queſtions de Dynamiques.

Principe général.

Soient tant de corps qu'on voudra M, M', M'' *&c.* qui agiſſent les uns ſur les autres d'une manière quelconque, & qui ſoient, de plus, ſi l'on veut, animés par des forces centrales proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances; que s, s', s'' *&c.* dénotent les eſpaces parcourus par ces corps dans le tems t, & que u, u', u'' *&c.* ſoient leurs viteſſes à la fin de ce tems; la formule $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' +$ *&c.* ſera toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

I.

Probleme 1. Trouver le mouvement d'un corps M attiré vers tant de centres fixes qu'on voudra par des forces P, Q, R *&c.* exprimées par des fonctions quelconques des diſtances.

Solu-

SOLUTION. Comme il n'y a ici qu'un ſeul corps M, la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum* ſera ſimplement $M\int u\,ds$; on aura donc, ſuivant la méthode expliquée dans le Mémoire précédent, l'équation $\delta \cdot M\int u\,ds = 0$, ou, en diviſant par M qui eſt conſtante, $\delta \cdot \int u\,ds = 0$. Or $\delta \cdot u\,ds = u\,\delta\,ds + \delta u\,ds$; donc changeant l'expreſſion $\delta \cdot \int u\,ds$ en ſon équivalente $\int \delta \cdot u\,ds$, comme on l'a enſeigné (*Art. I. Mém. précéd.*) on aura l'équation $\int (u\,\delta\,ds + \delta u\,ds) = 0$.

Soient p, q, r *&c.* les diſtances du corps M aux centres des forces P, Q, R *&c.*, on aura, comme tous les Géométres le ſavent, $\frac{u^2}{2} = \text{conſt.} - \int (P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.)$ donc $u\,\delta u = -\delta \cdot \int (P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.) = -\int (\delta P\,dp + P\,\delta\,dp + \delta Q\,dq + Q\,\delta\,dq + \delta R\,dr + R\,\delta\,dr + \&c.) =$ (en changeant $\delta\,dp$, $\delta\,dq$, $\delta\,dr$ *&c.* en $d\,\delta p$, $d\,\delta q$, $d\,\delta r$ *&c.* & intégrant par parties les termes $P\,d\,\delta p$, $Q\,d\,\delta q$, $R\,d\,\delta r$ *&c.*) $- P\,\delta p - Q\,\delta q - R\,\delta r - \&c. + \int (\delta P\,dp - dP\,\delta p + \delta Q\,dq - dQ\,\delta q + \delta R\,dr - dR\,\delta r + \&c.)$. Or (*hip.*) $P =$ fonct. p, $Q =$ fonct. q, $R =$ fonct. r *&c.*, on trouvera donc, en différentiant $\frac{\delta P}{\delta p} = \frac{dP}{dp}$, $\frac{\delta Q}{\delta q} = \frac{dQ}{dq}$, $\frac{\delta R}{\delta r} = \frac{dR}{dr}$ *&c.*, & par conſéquent $\delta P\,dp - dP\,\delta p = 0$, $\delta Q\,dq - dQ\,\delta q = 0$, $\delta R\,dr - dR\,\delta r = 0$ *&c.*; donc $u\,\delta u = -P\,\delta p - Q\,\delta q - R\,\delta r - \&c.$, & $\delta u\,ds = -P\,dt\,\delta p - Q\,dt\,\delta q - R\,dt\,\delta r - \&c.$, en mettant au lieu de $\frac{ds}{u}$ ſon égale dt; donc l'équation ci-deſſus ſe changera en celle-ci

$$\int (u\,\delta\,ds - P\,dt\,\delta p - Q\,dt\,\delta q - R\,dt\,\delta r - \&c.) = 0 \quad . \quad . \quad (A)$$

Il faut maintenant chercher le rapport que les différences δp, δq, δr, $\delta\,ds$ ont entr'elles; ce qui ſe fera différem-

ment

ment selon les différentes sortes de coordonnées, qu'on emploïera pour représenter la trajectoire. Et premiérement soient prises trois coordonnées rectangles x, y, z; on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; par conséquent $\delta ds = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz}{ds} =$ (en changeant δdx &c. en $d\delta x$ &c.) $\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}$; donc $\int u\delta ds = \int\left(\frac{u dx}{ds} d\delta x + \frac{u dy}{ds} d\delta y + \frac{u dz}{ds} d\delta z\right)$. Qu'on fasse disparoître dans cette expression les différentielles de δx, δy, δz par la méthode des intégrations par parties, pratiquée dans le Mém. préc., on aura la transformée suivante

$$\int u\delta ds = -\int\left(d\cdot\frac{udx}{ds}\times\delta x + d\cdot\frac{udy}{ds}\times dy + d\cdot\frac{udz}{ds}\times\delta z\right) + \frac{udx}{ds}\delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{udz}{ds}\delta z.$$

Il ne s'agit plus que d'exprimer les différences δp, δq, δr &c. par les δx, δy, δz. Pour cela on cherchera les valeurs analitiques des lignes p, q, r &c. rapportées aux coordonnées x, y, z, & en prendra leurs différentielles, en mettant δ pour d. Soit supposé en général $dp = Ldx + ldy + \lambda dz$, $dq = Mdx + mdy + \mu dz$, $dr = Ndx + ndy + \nu dz$; il est clair qu'on aura aussi $\delta p = L\delta x + l\delta y + \lambda\delta z$, $\delta q = M\delta x + m\delta y + \mu\delta z$, $\delta r = N\delta x + n\delta y + \nu\delta z$. Donc si on fait pour abréger

$$PL + QM + RN = \Pi$$
$$Pl + Qm + Rn = \pi$$
$$P\lambda + Q\mu + R\nu = \Psi, \text{ on aura}$$

$P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$ &c. $= \Pi\delta x + \pi\delta y + \Psi\delta z$.

Faisant toutes ces différentes substitutions dans l'équation (A), elle deviendra

$$(B) \ldots\ldots\ldots \frac{udx}{ds}\delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{udz}{ds}\delta z$$

—

$$-\int([d\cdot\frac{udx}{ds}+\Pi dt]\delta x+[d\cdot\frac{udy}{ds}+\pi dt]\delta y$$

$$+[d\cdot\frac{ud\zeta}{ds}+\Psi dt]\delta\zeta)=0;$$

Equation qui doit avoir lieu, quelques valeurs qu'on ſuppoſe aux différences δx, δy, $\delta\zeta$; c'eſt pourquoi l'on fera les trois équations ſuivantes:

$$d\cdot\frac{udx}{ds}+\Pi dt=0$$

$$d\cdot\frac{udy}{ds}+\pi dt=0$$

$$d\cdot\frac{ud\zeta}{ds}+\Psi dt=0.$$

Ce ſont ces équations qui ſerviront à déterminer la courbe décrite par le corps M, & ſa viteſſe à chaque inſtant.

Si on met dt au lieu de $\frac{ds}{u}$, qu'on multiplie la premiére équation par $\frac{dx}{dt}$, la ſeconde par $\frac{dy}{dt}$, la troiſiéme par $\frac{d\zeta}{dt}$, & qu'enſuite on les intégre, on aura $\frac{dx^2}{2dt^2}=a^2-\int\Pi dx$, $\frac{dy^2}{2dt^2}=b^2-\int\pi dy$, & $\frac{d\zeta^2}{2dt^2}=c^2-\int\Psi d\zeta$; d'où l'on tire en chaſſant dt, & extraïant la racine quarrée

$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-\int\Pi dx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(b^2-\int\pi dy)}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-\int\Pi dx)}}=\frac{d\zeta}{\sqrt{(c^2-\int\Psi d\zeta)}};$$

Equations, où les indéterminées ſeront ſéparées ſi $\Pi=$ fonct. x, $\pi=$ fonct. y, $\Psi=$ fonct. ζ.

II.

REMARQUE. Quant aux termes $\frac{udx}{ds}\delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{ud\zeta}{ds}d\zeta$; on pourra ſe diſpenſer d'y avoir égard, en ſuppoſant que les deux extrémités de la trajectoire ſoient données de poſition; car cette ſuppoſition fera évanoüir les premiers & les derniers δx, δy, $\delta\zeta$, & par conſéquent auſſi tous les termes en queſtion. (*Voïés l'Art. IV. du Mém. préc.*)

III.

COROLLAIRE. Imaginons que le mobile M ſollicité par les mêmes forces P, Q, R &c. ſoit contraint de ſe mouvoir ſur une ſurface courbe donnée par l'équation $d\zeta = p\,dx + q\,dy$; en changeant d en δ, on aura $\delta\zeta = p\,\delta x + q\,\delta y$; ſubſtituant cette valeur de $\delta\zeta$ dans l'équation (B), & faiſant les deux coéficiens de δx, & δy chacun $= 0$, on aura

$$d\cdot\frac{udx}{ds} + \Pi\,dt + \left[d\cdot\frac{ud\zeta}{ds} + \Psi\,dt\right]p = 0$$

$$d\cdot\frac{udy}{ds} + \pi\,dt + \left[d\cdot\frac{ud\zeta}{ds} + \Psi\,dt\right]q = 0;$$

Deux équations, qui, avec l'équation donnée $d\zeta = p\,dx + q\,dy$, ſuffiront pour réſoudre le Problême.

IV.

AUTRE SOLUTION. Qu'on prenne, à la place des deux coordonnées rectangles x, y, un rayon variable x qui tourne autour d'un point fixe dans le même plan des x & y, & dont la poſition à chaque inſtant ſoit déterminée par

par un angle φ. Conſervant la troiſiéme coordonnée ζ, qu'on imaginera élevée de l'extrémité du rayon x perpendiculairement au plan de l'angle φ, il eſt facile de trouver que l'élément ds de la courbe ſera $= \sqrt{(x^2 d\varphi^2 + dx^2 + d\zeta^2)}$; ainſi on aura en différentiant $\delta ds = \frac{x^2 d\varphi \delta d\varphi + x d\varphi^2 \delta x + dx \delta dx + d\zeta \delta d\zeta}{ds} = \frac{x^2 d\varphi d\delta\varphi + x d\varphi^2 \delta x + dx d\delta x + d\zeta d\delta\zeta}{ds}$.

Mettant donc cette valeur dans la formule intégrale $\int u \delta ds$, & faiſant diſparoître les différentielles de $\delta\varphi$, δx, $\delta\zeta$, par la voie ordinaire des intégrations par parties, on aura $\int u \delta ds = -\int [d \cdot \frac{u x^2 d\varphi}{ds} \times \delta\varphi + (d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\varphi^2}{ds}) \delta x + d \cdot \frac{u d\zeta}{ds} \times \delta\zeta] + \frac{u x^2 d\varphi}{ds} \delta\varphi + \frac{u dx}{ds} \delta x + \frac{u d\zeta}{ds} \delta\zeta$.

Après la ſubſtitution de cette valeur de $\int u \delta ds$ dans l'équation (A) de *l'Art. I.*, il n'y aura plus qu'à réduire les différences δp, δq, δr *&c.* aux différences δx, δy, $\delta\zeta$. Pour cela ſoit ſuppoſé en général

$$dp = L dx + l d\varphi + \lambda d\zeta$$
$$dq = M dx + m d\varphi + \mu d\zeta$$
$$dr = N dx + n d\varphi + \nu d\zeta,$$

on aura de même

$$\delta p = L \delta x + l \delta\varphi + \lambda \delta\zeta$$
$$\delta q = M \delta x + m \delta\varphi + \mu \delta\zeta$$
$$\delta r = N \delta x + n \delta\varphi + \nu \delta\zeta.$$

Donc ſi on fait les mêmes ſubſtitutions que dans la ſolution précédente, on aura auſſi $P \delta p + Q \delta q + R \delta r$ *&c.* $= \Pi \delta x + \pi \delta\varphi + \Psi \delta\zeta$, & l'équation (A) deviendra enfin

$$(C) \ldots\ldots\ldots \frac{u x^2 d\varphi}{ds}\delta\varphi + \frac{u dx}{ds}\delta x + \frac{u d\zeta}{ds}\delta\zeta$$

$$- \int\left[\left(d\cdot\frac{u x^2 d\varphi}{ds} + \pi dt\right)\delta\varphi + \left(d\cdot\frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\varphi^2}{ds} + \Pi dt\right)\delta x + \left(d\cdot\frac{u d\zeta}{ds} + \Psi dt\right)\delta\zeta\right] = 0.$$

Maintenant si on suppose, comme dans *l'Art.* II. que le premier & le dernier point de la trajectoire sont donnés, il est clair que les $\delta\varphi$, δx, $\delta\zeta$ qui y répondent seront nulles d'elles mêmes; & que par conséquent, les trois premiers termes de cette équation le seront aussi. Donc pour satisfaire au reste de l'équation, indépendanment des différences indéterminées $\delta\varphi$, δx, $\delta\zeta$, on fera chacun de leurs coéficiens $= 0$, & l'on aura pour ses équations générales du mouvement du corps

$$d\cdot\frac{u x^2 d\varphi}{ds} + \pi dt = 0$$

$$d\cdot\frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\varphi^2}{ds} + \Pi dt = 0$$

$$d\cdot\frac{u d\zeta}{ds} + \Psi dt = 0.$$

Qu'on mette dans ces équations dt pour $\frac{ds}{u}$, & qu'on intégre la premiére, après l'avoir multipliée par $\frac{x^2 d\varphi}{dt}$, on aura $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 d\varphi}{dt}\right)^2 = a^2 - \int \pi x^2 d\varphi$, d'où l'on tire $dt = \frac{x^2 d\varphi}{\sqrt{(2a^2 - 2\int \pi x^2 d\varphi)}}$; substituant cette valeur dans la seconde équation; & faisant pour abréger $\sqrt{(2a^2 - 2\int \pi x^2 d\varphi)} = V$ on aura

$$d\cdot\frac{V dx}{x^2 d\varphi} - \frac{V d\varphi}{x} + \frac{\Pi x^2 d\varphi}{V} = 0,$$

ou

ou, en mettant y pour $\frac{1}{x}$,

$$-d.\frac{V\,dy}{d\varphi} - Vy\,d\varphi + \frac{\Pi\,d\varphi}{Vy^2} = 0,$$

ce qui donnera par la différentiation, en regardant $d\varphi$ comme constante, & multipliant par $\frac{\delta\varphi}{V}$,

$$-d^2y - \frac{dV}{V}dy - Vy\,d\varphi^2 + \frac{\Pi\,d\varphi^2}{V^3y^3} = 0,$$

savoir, à cause de $\frac{dV}{V} = -\frac{\pi x^2 d\varphi}{V^2} = -\frac{\pi\,d\varphi}{V^2y^2}$,

$$-d^2y - y\,d\varphi^2 + \frac{\Pi + \frac{\pi\,dy}{d\varphi}}{V^2y^2}\,d\varphi^2 = 0,$$ équation constructible dans plusieurs cas particuliers.

Enfin la troisiéme équation étant multipliée par $\frac{d\zeta}{dt}$, & ensuite intégrée deviendra $\frac{d\zeta^2}{2dt^2} = b^2 - \int\Psi\,d\zeta$, d'où l'on tirera la valeur de dt, laquelle étant comparée à celle qu'on a trouvée plus haut fournira l'équation $\frac{d\zeta}{\sqrt{(2b^2 - 2\int\Psi d\zeta)}} = \frac{d\varphi}{Vy^2}$.

V.

Corollaire. Si le corps étoit obligé de se mouvoir sur une surface courbe donnée, alors rapportant cette surface aux trois variables x, φ, ζ; & la supposant exprimée par l'équation $d\zeta = p\,d\varphi + q\,dx$, on mettroit dans l'équation (C), au lieu de $\delta\zeta$, $p\,\delta\varphi + q\,\delta x$, ensuite on égaleroit à zéro les coéficiens de δx, & $\delta\varphi$, & l'on auroit

$$d.\frac{ux^2\,d\varphi}{ds} + \pi\,dt + \left(d.\frac{u\,d\zeta}{ds} + \Psi\,dt\right)p = 0$$

$$d.\frac{u\,dx}{ds} - \frac{ux\,d\varphi^2}{ds} + \Pi\,dt + \left(d.\frac{u\,d\zeta}{ds} + \Psi\,dt\right)q = 0,$$

VI.

Remarque 1. Nous avons supposé que les forces P, Q, R &c. étoient comme des fonctions quelconques des distances p, q, r &c.; cependant il est facile de démontrer, par les principes de Dynamique, que les équations trouvées sont générales pour toutes sortes de forces accélératrices; & l'on peut d'ailleurs s'en convaincre par cette seule raison, que les équations dont il s'agit, ne renferment point la loi suivant laquelle les forces P, Q, R &c. croissent ou décroissent, mais seulement les quantités & les directions instantanées de ces forces, comme il est aisé de le voir en substituant pour Π, π & Φ leurs valeurs. Au reste, à examiner les solutions précédentes, il est évident que l'hipotèse de P = fonct. p, Q = fonct. q, R = fonct. r &c. ne sert qu'à rendre = o la formule intégrale $\int(\delta P dp - dP\delta p, + \delta Q dq - dQ\delta q, + \delta R dr - dR\delta r$ &c.). Or pour cela il suffiroit que les quantités P, Q, R &c. eussent entr'elles un rapport tel, que $Pdp\delta - dP\delta p + \delta Q dq - dQ\delta q + \delta R dr - dR\delta r +$ &c. = o; soient donc P, Q, R &c. des fonctions quelconques de p, q, r &c., de sorte que l'on ait par la différentiation $dP = Adp + Bdq + Cdr$ &c., $dQ = Ddp + Edq + Fdr$ &c. $dR = Gdp + Hdq +$ $+ Idr$ &c.; il est clair qu'on aura également $\delta P = A\delta p + B\delta q + R\delta r +$ &c. $\delta Q = D\delta p + E\delta q + F\delta r$ &c. $\delta R = G\delta p + H\delta q + I\delta r$ &c. Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, & réduisant on aura $(B - D)\times(dp\delta q - dq\delta p) + (C - G)\times(dp\delta r - dr\delta p) + (F - H)\times(dq\delta r - dr\delta q) = o$, donc $B - D = o$, $C - G = o$, $F - H = o$, savoir $(\frac{dP}{dq}) = (\frac{dQ}{dp})$, $(\frac{dP}{dr}) = (\frac{dR}{dp})$, $(\frac{dQ}{dr}) = (\frac{dR}{dq})$; c'est-à-dire que $Pdp + Qdq + Rdr$ &c. devra être une

différ-

différentielle complette. Si cette condition a lieu la valeur de $u\delta u$ ſera ſimplement $-P\delta p - Q\delta q - R\delta r - \&c.$; autrement, il faudra encore tenir compte de l'intégrale $\int(\delta P\,dp - dP\delta p + \&c.)$ pour rendre la formule $\int u\,ds$ un vrai *maximum*, ou *minimum*; mais les équations qu'on trouveroit alors ne ſeroient plus les véritables équations du mouvement du corps.

VII.

Remarque 2. Ce Problême eſt le ſeul, auquel M. Euler ait appliqué ſon Principe. Il l'a auſſi réſolu pour les deux cas, des coordonnées rectangles, & des rayons partant d'un centre fixe. Mais pour pouvoir comparer ſes ſolutions avec les nôtres, il faut remarquer; 1.° Que M. Euler n'a conſidéré que des courbes à ſimple courbure, 2.° Qu'il n'a cherché le *maximum*, ou le *minimum* de la formule $\int u\,ds$ qu'eu égard à la variabilité de l'ordonnée y dans le premier cas, & à celle de l'angle que nous avons nommé φ, dans le ſecond; *Voïés l'Addition citée au commencement de ce Mémoire.*

Au reſte il eſt clair que par nôtre Méthode on pourra encore varier la ſolution de ce Problême en pluſieurs autres maniéres, ſelon les différentes ſortes de coordonnées qu'on choiſira pour repréſenter la trajectoire cherchée.

VIII.

Problême 2. général. Soit un ſiſtême quelconque de pluſieurs corps, M, M', M'' &c., qui ſoient ſollicités par tant de forces centrales qu'on voudra, ſavoir M par les forces P, Q, R &c., M' par les forces P', Q', R' &c. M'' par les forces P'', Q'', R'' &c., & qui agiſſent, de plus, les uns ſur les autres par des forces quelconques d'attraction

traction mutuelle; trouver le mouvement de chacun de ces corps.

SOLUTION. Tout se réduit à rendre la formule $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' + \&c.$ un *maximum*, ou un *minimum*. On fera donc, suivant notre méthode, $\delta \cdot M\int u\,ds + \delta \cdot M'\int u'\,ds' + \delta \cdot M''\int u''\,ds'' + \&c. = 0$. Or $\delta \cdot M\int u\,ds = (\text{à cause que } M \text{ est constant})\ M\delta \cdot \int u\,ds = M\int (u\,\delta ds + u\,\delta u\,dt)$, *Art. I.*, $= \int M(u\,\delta ds + u\,\delta u\,dt)$. On trouvera de même, en substituant toujours dt pour $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ $\&c.$, $\delta \cdot M'\int u'ds' = \int (u'\delta ds' + u'\delta u'dt)$, $\delta \cdot M''\int u''ds'' = \int M''(u''\delta ds'' + u''\delta u''dt)$, & ainsi de suite; on aura donc l'équation

$(D)\ \ldots \int (Mu\,\delta ds + M'u'\delta ds' + M''u''\delta ds'' + \&c. + [Mu\,\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''\ \&c.]\,dt) = 0.$

Maintenant soient p, q, r $\&c.$ les distances du corps M aux centres des forces P, Q, R $\&c.$, & p', q', r' $\&c.$, p'', q'', r'' $\&c.$ celles des autres corps M', M'' $\&c.$ aux centres de leurs forces P', Q', R' $\&c.$, P'', Q'', R'' $\&c.$ Soient, outre cela, f la distance entre le corps M, & le corps M', & F la force, avec laquelle chaque point de l'un attire chaque point de l'autre, & de même f' la distance entre les corps M', M'', & F' leur force d'attraction, & ainsi de suite; soient encore g la distance entre le corps M', & le corps M'', & G leur attraction, & ainsi pour tous les autres corps; on aura par le Principe général de la conservation des forces vives, l'équation

$Mu^2 + M'u'^2 + M''u''^2 + \&c. = MV^2 + M'V'^2 + M''V''^2 + \&c. - 2M\int (P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.) - 2M'\int (P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \&c.) - 2M''\int (P''dp'' + Q''dq'' + R''dr'' \&c.) - \&c. - 2MM'\int F\,df - 2MM''\int F'\,df' - \&c. - 2M'M''\int G\,dg - \&c.$

V, V', V'' $\&c.$ étant les vitesses primitives des corps M, M', M'' $\&c.$

Or

Or ſoit ſuppoſé $P =$ fonct. p, $Q =$ fonct. q, $R =$ fonct. r, &c. $P' =$ fonct. p', $Q' =$ fonct. q &c. $F =$ fonct. f, &c. $G =$ fonct. g &c., on trouvera, par un calcul analogue à celui qu'on a fait dans le Prob. 1., l'équation différentielle

$$
\begin{aligned}
(V) \ldots \quad & Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c. = \\
& - M\,(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.) \\
& - M'\,(P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \&c.) \\
& - M''\,(P'\delta p'' + Q''\delta q'' + R''\delta r'' + \&c.) \\
& - \&c. \\
& - MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - \&c. \\
& - M'M''G\delta g - \&c.
\end{aligned}
$$

Il faut maintenant trouver les valeurs des différences δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$ &c., & cette recherche dépend, comme on le voit, de la nature des coordonnées qu'on emploie pour repréſenter les courbes décrites par chaque corps.

IX.

Premier cas. Soient, comme dans *l'Art. I.*, x, y, z trois coordonnées rectangles qui déterminent la poſition du corps M dans un tems quelconque, & ſoient de même x', y', z', x'', y'', z'' &c. d'autres coordonnées rectangles & paralelles à celles-là pour la poſition des autres corps M', M'' &c. dans le même tems; on aura, comme dans *l'Art. cité*,

$$\delta ds = \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds}$$

& de même

$$\delta ds' = \frac{dx'\,d\delta x' + dy'\,d\delta y' + dz'\,d\delta z'}{ds'}$$

$$\delta ds'' = \frac{dx''\,d\delta x'' + dy''\,d\delta y'' + dz''\,d\delta z''}{ds''}$$

& ainſi de ſuite.

Qu'on

Qu'on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation (D), & qu'on faſſe diſparoître, comme à l'ordinaire, les différentielles de δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c., on aura, en négligeant tous les termes hors du ſigne $\int$, qui peuvent être ſuppoſés nuls par la Remarque de *l'Art. II.*

$$\int \Big(Md \cdot \frac{u\,dx}{ds} \times \delta x + Md \cdot \frac{u\,dy}{ds} \times \delta y + Md \cdot \frac{u\,dz}{ds} \times \delta z$$
$$+ M'd \cdot \frac{u'\,dx'}{ds'} \times \delta x' + M'd \cdot \frac{u'\,\delta y'}{ds'} \times \delta y' + M'd \cdot \frac{u'\,dz'}{ds'} \times \delta z'$$
$$+ M''d \cdot \frac{u''dx''}{ds''} \times \delta x'' + M''d \cdot \frac{u''dy''}{ds''} \times \delta y'' + M''d \cdot \frac{u''dz''}{ds''} \times \delta z''$$
$$+ \quad \&c. \quad \&c.$$
$$- [\, Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c. \,]\, dt \Big) = 0 \; ; \; (E)$$

Il ne s'agira plus maintenant que de ſubſtituer dans cette équation au lieu de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.$ ſa valeur tirée de l'équation (V), & de réduire enſuite les différences δp, δq, δr &c. $\delta p'$, $\delta q'$ &c. δf, $\delta f'$ &c. δg &c. aux différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. par une méthode analogue à celle qu'on a pratiquée dans le Prob. préc.; après quoi, ſi chaque corps eſt entiérement libre, en ſorte que toutes les différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. demeurent indéterminées, on fera chacun de leurs coéficiens $= 0$, & l'on aura trois fois autant d'équations, qu'il y a de corps, leſquelles priſes enſemble ſuffiront pour déterminer toutes les viteſſes, & les courbes cherchées: mais ſi un, ou pluſieurs de ces corps ſont forcés de ſe mouvoir ſur des courbes, ou des ſurfaces données, & qu'ils agiſſent de plus, les uns ſur les autres, ſoit en ſe pouſſant, ſoit en ſe tirant par des fils, ou des verges inflexibles, ou de quelque autre maniére que ce ſoit, alors on cherchera les rapports qui devront néceſſairement ſe trouver entre les différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. On réduira par-là ces différences au plus petit nombre poſſible, & on fera enſuite chacun de leurs coéficiens $= 0$ ce qui donnera

donnera toutes les équations néceſſaires pour la ſolution du Problême.

X.

Corollaire. Suppoſons le ſiſtème entiérement libre, & que les corps agiſſent les uns ſur les autres d'une maniére quelconque; ſuppoſons, outre cela, que tous les corps ſoient ſollicités par trois forces P, Q, R dirigées parallélement aux coordonnées x, y, z, & qui ſoient les mêmes pour chacun d'eux; on mettra dans l'équation (V) x, y, z à la place de p, q, r, & l'on aura $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c. = -M(P\delta x + Q\delta y + R\delta z) - M'(P'\delta x' + Q'\delta y' + R'\delta z') - M''(P''\delta x'' + Q''\delta y'' + R''\delta z'') - \&c. - MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - \&c. - M'M''G\delta g - \&c.$ Cette valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + \&c.$ étant ſubſtituée dans l'équation (E), ſoit fait $x' = x + X$, $y' = y + Y$, $z' = z + Z$, $x'' = x + X'$, $y'' = y + Y'$, $z'' = z + Z'$ &c., & par conſéquent $\delta x' = \delta x + \delta X$, $\delta y' = \delta y + \delta Y$, $\delta z' = \delta z + \delta Z$, $\delta x'' = \delta x + \delta X'$, $\delta y'' = \delta y + \delta Y'$, $\delta z'' = \delta z + \delta Z'$ &c.; il eſt clair que les lignes f, f', g &c. qui marquent les diſtances des corps entr'eux, dépendront uniquement des lignes X, Y, Z, X', Y', Z' &c. qui déterminent leur poſition reſpective, & qu'ainſi les expreſſions des différences δf, $\delta f'$, δg &c. ne renfermeront aucunement les différences δx, δy, δz; on remarquera de plus que ces mêmes différences δx, δy, δz ſeront abſolument indépendantes de toutes les autres différences δX, δY &c. Car il eſt évident que, l'action mutuelle des corps ne dépendant que de leur poſition reſpective, ſavoir des lignes X, Y, Z, X', Y', Z', X'' &c., il n'y aura que les ſeules différences δX, δY, δZ, $\delta X'$, $\delta Y'$, $\delta Z'$ &c. de

ces mêmes lignes qui ſoient liées entr' elles par des rapports donnés par la nature du Problême ; d' où il s' enſuit que les termes affectés des différences δx, δy, δz dans l'équation (E) devront être chacun en particulier $= 0$; ce qui donnera les trois équations générales.

$$M d \cdot \frac{u dx}{ds} + M' d \cdot \frac{u' dx'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u'' dx''}{ds''} + \&c.$$
$$+ (M + M' + M'' + \&c.) P dt = 0,$$
$$M d \cdot \frac{u dy}{ds} + M' d \cdot \frac{u' dy'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u'' dy''}{ds''} + \&c.$$
$$+ (M + M' + M'' + \&c.) Q dt = 0,$$
$$M d \cdot \frac{u dz}{ds} + M' d \cdot \frac{u' dz'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u'' dz''}{ds''} + \&c.$$
$$+ (M + M' + M'' + \&c.) R dt = 0.$$

Or $\frac{ds}{u} = \frac{ds'}{u'} = \frac{ds''}{u''}$ $\&c. = dt$, donc ces équations deviendront celles ci

$$d \cdot \frac{M dx + M' dx' + M'' dx'' + \&c.}{dt} +$$
$$(M + M' + M'' + \&c.) P dt = 0,$$
$$d \cdot \frac{M dy + M' dy' + M'' dy'' + \&c.}{dt} +$$
$$(M + M' + M'' + \&c.) Q dt = 0,$$
$$d \cdot \frac{M dz + M' dz' + M'' dz'' + \&c.}{dt} +$$
$$(M + M' + M'' + \&c.) R dt = 0 ;$$

D' où l' on voit que ſi on prend à chaque inſtant dans le ſiſtème un point tel, que ſa poſition ſoit déterminée par trois coordonnées, l' une paralléle à x, & $= \frac{Mx + M'x' + M''x'' + \&c.}{M + M' + M'' + \&c.}$, l'autre paralléle à y, & $= \frac{My + M'y' + M''y'' + \&c.}{M + M' + M'' \&c.}$, & la troiſiéme paralléle

ralléle à ζ, & $= \frac{M\zeta + M'\zeta' + M''\zeta'' + \&c.}{M + M' + M'' + \&c.}$, ce point ſe mouvra, comme feroit un corps ſollicité ſimplement par les trois forces P, Q, R. Or il eſt évident que ce point ne ſera autre choſe que le centre de gravité du ſiſtème, ſavoir de tous les corps M, M' &c. qui le compoſent.

XI.

Second cas. Soit pris, comme dans *l'Art. IV.* au lieu des deux coordonnées rectangles x & y, un raïon vecteur x avec un angle φ; & ſoient de même ſubſtitués aux autres coordonnées x', y', x'', y'' &c., les raïons vecteurs x', x'' &c. partant du même point fixe que le raïon x, avec les angles correſpondans φ', φ'' &c. pris dans le même plan de l'angle φ; on trouvera, comme dans *l'Art. cité*,

$$\delta ds = \frac{x^2 d\varphi\, d\delta\varphi + x\, d\varphi^2 \delta x + dx\, d\delta x + d\zeta\, d\delta\zeta}{ds},$$

& de même

$$\delta ds' = \frac{x'^2 d\varphi' d\delta\varphi' + x' d\varphi'^2 \delta x' + dx' d\delta x' + d\zeta' d\delta\zeta'}{ds'}$$

$$\delta ds'' = \frac{x''^2 d\varphi'' d\delta\varphi'' + x'' d\varphi''^2 \delta x'' + dx'' d\delta x'' + d\zeta'' d\delta\zeta''}{ds''},$$

& ainſi des autres. On ſubſtituera ces valeurs dans l'équation (D) de *l'Art. VIII.*, & pratiquant les mêmes réductions que dans *l'Art. IV.*, elle deviendra

$$M d \cdot \frac{u x^2 d\varphi}{ds} \times \delta\varphi + M \left(d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\varphi^2}{ds} \right) \delta x + M d \cdot \frac{u d\zeta}{ds} \times \delta$$

$$M' d \cdot \frac{u' x'^2 d\varphi'}{ds'} \times \delta\varphi' + M' \left(d \cdot \frac{u' dx'}{ds'} - \frac{u' x' d\varphi'^2}{ds'} \right) \delta x' + M' d \cdot \frac{u' d\zeta'}{ds'} \times \delta$$

$$M'' d \cdot \frac{u'' x''^2 d\varphi''}{ds''} \times \delta\varphi'' + M'' \left(d \cdot \frac{u'' dx''}{ds''} - \frac{u'' x'' d\varphi''^2}{ds''} \right) \delta x'' + M'' d \cdot \frac{u'' d\zeta''}{ds''} \times \delta$$

&c. &c.

$$(M u \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \&c.)] = 0 \ldots\ldots\ldots (I$$

Equation, dans laquelle j'ai rejetté tous les termes qui ſont hors du ſigne $\int$, parceque ces termes deviennent évidemment nuls dans la ſuppoſition que le premier & le dernier point de chaque trajectoire ſoient donnés. Or cette équation étant analogue à l'équation (E) de *l'Art. VIII.*; ne demandera plus que des opérations ſemblables, pour trouver le mouvement de chaque corps. On en verra des exemples dans les Problêmes ſuivans.

XII.

Corollaire. Si le ſiſtème eſt entiérement libre, ou qu'il ſoit ſimplement aſſujetti à ſe mouvoir autour d'un point fixe, & que toutes les forces ſollicitatrices des corps concourent à ce point; prenant ce point pour le centres des raïons vecteurs x, x', x'' *&c.*, & faiſant $\varphi' = \varphi + \Phi$, $\varphi'' = \varphi + \Phi'$ *&c.*, il eſt facile de voir que $\delta\varphi$ ſera abſolument indépendante des autres différences $\delta\Phi$, $\delta\Phi'$ *&c.*, δx, $\delta x'$, $\delta x''$ *&c.* quelle que ſoit l'action réciproque des corps les uns ſur les autres; il eſt de plus évident que toutes les différences δp, δq, δf *&c.* qui entrent dans la valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u'$ *&c.* ſeront auſſi indépendantes de la différence $\delta\varphi$; d'où il s'enſuit que tous les termes de l'équation (F) qui ſe trouveront affectés de la différence $\delta\varphi$ après les ſubſtitutions de $\delta\varphi + \delta\Phi$, $\delta\varphi + \delta\Phi'$ *&c.* à la place de $\delta\varphi'$, $\delta\varphi''$ *&c.* devront être $= 0$ ſéparément du reſte l'équation, on aura donc en général, après avoir effacé le $\delta\varphi$, l'équation

$$Md \cdot \frac{ux^2 d\varphi}{ds} + M'd \cdot \frac{u'x'^2 d\varphi'}{ds'} + M''d \cdot \frac{u''x''^2 d\varphi''}{ds''} + \&c. = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{Mux^2 d\varphi}{ds} + \frac{M'u'x'^2 d\varphi'}{ds'} + \frac{M''u''x''^2 d\varphi''}{ds''} + \&c. = \text{conſt.} \quad (G)$$

où,

où, en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., & nommant H la conſtante

$$Mx^2 d\varphi\ M' x'^2 d\varphi' + M'' x''^2 d\varphi'' + \&c. = H dt,$$

& intégrant de nouveau

$$M\int x^2 d\varphi + M'\int x'^2 d\varphi' + M''\int x''^2 d\varphi'' + \&c. = Ht.$$

Il eſt viſible que l'intégrale $\int x^2 d\varphi$ exprime l'aire que la projection du corps M décrit autour du centre des forces, & que les autres intégrales $\int x'^2 d\varphi'$, $\int x''^2 d\varphi''$ &c. expriment de même les aires décrites par les projections des autres corps M', M'' &c. autour du même centre; donc la ſomme de chacune de ces aires multipliée par la maſſe du corps qui la décrit eſt toujours proportionelle au tems.

Le Lecteur, qui ſera curieux de voir une démonſtration de ce Théorème tirée des Principes de Mécanique, la trouvera dans un Mémoire de M. le Chevalier d'Arcy, imprimé parmi ceux de l'Académie Roïale des Sciences de Paris pour l'année 1747.; il y trouvera auſſi l'uſage de ce même Théorème pour réſoudre pluſieurs queſtions de Dynamique.

Au reſte nous remarquerons que l'équation (G) renferme le Principe que Mrs. Daniel Bernoulli, & Euler ont appellé *la conſervation du moment du mouvement circulatoire*, & qui conſiſte en ce que la ſomme des produits de chaque corps (M) par ſa viteſſe circulatoire ($\frac{ux\,d\varphi}{ds}$) & par ſa diſtance au centre (x) eſt conſtante pendant le mouvement du ſiſtème. *Voïés les Mémoires de l'Académie Roïale des Sciences de Berlin pour l'année* 1745., *& les Opuſcules de M. Euler imprimés à Berlin en* 1746.

La même équation (G) renferme auſſi le Principe de M. le Chevalier d'Arcy, que la ſomme des produits de chaque corps (M) par ſa viteſſe (u), & par la perpendicu-

diculaire ménée du centre sur la direction du corps ($\frac{x^2 d\varphi}{ds}$) fait toujours une quantité constante. *Voïés les Mémoires de l'Académie de Paris pour les années* 1749., 1752.

XIII.

Remarque. Il est aisé de trouver, par la méthode que j'ai donné dans la Remarque de *l'Art. VI.*, que l'équation (V) sera exacte en général toutes les fois que la formule $-M(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.) - M'(P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' + \&c.) - \&c.$ qui exprime la valeur de $Mu\,du + M'u'\,du' + M''u''\,du'' + \&c.$, sera une différentielle complette. Dans tous les autres cas cette équation ne pourra plus servir à trouver les conditions de la *maximité*, ou de la *minimité* de la formule intégrale $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' + \&c.$; mais elle servira toujours également pour trouver les mouvemens des corps M, M' M'' $\&c.$, quelles que soient les forces dont ils sont animés. Ainsi sans s'embaraſſer que la formule dont nous parlons soit réellement un *maximum*, ou un *minimum*, on pourra toujours emploïer l'équation (V) dans quelque hipotése de forces que ce soit.

XIV.

Probleme 3. Trois corps M, M', M'' s'attirent mutuellement par des forces d'attraction F, F', G; trouver les orbites des corps M', M'' par rapport au corps M regardé comme en repos.

Solution. Les mêmes noms étant conservés que dans *l'Art. IX.* on fera de plus, comme dans *l'Art. X.*, $x' = x + X$, $y' = y + Y$ $\&c.$, & l'on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ $ds' = \sqrt{[(dx + dX)^2 + (dy + dY)^2 + (dz + dZ)^2]}$ ds'.

$ds'' = \sqrt{[(dx + dX')^2 + (dy + dY')^2 + (dz + dZ')^2]}$, d'où l'on tirera, par la différentiation, les valeurs de δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$, qu'il faudra ſubſtituer dans l'équation (D) de *l'Art. VIII.*

Mais pour mieux repréſenter les orbites rélatives des corps M', M'', ſoient pris, au lieu des coordonnées rectangles X, Y, X', Y', deux rayons vecteurs r, r', avec deux angles correſpondans φ, φ', tels que l'on ait $X = r \cos. \varphi$, $Y = r \sin. \varphi$, $X' = r' \cos. \varphi'$, $Y' = r' \sin. \varphi'$; aïant fait ces ſubſtitutions dans les valeurs de ds', ds'', on aura

$ds' = \sqrt{(ds^2 + 2\,dx\,d\cdot r \cos. \varphi + 2\,dy\,d\cdot r \sin. \varphi + r^2 d\varphi^2 + dr^2 + 2\,dz\,dZ + dZ^2)}$,

$ds'' = \sqrt{(ds^2 + 2\,dx\,d\cdot r' \cos. \varphi' + 2\,dy\,d\cdot r' \sin. \varphi' + r'^2 d\varphi'^2 + dr'^2 + 2\,dz\,dZ' + dZ'^2)}$.

Maintenant, ſi l'on veut regarder l'orbite du corps M comme connue, on prendra les différences δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$, en ſuppoſant dx, dy, dz conſtantes; on aura $\delta ds = 0$; $\delta ds' = [dx\,\delta d\cdot r \cos. \varphi + dy\,\delta d\cdot r \sin. \varphi + r^2 d\varphi\,\delta d\varphi + r\,d\varphi^2\,\delta r + dr\,\delta dr + (dz + dZ)\,\delta dZ] : \delta s'$; $\delta ds'' = [dx\,\delta d\cdot r' \cos. \varphi' + dy\,\delta d\cdot r' \sin. \varphi' + r'^2 d\varphi'\,\delta d\varphi + r'\,d\varphi'^2\,\delta r' + dr'\,\delta dr' + (dz + dZ')\,\delta dZ'] : ds''$.

Avant que de faire ces ſubſtitutions dans l'équation (D) de *l'Art. VIII.*, je remarque que les corps M', M'' dont on cherche le mouvement, étant entiérement libres par l'hipotéſe du Problême, les différences de leurs coordonnées δr, $\delta \varphi$, δZ, $\delta r'$, $\delta \varphi'$, $\delta Z'$ ſont néceſſairement indépendantes entr'elles; d'où il s'enſuit qu'on peut faire pour chacun de ces corps un calcul à part, en ne conſidérant à la fois que les variations des trois coordonnées r, φ, Z, ou r', φ', Z.

Qu'on ne prenne d'abord que les trois premiéres r, φ, Z pour variables; il eſt clair qu'on aura $\delta ds = 0$; par conſéquent l'équation mentionnée deviendra ſimplement

$\int (M'$

$\int [M' u' \delta ds' + (Mu\delta u + M'\delta u + M''\delta u'' + \&c.) dt] = 0.$

Pour appliquer cette équation au Problême préſent, on commencera par ſubſtituer, à la place de $\delta ds'$, ſa valeur trouvée ci-deſſus, en y mettant, pour plus de ſimplicité, au lieu de $\frac{ds'}{u'}$ ſon égale dt; enſuite on intégrera par parties tous les termes qui renfermeront des différences affectées du double ſigne δd, après avoir changé ce ſigne dans ſon équivalent $d\delta$; cette opération donnera les tranſformées ſuivantes

$$\int \frac{dx\, d\delta \cdot r \text{ cof. } \varphi}{dt} = \frac{dx\, \delta \cdot r \text{ cof. } \varphi}{dt} - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times \delta \cdot r \text{ cof. } \varphi$$

$$= \frac{dx}{dt} (\text{ cof. } \varphi\, \delta r - r \text{ ſin. } \varphi\, \delta \varphi) - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times (\text{ cof. } \varphi\, \delta r - r \text{ ſin. } \varphi\, \delta \varphi) = (\text{ en rejettant les termes qui ſont hors du ſigne d' intégration, \& qui s' évanoüiſſent toujours dans l' hipotéſe de } l'Art.\ II.) - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times (\text{ cof. } \varphi\, \delta r - r \text{ ſin. } \varphi\, \delta \varphi),$$

& de même

$$\int \frac{dy\, d\delta r \text{ ſin. } \varphi}{dt} = - \int d \cdot \frac{dy}{dt} \times (\text{ ſin. } \varphi\, \delta r + r \text{ cof. } \varphi\, \delta r)$$

$$\int \frac{r^2 d\varphi\, d\delta \varphi}{dt} = - \int d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} \times \delta \varphi$$

$$\int \frac{dr \delta dr}{dt} = - \int d \cdot \frac{dr}{dt} \times \delta r$$

$$\int \frac{(dz + dZ)\, d\delta Z}{dt} = - \int d \cdot \frac{dz + dZ}{dt} \times \delta Z.$$

En joignant enſemble toutes ces transformées, & y ajoutant le terme $\int \frac{r d\varphi^2}{dt} \delta r$, on aura la valeur de $\int u' \delta ds'$ exprimée par la formule ſuivante

$$\int [(r \text{ ſin. } \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} - r \text{ cof. } \varphi d \cdot \frac{dy}{dt} - d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt}) \delta \varphi -$$

$$- (\text{ cof.}$$

$$\left(\text{cof. } \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} + \text{sin. } \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + d \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{r^2 d\varphi^2}{dt}\right) \delta r -$$

$$d \cdot \frac{d\zeta + dZ}{dt} \times \delta Z \Big].$$

A préſent, pour avoir la valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$, on fera dans l'équation (V) de *l'Art. VIII.* toutes les quantités P, Q, R, P', Q' *&c.* qui repreſentent des forces étrangéres $= o$, & l'on aura

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = -MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - M'M''G\delta g.$$

Or il eſt facile de trouver que $f = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} = \sqrt{(r^2 + Z^2)}$, $f' = \sqrt{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)} = \sqrt{(r'^2 + Z'^2)}$, $g = \sqrt{[(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2]} = \sqrt{[r'^2 + r^2 - 2r'r \text{ cof. } (\varphi' - \varphi) + (Z' - Z)^2]}$; d'où l'on tirera, en regardant toujours φ', r', & Z' comme conſtantes, $\delta f = \frac{r\delta r + Z\delta Z}{f}$, $\delta f' = o$, $\delta g = \frac{r - r' \text{ cof. } (\varphi' - \varphi)}{g}\delta r - \frac{r'r \text{ sin. } (\varphi' - \varphi)}{g}\delta\varphi - \frac{Z' - Z}{g}\delta Z$.

Aïant fait ces ſubſtitutions, on ajoutera enſemble les valeurs de $M'f\delta ds'$, & de $Mudu + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$, & l'on aura une formule intégrale, dont chaque terme contiendra une des différences $\delta\varphi$, δr, δZ, & qui devra être $= o$, quelles que ſoient les valeurs de ces différences. On trouvera donc, en faiſant ſéparément $= o$ chacun de leurs coéficiens, & diviſant par M'

$$-d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} + r \text{ sin. } \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} - r \text{ cof. } \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r'r \text{ sin. } (\varphi' - \varphi)}{g} M''G dt = o.$$

$$d \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{rd\varphi^2}{dt} + \text{cof. } \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} + \text{sin. } \varphi d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r}{f} MF dt +$$

$$+\frac{r-r'\cos.(\varphi'-\varphi)}{g}M''G\,dt=0;$$

$$d\cdot\frac{d\zeta+dZ'}{dt}-\frac{Z'-Z}{g}M''G\,dt=0.$$

Equations qui ſe réduiſent à la forme de celles de *l'Art. IV.* en ſuppoſant

$$r\sin.\varphi\,d\cdot\frac{dx}{dt}-r\cos.\varphi\,d\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{rr'\sin.(\varphi'-\varphi)}{g}M''G\,dt=-\pi\,dt;$$

$$\cos.\varphi\,d\cdot\frac{dx}{dt}+\sin.\varphi\,d\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{r}{f}MF\,dt+\frac{r-r'\cos.(\varphi'-\varphi)}{g}M''G\,dt=\Pi\,dt;$$

$$d\cdot\frac{d\zeta}{dt}-\frac{Z'-Z}{g}M''G\,dt=\Psi\,dt.$$

Et ces équations ſuffiront pour déterminer l'orbite du corps M', en ſuppoſant connues les orbites des deux autres corps M, M''.

Qu'on faſſe maintenant, dans les expreſſions de $\delta\,ds'$, $\delta\,ds''$, $\delta f'$, δg, les changeantes r', φ', Z' variables au lieu des r, φ, Z; on trouvera, par des raiſonnemens, & des opérations ſemblables aux précédentes, trois autres équations, qui ne différeront des équations ci-deſſus, que parce qu'il y aura r', φ', Z' à la place de r, φ, Z, & réciproquement, & ces équations ſeront celles de l'orbite du corps M''.

XV

Corollaire. Si on ne connoiſſoit pas l'orbite abſolue du corps M, alors, pour déterminer les valeurs des quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, il faudroit auſſi faire varier les trois changeantes x, y, ζ, dans les valeurs de ds, ds', ds''; ce qui donneroit

$\delta\,ds$

$\delta ds = (dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz) : ds$
$\delta ds' = [(dx + d\cdot r\cos.\varphi)\delta dx + (dy + d\cdot r\sin.\varphi)\delta dy + (dz + dZ)\delta dz] : ds'$
$\delta ds'' = [(dx + d\cdot r'\cos.\varphi')\delta dx + (dy + d\cdot r'\sin.\varphi')\delta dy + (dz + dZ')\delta dz] : ds''.$

On ſubſtitueroit ces valeurs dans l'équation générale (D) de *l'Art. VIII.*, & faiſant, après les réductions ordinaires, les trois coéficiens de δx, δy, δz chacun $= 0$, on auroit trois équations, par leſquelles on pourroit déterminer les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Au reſte ces équations reviendroient au même que celles de *l'Art. X.* en y faiſant $P, Q, R = 0$.

XVI.

Corollaire 2. Les équations, qu'on trouveroit par la méthode du Corollaire précédent, ne renfermeroient point les forces F, F', G, mais ſeulement les changeantes r, φ, r', φ' avec leurs différences; mais, pour ne pas trop charger de différentielles les équations du mouvement des corps M', M'', il ſera mieux de chercher les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, en conſidérant directement les orbites abſolues de ces deux corps.

Que x', y', z', x'', y'', z'' ſoient les ordonnées rectangles des orbites, dont nous parlons; on parviendra à une équation qui ſera la même que l'équation (E) du Prob. 2., & dans laquelle, à cauſe que les corps ſont libres, il faudra faire les coéficiens de δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. chacun $= 0$. Or il eſt facile de trouver que $f = \sqrt{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]}$, $f' = \sqrt{[(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2]}$, $g = \sqrt{[(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2]}$; pour notre cas il ſuffit de faire

faire varier x, y, z ſeulement; on aura donc $\delta f = -\frac{x'-x}{f}\delta x - \frac{y'-y}{f}\delta y - \frac{z'-z}{f}\delta z$, $\delta f' = -\frac{x''-x}{f'}\delta x - \frac{y''-y}{f'}\delta y - \frac{z''-z}{f'}\delta z$, $\delta g = 0$. On ſubſtituera ces valeurs dans l'expreſſion $-MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - M'M''G\delta g$, & l'on aura (à cauſe de $x'-x = X = r\cos.\varphi$, $y'-y = Y = r\sin.\varphi$, $z'-z = Z$, $x''-x = X' = r'\cos.\varphi'$, $y''-y = Y' = r'\sin.\varphi'$, $z''-z = Z'$)

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = M\left(\frac{M'Fr\cos.\varphi}{f} + \frac{M''F'r'\cos.\varphi'}{f'}\right)\delta x + M\left(\frac{M'Fr\sin.\varphi}{f} + \frac{M''F'r'\sin.\varphi'}{f'}\right)\delta y + M\left(\frac{M'FZ}{f} + \frac{M''F'Z'}{f'}\right)\delta z.$$

Mettant cette valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$ dans l'équation (E), & faiſant ſéparément $= 0$ chacun des trois coéficiens de δx, δy, δz; il viendra, après avoir diviſé le tout par M, & mis dt à la place de $\frac{ds}{u}$,

$$d\cdot\frac{dx}{dt} - \left(\frac{M'Fr\cos.\varphi}{f} + \frac{M''F'r'\cos.\varphi'}{f'}\right)dt = 0$$

$$d\cdot\frac{dy}{dt} - \left(\frac{M'Fr\sin.\varphi}{f} + \frac{M''F'r'\sin.\varphi'}{f'}\right)dt = 0$$

$$d\cdot\frac{dz}{dt} - \left(\frac{M'FZ}{f} + \frac{M''F'Z'}{f'}\right)dt = 0.$$

Par-là les valeurs de π, Π, Ψ de *l'Art. XIV.* deviendront, après quelques réductions fort ſimples.

$$M''\left(\frac{G}{g} - \frac{F'}{f'}\right)rr'\sin.(\varphi'-\varphi) = -\pi$$

$$(M+M')\frac{Fr}{f} + M''\left(\frac{G}{g}\times[r - r'\cos.(\varphi'-\varphi)]\right.$$

+

$$+ \frac{F'}{f'} \times r' \text{ cof. } (\varphi' - \varphi) \Big) = \Pi$$

$$M' \frac{FZ}{f} + M'' \left[\frac{F'Z'}{f'} - \frac{G(Z' - Z)}{g} \right] = \Upsilon.$$

XVII.

PROBLEME 4. Un corps M étant ſollicité par tant des forces qu'on voudra P, Q, R &c., & tirant après lui deux autres corps M', M'' par le moïen de deux fils de longueurs données; trouver le mouvement de chacun de ces trois corps. On ſuppoſe pour plus de ſimplicité, qu'ils ſe meuvent tous trois dans le même plan.

SOLUTION. Soient f, f' les longueurs données des fils, c'eſt-à-dire les diſtances invariables des corps M', M'' au corps M; x, y les coordonnées rectangles de la courbe décrite par le corps M, & φ, φ' les angles que les lignes f, f' forment à chaque inſtant avec l'axe des x; prenant x', y', x'', y'' pour les coordonnées rectangles des autres corps M', M'', on aura $x' = x - f \text{ cof. } \varphi$, $y' = y - f \text{ ſin. } \varphi$, $x'' = x - f' \text{ cof. } \varphi'$, $y'' = y - f' \text{ ſin. } \varphi'$; $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2 + 2f(\text{ſin. } \varphi\, dx - \text{cof. } \varphi\, dy)\, d\varphi + f^2 d\varphi^2$, $ds''^2 = dx''^2 + dy''^2 = dx^2 + dy^2 + 2f'(\text{ſin. } \varphi'\, dx - \text{cof. } \varphi'\, dy)\, d\varphi' + f'^2 d\varphi'^2$; d'où l'on tire

$\delta ds = (dx\, \delta dx + dy\, \delta dy) : ds$;

$\delta ds' = [(dx + f \text{ ſin. } \varphi\, d\varphi)\, \delta dx + (dy - f \text{ cof. } \varphi\, d\varphi)\, \delta dy + f\, d\varphi\, (\text{cof. } \varphi\, dx + \text{ſin. } \varphi\, dy)\, \delta\varphi + f(\text{ſin. } \varphi\, dx - \text{cof. } \varphi\, dy + f\, d\varphi)\, \delta d\varphi] : ds'$;

$\delta ds'' = [(dx + f' \text{ ſin. } \varphi'\, d\varphi')\, \delta dx + (dy - f' \text{ cof. } \varphi'\, d\varphi')\, \delta dy + f'\, d\varphi'\, (\text{cof. } \varphi'\, dx + \text{ſin. } \varphi'\, dy)\, \delta\varphi' + f'(\text{ſin. } \varphi'\, dx - \text{cof. } \varphi'\, dy + f'\, d\varphi')\, \delta d\varphi'] : ds''$.

On ſubſtituera ces valeurs dans les intégrales $\int u\, \delta ds$, $\int u'\, \delta ds'$, $\int u''\, \delta ds''$ de l'équation (D) de l'*Art. VIII.*, & faiſant

faisant les transformations, & les réductions ordinaires, on trouvera

$$\int u \delta ds = -\int (d \cdot \frac{dx}{dt} \times \delta x + d \cdot \frac{dy}{dt} \times \delta y)$$

$$\int u' \delta ds' = -\int (d \cdot \frac{dx + f \sin. \varphi d\varphi}{dt} \times \delta x +$$

$$d \cdot \frac{dy - f \cos. \varphi d\varphi}{dt} \times \delta y - [\frac{\cos. \varphi dx + \sin. \varphi dy}{dt} f d. \varphi$$

$$- d \cdot \frac{\sin. \varphi dx - \cos. \varphi dy + f d\varphi}{dt} f] \delta \varphi).$$

Et l'on aura pour $\int u'' \delta ds''$ la même expression que pour $\int u' \delta ds'$ en marquant seulement d'un trait les lettres φ & f; comme il est aisé de s'en assurer par le calcul.

Pour avoir maintenant la valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$ on aura recours à l'équation générale (V) de *l'Art. VIII.*, laquelle donnera pour le cas présent $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = -M(P\delta p + Q\delta q + R\delta r) =$, en faisant les mêmes suppositions que dans *l'Art. I.*, $-M(\Pi \delta x + \pi \delta y)$.

Il n'y a plus qu'à mettre ces différentes transformées dans l'équation (D); or si l'on fait pour abréger

$$M(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) + M' d \cdot \frac{1}{dt}(dx + f \sin. \varphi d\varphi)$$

$$+ M'' d \cdot \frac{1}{dt}(dx + f' \sin. \varphi' d\varphi') = [x]$$

$$M(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt) + M' d \cdot \frac{1}{dt}(dy - f \cos. \varphi d\varphi)$$

$$+ M'' d \cdot \frac{1}{dt}(dx - f' \cos. \varphi' d\varphi') = [y]$$

$$\frac{M' f d\varphi}{dt}(\cos. \varphi dx + \sin. \varphi dy) - M' d \cdot \frac{f}{dt}(\sin. \varphi dx$$

$$- \cos. \varphi dy + f d\varphi) = [\varphi]$$

$$\frac{M'' f' d\varphi'}{dt}(\cos. \varphi' dx + \sin. \varphi' dy) - M'' d \cdot \frac{f'}{dt}(\sin. \varphi' dx$$

$$- \cos. \varphi' dy + f' d\varphi') = [\varphi'].$$

On

on trouve

$$\int([x]\delta x+[y]\delta y-[\varphi]\delta\varphi-[\varphi']\delta\varphi)=0\ldots(H)$$

D' où l' on tire par notre méthode

$$[x]=0,\ [y]=0,\ [\varphi]=0,\ [\varphi']=0.$$

Quatre équations qui ſuffiront pour déterminer le rapport des indéterminées x, y, φ, φ' au tems t, & par conſéquent le mouvement de chacun de trois corps M, M'', M''.

XVIII.

Corollaire 1. Si le corps M étoit mu dans une rainure courbe repréſentée par l'équation $dy=mdx$; alors il n'y auroit qu'à mettre, dans l'équation (H), $m\delta x$ pour δy, & faire enſuite chacun, des trois coéficiens de δx, $\delta\varphi$, $\delta\varphi'$, $=0$; ce qui donneroit pour les équations du mouvement des corps

$$[x]+m[y]=0,\ [\varphi]=0,\ [\varphi']=0.$$

Si le corps M étoit, outre cela, obligé de ſe mouvoir avec une viteſſe, dont la loi à chaque point de la courbe fût donnée; alors, comme le mouvement de ce corps ſeroit entiérement donné, on auroit $\delta x=0$, & $\delta y=0$; c'eſt pourquoi il faudroit ſupprimer les équations $[x]=0$, & $[y]=0$, & mettre, dans les deux autres $[\varphi]=0$, $[\varphi']=0$, au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ leurs valeurs données.

XIX.

Corollaire 2. Suppoſons que les trois corps M, M', M'', au lieu de ſe tenir par de fils, ſoient attachés à une verge inflexible, enſorte que l'angle des lignes f, f' ſoit conſtant, & $=\alpha$; on aura donc en ce cas $\varphi'=\varphi+\alpha$, & $\delta\varphi'=\delta\varphi$; ainſi il ne faudra qu'écrire, dans l'équation (H), $\varphi+\alpha$ pour φ', & $\delta\varphi$ pour $\delta\varphi$, & faiſant enſuite

enſuite les coéficiens de δx, δy, $\delta\varphi$ chacun en particulier $= 0$, on aura

$$[x] = 0, [y] = 0, [\varphi] + [\varphi'] = 0.$$

XX.

Corollaire 3. Si on veut de plus, dans le cas du Corollaire précédent, que le corps M ſe meuve dans une rainure courbe dont l'équation ſoit $dy = m\,dx$; mettant, comme dans *l'Art. XVIII.* $m\,\delta x$ au lieu de δy, & faiſant $= 0$ les coéficiens de δx, & $\delta\varphi$, on aura ſimplement les deux équations

$$[x] + m[y] = 0, \text{ \& } [\varphi] + [\varphi'] = 0.$$

Mais ſi la viteſſe du corps M eſt auſſi donnée; en ce cas δx, & δy étant nuls, il ne reſtera que l'équation $[\varphi] + [\varphi'] = 0$, dans laquelle il faudra mettre au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ leurs valeurs données.

XXI.

Corollaire 4. Si les corps M', M'' étoient liés par un même fil, de longueur donnée, le long duquel l'autre corps M pût couler librement par le moïen d'un anneau: on pourroit réſoudre le Problême de la même maniére en faiſant les quantités f, f' variables dans les expreſſions de ds', ds'', & de leurs différences $\delta ds'$, $\delta ds''$.

Pour cela il n'y auroit qu'à augmenter la valeur de ds'^2 trouvée ci-deſſus (*Art. XVII.*) de la quantité $-2(\text{cof. }\varphi\,dx + \text{ſin. }\varphi\,dy)\,df + df^2$, & enſuite celle de $\delta ds'$ de la quantité $(\text{ſin. }\varphi\,dx - \text{cof. }\varphi\,dy + f\,d\varphi)\,d\varphi\,\delta f - (\text{cof. }\varphi\,dx + \text{ſin. }\varphi\,dy - df)\,\delta\,df + (\text{ſin. }\varphi\,dx - \text{cof. }\varphi\,dy)\,df\,\delta\varphi - \text{cof. }\varphi\,df\,\delta dx - \text{ſin. }\varphi\,df\,\delta dy$, diviſée par ds'; c'eſt pourquoi la valeur de la formule intégrale $\int u'\,\delta\,ds'$ ſeroit augmentée

mentée de $\int\Big(d \cdot \frac{\text{cof. } \varphi\, df}{dt} \times \delta x + d \cdot \frac{\text{fin. } \varphi\, df}{dt} \times \delta y$

$+ \frac{df}{dt}(\text{fin. } \varphi\, dx - \text{cof. } \varphi\, dy)\,\delta\varphi + \Big[\frac{d\varphi}{dt}(\text{fin. } \varphi\, dx -$

$\text{cof. } \varphi\, dy + f d\varphi) + d \cdot \frac{1}{dt}(\text{cof. } \varphi\, dx + \text{fin. } \varphi\, dy$

$- df)\Big]\delta f\Big)$.

Et l'autre formule intégrale $\int u''\,\delta\, ds''$ seroit auſſi augmentée de la même quantité, en marquant ſeulement d'un trait les deux lettres φ & f. Par-là l'équation (H) deviendroit de cette forme

$(I) \ldots - \int[(x)\delta x + (y)\delta y - (\varphi)\delta\varphi - (\varphi')\,\delta\varphi' + (f)\delta f + (f')\delta f'] = 0$, dans laquelle

$$(x) = [x] - d \cdot \frac{\text{cof. } \varphi\, df}{dt} - d \cdot \frac{\text{cof. } \varphi'\, df}{dt}$$

$$(y) = [y] - d \cdot \frac{\text{fin. } \varphi\, df}{dt} - d \cdot \frac{\text{fin. } \varphi'\, df}{dt}$$

$$(\varphi) = [\varphi] + \frac{df}{dt}(\text{fin. } \varphi\, dx - \text{cof. } \varphi\, dy)$$

$$(\varphi') = [\varphi'] + \frac{df}{dt}(\text{fin. } \varphi'\, dx - \text{cof. } \varphi'\, dy)$$

$$(f) = \frac{d\varphi}{dt}(\text{fin. } \varphi\, dx - \text{cof. } \varphi\, dy + f d\varphi) + d \cdot \frac{1}{dt}(\text{cof. } \varphi\, dx + \text{fin. } \varphi\, dy - df)$$

$$(f') = \frac{d\varphi'}{dt}(\text{fin. } \varphi'\, dx - \text{cof. } \varphi'\, dy + f' d\varphi') + d \cdot \frac{1}{dt}(\text{cof. } \varphi'\, dx + \text{fin. } \varphi'\, dy - df').$$

Maintenant, les deux corps M', M'' étant attachés fixement aux extrémités du fil qui eſt ſuppoſé inextenſibles, il faut que la ſomme des lignes f, & f' ſoit conſtante; ſoit cette ſomme, c'eſt-à-dire, la longueur totale du fil

$$F f = a,$$

$= a$, on aura $f' = a - f$, & $\delta f' = -\delta f$; on fera donc ces substitutions dans l'équation (l), & mettant ensuite $= 0$ les coéficiens des différences restantes δx, δy, $\delta \varphi$, $\delta \varphi'$, δf, on aura les cinq équations $(x) = 0$, $(y) = 0$, $(\varphi) = 0$, $(\varphi) = 0$, $(f) - (f') = 0$, lesquelles donneront le rapport des cinq indéterminée x, y, φ, φ', f au tems t.

XXII.

Corollaire 5. Si le corps M étoit fixe, ou, ce qui revient au même, si le fil qui joint les deux corps M', M'' passoit à travers un anneau immobile, on auroit pour lors dx, dy, & δx, $\delta y = 0$, & les équations du mouvement des deux corps seroient $(\varphi) = 0$, $(\varphi') = 0$, & $(f) - (f') = 0$; savoir, à cause que $dx = 0$, $dy = 0$, & $f' = a - f$,

$$d \cdot \frac{f^2 d\varphi}{dt} = 0, \quad d \cdot \frac{(a-f)^2 d\varphi'}{dt} = 0, \quad \&$$

$$\frac{f(d\varphi^2 + d\varphi'^2) - a d\varphi'^2}{dt} + 2d \cdot \frac{df}{dt} = 0.$$

Les deux premières équations étant intégrées, donneront $d\varphi^2 = \frac{A dt^2}{f^4}$, $d\varphi'^2 = \frac{B dt^2}{(a-f)^4}$; & ces valeurs substituées dans la troisième, on aura

$$\frac{A dt}{f^3} - \frac{B dt}{(a-f)^3} + 2d \cdot \frac{df}{dt} = 0,$$ laquelle étant multipliée par $\frac{df}{dt}$, & ensuite intégrée devient

$$-\frac{A}{2f^2} + \frac{B}{2(a-f)^2} + \frac{df^2}{dt^2} = C, \text{ d'où l'on tire}$$

$$dt = \frac{df}{\sqrt{\left(C + \frac{A}{2f^2} - \frac{B}{2(a-f)^2}\right)}}.$$

XXIII.

XXIII.

Corollaire 6. Si dans le cas du Corollaire précédent les deux corps M', M'' étoient attachées à une verge droite, & inflexible; alors on auroit $\varphi' = \varphi$, & $\delta\varphi' = \delta\varphi$; & les équations $(\varphi) = 0$, $(\varphi') = 0$ n'en feroient plus qu'une seule, savoir $(\varphi) + (\varphi') = 0$; on auroit donc simplement les deux équations $(\varphi) + (\varphi') = 0$, & $(f) - (f') = 0$; c'est-à-dire $d \cdot \frac{(a^2 - 2af + 2f^2)\,d\varphi}{dt} = 0$, & $\frac{(2f-a)\,d\varphi^2}{dt} + 2d \cdot \frac{df}{dt} = 0$; lesquelles donnent, en chassant dt, $\frac{(2f-a)\,d\varphi}{a^2 - 2af + 2f^2} + 2d \cdot \frac{df}{(a^2 - 2af + 2f^2)\,d\varphi} = 0$. Cette équation étant multipliée par $\frac{df}{a^2 - 2af + 2f^2}$, & ensuite intégrée, en regardant $d\varphi$ comme constante, deviendra celle-ci $\frac{d\varphi}{2(a^2 - 2af + 2f^2)} + \frac{df^2}{(a^2 - 2af + 2f^2)^2 d\varphi} = \frac{d\varphi}{A^2}$, qui se réduit à

$$d\varphi = \frac{A\,df\sqrt{2}}{\sqrt{(2[a^2 - 2af + 2f^2]^2 - A^2[a^2 - 2af + 2f^2])}}$$

XXIV.

Probleme 5. Trouver le mouvement d'un fil fixe en une de ses extrémités, & chargé de tant de corps pesants qu'on voudra M, M', M'' &c.

Solution. Aïant pris comme dans *l'Art. IX.*, x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' &c. pour les coordonnées rectangles des corps M, M', M'' &c., on a d'abord l'équation (E). Soit maintenant f la portion du fil interceptée entre l'extrémité fixe, & le corps M; soient aussi f', f'' &c. les

portions du même fil interceptées entre les corps M & M', M' & M'', & ainſi de ſuite ; on aura les équations

$$f = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$
$$f' = \sqrt{([x' - x]^2 + [y' - y]^2 + [z' - z]^2)}$$
$$f'' = \sqrt{([x'' - x']^2 + [y'' - y']^2 + [z'' - z']^2)}$$
&c. *&c.*

l'origine des abſciſſes x, x', x'' *&c.* étant à l'extrémité fixe du fil. On tire de là

$$x = \sqrt{(f^2 - y^2 - z^2)}$$
$$x' = x + \sqrt{(f'^2 - [y' - y]^2 - [z' - z]^2)}$$
$$x'' = x' + \sqrt{(f''^2 - [y'' - y']^2 - [z'' - z']^2)}$$
&c. *&c.*

& par conſéquent

$$\delta x = -\frac{1}{x}[y\delta y + z\delta z]$$

$$\delta x' = \delta x - \frac{1}{x' - x}[(y' - y)\times(\delta y' - \delta y) + (z' - z)\times(\delta z' - \delta z)]$$
$$= \left(\frac{y' - y}{x' - x} - \frac{y}{x}\right)\delta y - \frac{y' - y}{x' - x}\delta y'$$
$$+ \left(\frac{z' - z}{x' - x} - \frac{z}{x}\right)\delta z - \frac{z' - z}{x' - x}\delta z$$

$$\delta x'' = \delta x' - \frac{1}{x'' - x'}[(y'' - y')\times(\delta y'' - \delta y') + (z'' - z')\times(\delta z'' - \delta z')]$$
$$= \left(\frac{y' - y}{x' - x} - \frac{y}{x}\right)\delta y + \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'} - \frac{y' - y}{x' - x}\right)\delta y' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\delta y''$$
$$+ \left(\frac{z' - z}{x' - x} - \frac{z}{x}\right)\delta z + \left(\frac{z'' - z'}{x'' - x'} - \frac{z' - z}{x' - x}\right)\delta z' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'}\delta z'',$$

& ainſi de ſuite.

Maintenant, ſi on ſuppoſe (ce qui eſt abſolument arbitraire) l'axe des x, x', x'' *&c.* vertical ; & que P exprime la peſanteur abſolue des corps ; il faudra mettre dans l'équation (V) de *l'Art. VIII.* δx, $\delta x'$, $\delta x''$ *&c.* au lieu de δp, $\delta p'$, $\delta p''$ *&c.*, $-P$ au lieu de P, P', P'' *&c.*, & toutes les autres forces Q, R, Q' *&c.* égales à zéro ; on aura donc

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.$$
$$= P(M\delta x + M'\delta x' + M''\delta x'' + \&c.)$$

Faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation (E) cité ci-devant, & ordonnant les termes, elle deviendra de la forme ſuivante

$$\int([y]\delta y + [y']\delta y' + [y'']\delta y'' + \&c. +$$
$$[z]\delta z + [z']\delta z' + [z'']\delta z'' + \&c.) = 0,$$

dans laquelle on aura, après avoir mis au lieu de $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c. leur valeur commune dt,

$$[y] = M\left[d\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{y}{x}\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt}\right)\right] - \left[\frac{y'-y}{x'-x} - \frac{y}{x}\right]\times\left[M'\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx'}{dt}\right) + M''\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx''}{dt}\right) + M'''\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx'''}{dt}\right) + \&c.\right]$$

$$[y'] = M'\left[d\cdot\frac{dy'}{dt} + \frac{y'-y}{x'-x}\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx'}{dt}\right)\right] - \left[\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'-y}{x'-x}\right]\times\left[M''\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx''}{dt}\right) + M'''\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx'''}{dt}\right) + \&c.\right]$$

$$[y''] = M''\left[d\cdot\frac{dy''}{dt} + \frac{y''-y'}{x''-x'}\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx''}{dt}\right) - \left[\frac{y'''-y''}{x'''-x''} - \frac{y''-y'}{x''-x'}\right]\times\left[M'''\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx'''}{dt}\right) + \&c.\right]\right.$$

&c. &c.

& les valeurs de $[z]$, $[z']$, $[z'']$ &c. ſeront les mêmes que celles de $[y]$, $[y']$, $[y'']$ &c., en y mettant ſimplement z, z', z'' &c. au lieu de y, y', y'' &c.

On fera donc ſuivant notre méthode

$$[y] = 0,\ [y'] = 0,\ [y''] = 0\ \&c.$$
$$[z] = 0,\ [z'] = 0,\ [z''] = 0\ \&c.$$

Equa-

Equations qui, avec celles qu'on a trouvé plus haut, ſuffiront pour réſoudre le Problême.

XXV.

Corollaire. Soient les corps M, M', M'' &c. infiniment petits, & placés à des diſtances égales les uns des autres; marquant par la lettre d la différence de deux coordonnées conſécutives quelconques, on aura en général $\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{dy}{dx}$, & $\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'-y}{x'-x} = d \cdot \frac{dy}{dx}$.

Soit chaque petit poids, dont le fil eſt chargé, dm; ſoit de plus la ſomme des valeurs de $dm\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})$ pour toute la longueur du fil déſignée par $T\,dt$, & la ſomme indéfinie des mêmes valeurs priſe rélativement à l'abſciſſe x, marquée par la lettre S de cette maniére $S\,dm\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})$; il eſt facile de voir que les équations $(y) = 0$, $(y') = 0$, $(y'') = 0$ &c. ſe réduiront toutes à celle-ci générale

$$dm\,[\,d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dx}\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})\,] -$$

$$d \cdot \frac{dy}{dx} \times [\,T\,dt - S\,dm\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})\,] = 0;$$

que de même les équations $(z) = 0$, $(z') = 0$, $(z'') = 0$ &c. ſe changeront en

$$dm\,[\,d \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dx}\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})\,] -$$

$$d \cdot \frac{dz}{dx} \times [\,T\,dt - S\,dm\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})\,] = 0.$$

Ce ſeront donc ces deux équations qui ſerviront à déterminer le mouvement du fil; mais il y faudra encore ajouter une troiſiéme équation qui ſe déduira de ce que chaque élément

ment du fil, dont l'expreſſion générale eſt $\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, doit démeurer conſtant, pendant que le fil varie de courbe. Cette équation ſera donc

$$\frac{d \cdot \surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt} = 0, \text{ ſavoir}$$

$$dx\left(\frac{d\,dx}{dt}\right) + dy\left(\frac{d\,dy}{dt}\right) + dz\left(\frac{d\,dz}{dt}\right) = 0.$$

Dans le cas des oſcillations infiniment petites on a $\frac{dx}{dt} = 0$, parce qu'alors chaque point du fil répond toujours à très-peu-près au même point de l'axe; de plus ſi on regarde le fil comme uniformément épais, & que l'élément de ſa courbe $\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ ſoit dénoté par ds; on aura $dm = ds$, & la formule intégrale $S dm\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})$ ſe réduira à $S P\,ds\,dt =$ (à cauſe de $P\,dt$ conſtant) $P\,s\,dt$, étant la longueur de la partie du fil qui répond à l'abſciſſe x; par conſéquent ſi la longueur totale du fil eſt l, on aura $T = P\,l$, & les deux premiéres équations deviendront celles-ci beaucoup plus ſimples

$$ds\left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dx} P\,dt\right) - P\,dt\,d \cdot \frac{dy}{dx} \times (l - s) = 0$$

$$ds\left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dx} P\,dt\right) - P\,dt\,d \cdot \frac{dz}{dx} \times (l - s) = 0$$

la troiſiéme ſera inutile.

XXVI.

Scholie. Si les fils f, f', f'' &c. qui joignent les corps M, M', M'' &c. étoient extenſibles, & élaſtiques, on auroit alors les équations

$$f\,\delta f = x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z;$$

$$f'\delta f' = (x' - x) \times (\delta x' - \delta x) + (y' - y) \times (\delta y' - \delta y) + (z' - z) \times (\delta z' - \delta z);$$

$f''\delta f''$

$$f\,\delta f'' = (x''-x')\times(\delta x''-\delta x') + (y''-y')\times(\delta y''-\delta y') + (z''-z')\times(\delta z''-\delta z'),$$

& ainſi de ſuite.

On trouvera de plus, en appellant F, F', F'' &c. les forces d'élaſticité, ou de contraction des fils f, f', f'' que l'équation (V) deviendra

$$\begin{aligned} &M u\,\delta u + M' u'\,\delta u' + M'' u''\,\delta u'' + \&c. \\ &= P\,(M\delta x + M'\delta x' + M''\delta x'' + \&c.) \\ &\quad - F\delta f - F'\delta f' - F''\delta f'' - \&c., \end{aligned}$$

comme il eſt facile de s'en aſſurer en appliquant le Principe de la conſervation des forces vives, au cas dont il s'agit ici.

On mettra donc dans cette expreſſion de $Mu\,\delta u + M'u'\,\delta u' + M''u''\,\delta u'' + \&c.$ au lieu de δf, $\delta f'$, $\delta f''$ &c. les valeurs qu'on vient de trouver, & on la ſubſtituera enſuite dans l'équation (E) de *l'Art. IX.*; ce qui donnera, après avoir ordonné les termes, & mis dt à la place de $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., une équation de cette forme

$$\begin{aligned} \int[\,&(x)\,\delta x + (x')\,\delta x' + (x'')\,\delta x'' + \&c. + \\ &(y)\,\delta y + (y')\,\delta y' + (y'')\,\delta y'' + \&c. + \\ &(z)\,\delta z + (z')\,\delta z' + (z'')\,\delta z'' + \&c\,] = 0; \end{aligned}$$

dans laquelle

$$(x) = M\left(d\cdot\frac{dx}{dt} - P\,dt\right) + \left(\frac{x}{f}F - \frac{x'-x}{f'}F'\right)dt$$

$$(x') = M'\left(d\cdot\frac{dx'}{dt} - P\,dt\right) + \left(\frac{x'-x}{f'}F' - \frac{x''-x'}{f''}F''\right)dt$$

$$(x'') = M''\left(d\cdot\frac{dx''}{dt} - P\,dt\right) + \left(\frac{x''-x'}{f''}F'' - \frac{x'''-x''}{f'''}F'''\right)dt$$

&c. &c.

$$(y) = M\,d\cdot\frac{dy}{dt} + \left(\frac{y}{f}F - \frac{y'-y}{f'}F'\right)dt$$

$$(y') = M'\,d\cdot\frac{dy'}{dt} + \left(\frac{y'-y}{f'}F' - \frac{y''-y'}{f''}F''\right)dt$$

$$(y'') = M'' d \cdot \frac{dy''}{dt} + \left(\frac{y'' - y'}{f''} F'' - \frac{y''' - y''}{f'''} F'''\right) dt$$

&c. &c.

& les autres expreſſions (ζ), (ζ'), (ζ'') ſeront les mêmes que les (y), (y'), (y'') &c., en changeant ſeulement y en ζ, y' en ζ', y'' en ζ'' &c.

De cette équation on tirera donc, ſuivant notre méthode les équations particuliéres

$$(x) = 0, \quad (x') = 0, \quad (x'') = 0 \text{ &c.}$$
$$(y) = 0, \quad (y') = 0, \quad (y'') = 0 \text{ &c.}$$
$$(\zeta) = 0, \quad (\zeta') = 0, \quad (\zeta'') = 0 \text{ &c.}$$

qui ſeront celles du mouvement des corps M, M', M'' &c.

XXVII.

Corollaire. Si on veut, que les maſſes M, M', M'' &c. ſoient infiniment petites, & placées à des diſtances infiniment petites les unes des autres; conſervant les ſuppoſitions faites dans *l'Art. XXV.*, on aura en général $M = dm$, $f = ds$; $x' - x = dx$, $y' - y = dy$, $\zeta' - \zeta = d\zeta$; & l'on trouvera que les équations ci-deſſus ſe changeront dans les trois ſuivantes.

$$dm\left(d \cdot \frac{dx}{dt} - P dt\right) - d \cdot \frac{F dx}{ds} \times dt = 0$$

$$dm\, d \cdot \frac{dy}{dt} - d \cdot \frac{F dy}{ds} \times dt = 0$$

$$dm\, d \cdot \frac{d\zeta}{dt} - d \cdot \frac{F d\zeta}{ds} \times dt = 0,$$

où la quantité F marque l'élaſticité variable de chaque élément du fil.

Si on fait abſtraction de la peſenteur P, & qu'on ſuppoſe, outre cela, les oſcillations du fil infiniment petites, enſorte que l'abſciſſe x demeure toujours la même pour chaque élément ds; la premiére équation ſe réduira à

$-\mathrm{d}\cdot\frac{F\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\times dt = 0$; dont l'intégrale eſt $\frac{F\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = k$; ce qui donne $\frac{F}{\mathrm{d}s} = \frac{k}{\mathrm{d}x}$, & cette valeur étant ſubſtituée dans les deux autres équations, on aura, à cauſe de k conſtant, $dm\,d\cdot\frac{dy}{dt} = \mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times k\,dt$, $dm\,d\cdot\frac{d\zeta}{dt} = \mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\times k\,dt$. Soit X l'épaiſſeur du fil, en ſorte que $dm = X\mathrm{d}x$ (il faudroit mettre à la rigueur $dm = X\mathrm{d}s$, mais comme on ſuppoſe les vibrations infiniment petites, il eſt clair que $\mathrm{d}y$ & $\mathrm{d}\zeta$ ſeront auſſi infiniment petites par rapport à $\mathrm{d}x$, & qu'ainſi $\mathrm{d}s$ ſera à très-peu-près $= \mathrm{d}x$); on trouvera, en différentiant & prenant dt & $\mathrm{d}x$ pour conſtantes, ce qui eſt permis, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k\mathrm{d}^2y}{X\mathrm{d}x^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt} = \frac{k\mathrm{d}^2\zeta}{X\mathrm{d}x^2}$; équations connues.

XXVIII.

Remarque. Les équations trouvées pour le mouvement d'un fil vibrant élaſtique, ou non, peuvent encore l'être d'une autre maniére plus directe, en regardant d'abord le fil comme un aſſemblage d'une infinité de points mobiles; c'eſt ce qu'il eſt bon de faire voir, pour développer davantage l'application de notre Principe général à ces ſortes de queſtions.

XXIX.

Probleme 6. Trouver le mouvement d'un fil inextenſible, dont tous les points ſont ſollicités par des forces quelconques P, Q, R &c.

Solution. En conſervant les noms donnés dans *l'Art. XXV.*; ſoit de plus u la viteſſe de chaque élément du fil, & ds le petit eſpace qu'il parcourt dans le tems dt; il eſt facile de voir que la formule du Principe général deviendra

dra $S\,dm\int u\,ds$. On fera donc, suivant notre méthode, l'équation $\delta \cdot S\,dm\int u\,ds = 0$, qui se réduira d'abord (à cause que dm est constant pendant que le fil varie de courbe) à $S\,dm\,\delta\int u\,ds = 0$, savoir à $S\,dm\int(u\,\delta\,ds + \delta u\,ds) = S\,dm\int u\,\delta\,ds + S\,dm\int u\,\delta u\,dt = 0$, en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$.

Maintenant, si on prend pour chaque élément du fil trois coordonnées rectangles x, y, z, comme dans les Prob. 1., on aura aussi $\delta\,ds = \frac{1}{ds}(dx\,d\,\delta x + dy\,d\,\delta y + dz\,d\,\delta z)$, & $\int u\,\delta\,ds = -\int(d\cdot\frac{dx}{dt} \times \delta x + d\cdot\frac{dy}{dt} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dt} \times \delta z)$ en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$; donc l'intégrale $S\,dm\int u\,\delta\,ds$ deviendra, en transposant les signes S, $\int$ (ce qui est évidemment permis) $-\int S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} \times \delta x + d\cdot\frac{dy}{dt} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dt} \times \delta z)$.

On changera aussi, par la même transposition des signes, la formule $S\,dm\int u\,\delta u\,dt$ en $\int S\,dm\,u\,\delta u\,dt$; & l'on aura l'équation

$$(K) \ldots\ \int S\,dm\,(u\,\delta u\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt} \times \delta x - d\cdot\frac{dy}{dt} \times \delta y - d\cdot\frac{dz}{dt} \times \delta z) = 0.$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de $S\,dm\,u\,\delta u\,dt$. Or il n'est pas difficile de voir que l'équation (V) de l'*Art. VIII.* appliquée à la question présente donne $S\,dm\,u\,\delta u = -S\,dm\,(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c.)$. On aura donc, en multipliant par dt dont la valeur est la même pour tous les élémens du fil, $S\,dm\,u\,\delta u\,dt = -S\,dm\,(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c.)\,dt$; ou bien, en mettant,

ſelon les ſuppoſitions de *l'Art. I.*, $\Pi\delta x + \pi\delta y + \Psi\delta z$ au lieu de $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.$,

$$Sdmu\delta u\,dt = -Sdm(\Pi dt\delta x + \pi dt\delta y + \Psi dt\delta z) \ldots (X)$$

Cette valeur ſubſtituée dans l'équation (K), il viendra

$$(L) \ldots\ldots\ldots\ldots - \int S\, dm\left(\left[d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right]\delta x + \left[d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt\right]\delta y + \left[d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi dt\right]\delta z\right) = 0.$$

Préſentement, comme chaque élément du fil, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, eſt ſuppoſé inextenſible, on a, comme dans *l'Art. XXV.*, l'équation

$dx\left(\frac{d\,dx}{dt}\right) + dy\left(\frac{d\,dy}{dt}\right) + dz\left(\frac{d\,dz}{dt}\right) = 0$. On a de plus, par la même raiſon, $\delta\cdot\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = 0$, ce qui donne $dx\delta\,dx + dy\delta\,dy + dz\delta\,dz = 0$, ſavoir (en tranſpoſant les deux caractériſtiques δ, d) $dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z = 0$; d'où l'on tire $d\delta x = -\frac{dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{dx}$, &, en intégrant, $Sd\delta x = \delta x = \delta' x - S\frac{dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{dx}$; $\delta' x$ dénote la valeur de δx lorſque l'intégrale marquée par S eſt zéro, ſavoir la valeur du δx à la premiére extrémité du fil. La ſubſtitution de cette valeur de δx dans l'équation (L) changera l'expreſſion intégrale $Sdm\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)\delta x$ en celle-ci $Sdm\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)\delta' x - Sdm\left[\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)S\left(\frac{dy}{dx}d\delta y + \frac{dz}{dx}d\delta z\right)\right]$. Or la différence $\delta' x$ étant conſtante, peut être dégagée du ſigne d'intégration; donc ſi Tdt exprime la valeur totale de l'intégrale $Sdm\left(d\cdot\frac{dx}{dt}\right.$

+

$+ \Pi dt$), l'expreſſion $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) \delta' x$ ſe réduira à celle-ci plus ſimple $T dt \delta' x$. Il s'agit maintenant de faire diſparoître les différences de δy & δz dans l'autre expreſſion $\left[S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) S \left(\frac{dy}{dx} d \delta y + \frac{dz}{dx} d \delta z\right)\right]$; c'eſt de quoi on viendra aiſément à bout par la méthode de *l'Art. IX. du Mémoire préc.* Suivant cette méthode, on trouvera que, ſi $T dt$ repréſente, comme ci-devant, la valeur totale de l'intégrale $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)$, & qu'on faſſe, pour abréger, $T dt - S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) = V dt$, on aura $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) S \frac{dy}{dx} d \delta y = \frac{V dt \, dy}{dx} \delta y - S d \cdot \frac{V dt \, dy}{dx} \times \delta y$, & de même $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) S \frac{dz}{dx} d \delta z = \frac{V dt \, dz}{dx} \delta z - S d \cdot \frac{V dt \, dz}{dx} \times \delta z$: où les termes qui ſe trouvent hors du ſigne d'intégration S doivent être pris avec les conditions énoncées à la fin de *l'Art. I. du Mém. préc.*; or la valeur de $V dt$ qui répond au dernier point du fil eſt nulle, parceque $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)$ devient alors $= T dt$, & pour le premier point cette valeur eſt $= T dt$, parceque $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) = 0$; donc ſi on marque par $'x$, $'y$, $'z$ les coordonnées qui répondent à ce point, on aura $- \frac{T dt \, d'y}{d'x} \delta' y$ pour la valeur exacte du terme $\frac{V dt \, dy}{dx} \delta y$, & $- \frac{T dt \, d'z}{d'x} \delta' z$ pour celle de l'autre terme $\frac{V dt \, dz}{dx} \delta z$. Par ces ſubſtitutions on aura

donc

donc $S\,dm\,[(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt)\,S\,(\frac{dy}{dx}\,d\delta y+\frac{dz}{dx}\,d\delta z)]=$
$-T\,dt\,(\delta' x+\frac{dy}{dx}\delta' y+\frac{dz}{dx}\delta' z)-S\,(d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx}\times\delta y$
$+d\cdot\frac{V\,dt\,dz}{dx}\times\delta z)$, & l'équation (L) ſe changera en celle-ci

$$(M)\ldots\ldots-\int(\delta' x+\frac{dy}{dx}\delta' y+\frac{dz}{dx}\delta' z)\,T\,dt$$
$$-\int S\,[(d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx}+dm\,d\cdot\frac{dy}{dt}+dm\,\pi\,dt)\,\delta y+$$
$$(d\cdot\frac{V\,dt\,dz}{dx}+dm\,d\cdot\frac{dz}{dt}+dm\,\Psi\,dt)\,\delta z]=0;$$

d'où l'on tire pour tous les points du fil en général

$$d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx}+dm\,(d\cdot\frac{dy}{dt}+\pi\,dt)=0$$
$$d\cdot\frac{V\,dt\,dz}{dx}+dm\,(d\cdot\frac{dz}{dt}+\Psi\,dt)=0,$$

& ces équations, avec celle qui a été trouvée précédemment

$$dx\,(\frac{d\,dx}{dt})+dy\,(\frac{d\,dy}{dt})+dz\,(\frac{d\,dz}{dt})=0,$$

ſerviront pour déterminer le mouvement du fil.

Si on fait dans ces équations $\Pi=-P$, $\pi=0$, $\Psi=0$, elles reviendront au même que celles de *l'Art. XXV.*, comme il eſt facile de s'en aſſurer par un calcul fort ſimple.

XXX.

Scholie 1. Maintenant, pour ſatisfaire au reſte de l'équation (M) on fera encore $(\delta' x+\frac{dy}{dx}\delta' y+\frac{dz}{dx}\delta' z)\,Tdt=0$, équation qui appartient uniquement au premier point du fil.

Suppo-

Suppoſons d'abord ce point abſolument fixe, il eſt clair qu'on aura $\delta' x = 0$, $\delta' y = 0$, $\delta' z = 0$, ce qui rendra nuls tous les termes de l'équation dont il s'agit; donc les équations trouvées à la fin de *l'Art. préc.* ſuffiront dans ce cas pour réſoudre le Problême.

Mais ſi l'autre bout du fil eſt auſſi fixe, il faudra faire alors quelques changemens à ces équations. Pour cela ſoit repriſe l'équation $\delta x = \delta' x - S\left(\frac{dy}{dx} d\delta y + \frac{dz}{dx} d\delta z\right)$; on trouvera, en intégrant par parties avec l'addition des conſtantes néceſſaires, $\delta x = \delta' x - \frac{dy}{dx}\delta y - \frac{dz}{dx}\delta z + \frac{d'y}{d'x}\delta' y + \frac{d'z}{d'x}\delta' z + S\left(d\cdot\frac{dy}{dx}\times\delta y + d\cdot\frac{dz}{dx}\times\delta z\right)$. Déſignons par x', y', z' les valeurs de x, y, z qui répondent à l'extrémité du fil, & rapportons l'équation qu'on vient de trouver à ce point, on aura en tranſpoſant

$$\delta x' + \frac{dy'}{dx'}\delta y' + \frac{dz'}{dx'}\delta z' - \delta' x - \frac{d'y}{d'x}\delta' y - \frac{d'z}{d'x}\delta' z - S\left(d\cdot\frac{dy}{dx}\times\delta y + d\cdot\frac{dz}{dx}\times\delta z\right) = 0:$$

l'intégrale $S\left(d\cdot\frac{dy}{dx}\times\delta y + d\cdot\frac{dz}{dx}\times\delta z\right)$ étant priſe pour toute la longueur du fil. Cette équation étant vraie pour tous les inſtans du mouvement du fil, on peut la multiplier par dt, & en prendre l'intégrale rélativement au tems t; on aura donc en affectant tous les termes du ſigne $\int$

$$\int\left(\delta x' + \frac{dy'}{dx'}dy' + \frac{dz'}{dx'}\delta z' - \delta' x - \frac{d'y}{d'x}\delta' y - \frac{d'z}{d'x}\delta' z\right)dt - \int S\left(d\cdot\frac{dy}{dx}\times\delta y + d\cdot\frac{dz}{dx}\times\delta z\right)dt = 0 \ldots\ldots (N)$$

Equation qui doit avoir lieu en même tems que l'équation générale (M) en faiſant $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$

$= 0$

$= 0$ conformément à l'hipotéſe, ce qui la réduit à $-\int S\left(\mathrm{d}\cdot\frac{dy}{dx}\times\delta y+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{dx}\times\delta\zeta\right)dt=0$; je multiplie donc cette équation par un coéficient indéterminé k, & je l'ajoute à l'équation (M); j'ai (à cauſe de $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta'\zeta=0$)

$$\int S\left[\left(\mathrm{d}\cdot\frac{V dt\,\mathrm{d}\nu}{dx}+dm\,d\cdot\frac{dy}{dt}+dm\,\pi dt+d\cdot\frac{dy}{dx}\times k dt\right)\delta y\right.$$
$$\left.+\left(\mathrm{d}\cdot\frac{V dt\,\mathrm{d}\zeta}{dx}+dm\,d\cdot\frac{d\zeta}{dt}+dm\,\Psi dt+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{dx}\times k dt\right)\delta\zeta\right]=0;$$

d'où je tire pour le mouvement du fil

$$\mathrm{d}\cdot\frac{V dt\,\mathrm{d}y}{dx}+dm\left(d\cdot\frac{dy}{dt}+\pi dt\right)+\mathrm{d}\cdot\frac{dy}{dx}\times k\,dt=0.$$
$$\mathrm{d}\cdot\frac{V dt\,\mathrm{d}\zeta}{dx}+dm\left(\mathrm{d}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\Psi dt\right)+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{dx}\times k dt=0.$$

Et la troiſiéme équation ſera la même que dans *l'Art. préc.*

XXXI.

Scholie 2. L'équation (N) étant multipliée par un coéficient indéterminé k, & enſuite ajoutée à l'équation (M), on a en général

$$\int\left[\left(\mathrm{d}x'\delta x'+\mathrm{d}y'\delta y'+\mathrm{d}\zeta'\delta\zeta'\right)\frac{k dt}{\mathrm{d}x'}-\right.$$
$$\left.\left(\mathrm{d}'x\delta' x+\mathrm{d}'y\delta' y+\mathrm{d}'\zeta\delta'\zeta\right)\frac{T+k}{\mathrm{d}'x}dt\right]$$
$$-\int S\left[\left(\mathrm{d}\cdot\frac{V dt\,\mathrm{d}y}{dx}+\mathrm{d}\cdot\frac{dy}{dx}\times k dt+dm\,d\cdot\frac{dy}{dt}+dm\,\pi dt\right)\delta y\right.$$
$$\left.+\left(\mathrm{d}\cdot\frac{V dt\,\mathrm{d}\zeta}{dx}+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{dx}\times k dt+dm\,d\cdot\frac{d\zeta}{dt}+dm\,\Psi dt\right)\delta\zeta\right]=0.$$

Les termes affectés du double ſigne $\int S$ fourniront d'abord pour le mouvement général du fil les mêmes équations que dans *l'Art. préc.*; enſuite les autres termes affectés ſimplement du ſigne $\int$ donneront l'équation

$(\mathrm{d}x'\delta x'$

$$(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\frac{k\,dt}{dx'} -$$

$$(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z) \times \frac{T+k}{d'x}\,dt = 0.$$

d'où l'on tire les conclusions suivantes.

1.° Si le fil est fixement arrêté à ses deux extrémités, les différences $\delta'x$, $\delta'y$, $\delta'z$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ sont nulles par elles mêmes, & l'équation, dont il s'agit ne fournit aucune condition nouvelle; c'est le cas de *l'Art. préc.*

2.° S'il n'y a qu'une des extrémités du fil, qui soit fixe, alors on aura simplement $\delta'x$, $\delta'y$, $\delta'z = 0$, ou $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z' = 0$; dans le premier cas, il restera l'équation $(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\frac{k\,dt}{dx'} = 0$, à laquelle on ne peut satisfaire qu'en mettant $k = 0$; dans le second, l'équation restante sera $-(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z)\frac{k+T}{dx}dt = 0$, laquelle donnera nécessairement $k + T = 0$, savoir $T = -k$.

3.° Si le fil est attaché d'un côté à une verge fixe le long de laquelle il puisse couler par le moïen d'un anneau, & que l'équation de la verge soit en général $dz = m\,dx + n\,dy$; alors on supposera $\delta'z = m\delta'x + n\delta'y$, ou $\delta z' = m'\delta x' + n'\delta y'$, selon que ce sera le premier, ou le dernier point du fil, qui décrira la courbe donnée, & substituant dans l'équation ci-dessus la valeur de $\delta'z$ ou de $\delta z'$ on en tirera, pour le premier cas, les deux conditions $d'x + m\,d'z = 0$, $d'y + n\,d'z = 0$, & de plus $k = 0$, si l'autre bout du fil est libre, & pour le second cas on trouvera de même $dx' + m'\,dz' = 0$, $dy' + n'dz' = 0$, & de plus $T + k = 0$, si le premier point du fil est libre.

4.° Si les deux bouts du fil coulent le long de deux courbes représentées par les équations $d'z = m\,d'x + n\,d'y$, $dz' = m'\,dx' + n'dy'$, on mettra $m\delta'x + n\delta'y$ pour

$\delta\,{}'\zeta$, & $m'\delta x' + n'\delta y'$ pour $\delta\zeta'$, & l'on fera en conſéquence $d\,{}'x + {}'m\,d\,{}'\zeta = o$, $d\,{}'y + {}'n\,d\,{}'\zeta = o$, $dx' + m'\,d\zeta' = o$, $dy' + n'\,d\zeta' = o$.

5.° Si les deux bouts du fil ſont attachés l'un à l'autre, enſorte qu'il en réſulte une courbe rentrente en elle même on aura dans ce cas $x' = {}'x$, $y' = {}'y$, $\zeta' = {}'\zeta$, & l'équation générale ſe réduira à $-(d\,{}'x\,\delta\,{}'x + d\,{}'y\,\delta\,{}'y + d\,{}'\zeta\,\delta\,{}'\zeta)\,\frac{T\,dt}{d\,{}'x} = o$; d'où $T = o$ comme dans le premier cas du n. 1.

Toutes ces équations, au reſte, devront ſe vérifier au moïen des conſtantes qui ſe trouveront dans les équations générales de *l'Art. préc.* après leur intégration.

XXXII.

Scholie 3. Imaginons que le fil ſoit emporté par un corps de maſſe finie M' attaché à ſon extrémité, & animé par des puiſſances quelconques P', Q', R' *&c.* Il eſt clair que dans ce cas la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum* ne ſera plus ſimplement $S\,dm\int u\,ds$, mais $S\,dm\int u\,ds + M'\int u'\,ds'$ en nommant u' la viteſſe du corps M', & ds' l'élément de la courbe qu'il décrit. Or cette derniére formule étant traitée comme celle du Prob. 1. donnera pour ſa différentielle

$$-M'\int\left[\left(d\cdot\frac{dx'}{dt}+\Pi' dt\right)\delta x' + \left(d\cdot\frac{dy'}{dt}+\pi' dt\right)\delta y' + \left(d\cdot\frac{d\zeta'}{dt}+\Psi' dt\right)\delta\zeta'\right];$$

on ajoutera donc cette quantité au premier membre de l'équation générale de *l'Art. préc.*, & l'on aura celle-ci

$$-\int\left[\left(M' d\cdot\frac{dx'}{dt} + M'\Pi' dt - k dt\right)\delta x' +\right.$$

$$\left.\left(M' d\cdot\right.\right.$$

$$(M'd\cdot\frac{dy'}{dt}+M'\pi'dt-\frac{dy'}{dx'}k\,dt)\delta y'+$$

$$(M'd\cdot\frac{d\zeta'}{dt}+M'\Psi dt-\frac{d\zeta'}{dx'}k\,dt)\delta\zeta'+$$

$$(d'x\delta'x+d'y\delta'y+d'\zeta\delta'\zeta)\times\frac{T+k}{d'x}dt]$$

$$-\int S\,[(d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx}+d\cdot\frac{dy}{dx}\times k\,dt+dm\,d\cdot\frac{dy}{dt}+dm\,\pi\,dt)\delta y$$

$$-(d\cdot\frac{V\,dt\,d\zeta}{dx}+d\cdot\frac{d\zeta}{dx}\times k\,dt+dm\,d\cdot\frac{d\zeta}{dt}+dm\,\Psi\,dt)\delta\zeta]$$

$$=0\quad\ldots\ldots\ldots

Si ce corps étoit contraint de se mouvoir sur une surface donnée par l'équation $dz' = m'dx' + n'dy'$; on mettroit, comme à l'ordinaire, $m'\delta x' + n'\delta y'$ au lieu de $\delta z'$, & l'on en tireroit les équations

$$M'\left(d \cdot \frac{dx'}{dt} + \Pi' dt\right) - k\,dt +$$

$$\left[M'\left(d \cdot \frac{dz'}{dt} + \Psi' dt\right) - \frac{dz'}{dx'} k\,dt\right] m' = 0$$

$$M'\left(d \cdot \frac{dy'}{dt} + \pi' dt\right) - \frac{dy'}{dx'} k\,dt +$$

$$\left[M'\left(d \cdot \frac{dz'}{dt} + \Psi' dt\right) - \frac{dz'}{dx'} k\,dt\right] n' = 0.$$

A l'égard des termes $(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z) \times \frac{T + k}{d'x} dt$ qui appartiennent au premier point du fil, ils fourniront les mêmes conditions que dans *l'Art. préc.*, selon les différentes circonstances du mouvement de ce point. Mais si l'on imaginoit de plus en ce point un autre corps $'M$, animé des puissances $'P$, $'Q$, $'R$ *&c.*, ensorte que le fil fût emporté par deux corps $'M$, M' fixement attachés à ses extrémités; alors on auroit, pour la formule du *maximum*, ou du *minimum*, $S.dm\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + 'M\int 'u\,'ds$; & l'on trouveroit, en faisant le calcul de la même maniére que ci-dessus, que le premier membre de l'équation (P) seroit augmenté des termes $-'M\int\left[\left(d \cdot \frac{d'x}{dt} + '\Pi dt\right)\delta'x + \left(d \cdot \frac{d'y}{dt} + '\pi dt\right)\delta'y + \left(d \cdot \frac{d'z}{dt} + '\Psi dt\right)\delta'z\right]$; ce qui ne changeroit rien aux formules trouvées pour le mouvement du fil, & de l'autre corps M'; mais on auroit de plus l'équation

$$\left['Md \cdot \frac{d'x}{dt} + 'M\Pi dt + (T + k)\,dt\right]\delta'x +$$

$('Md \cdot$

$$[{}'Md\cdot\frac{d'y}{dt}+{}'M'\pi\,dt+\frac{d'y}{d's}\times(T+k)\,dt]\delta'y+$$

$$[{}'Md\cdot\frac{d'z}{dt}+{}'M'\Psi\,dt+\frac{d'z}{d's}\times(T+k)\,dt\,\delta]\delta'z=0;$$

d'où l'on tireroit pour le mouvement du corps $'M$ des formules analogues à celles qu'on a trouvées pour le corps M'.

XXXIII.

Probleme 7. Réſoudre le Problême précédent, en ſuppoſant que le fil ſoit extenſible & élaſtique.

Solution. Soit F le reſſort, c'eſt-à-dire, la force de contraction de chaque élément du fil, on aura en général, par l'équation (V) de *l'Art. VIII.*, $Sdmu\delta u = -Sdm(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\&c.)-SF\delta f$; ce qui donne, en multipliant par dt, & mettant $\Pi\delta x+\pi\delta y+\Psi\delta z$ au lieu de $P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\&c.$, & ds au lieu de f,

$$(Y)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad Sdmu\delta u\,dt = -Sdm(\Pi dt\,\delta x+\pi\,dt\,\delta y+\Psi\,dt\,\delta z)-SFdt\delta ds.$$

Or $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$; donc

$$\delta ds=\frac{dx\,\delta dx+dy\,\delta dy+dz\,\delta dz}{ds}$$

$$=\frac{dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z}{ds};$$

donc, mettant cette valeur dans $SFdt\delta ds$, & intégrant par parties avec les conſtantes néceſſaires, on aura

$$SFdt\delta ds=\frac{F'dt}{ds'}(dx'\delta x'+dy'\delta y'+dz'\delta z')-$$

$$\frac{{}'F.dt}{d's}({}'dx\delta'x+{}'dy\delta'y+{}'dz\delta'z)-$$

$$S\left(d\cdot\frac{Fdx}{ds}\times\delta x+d\cdot\frac{Fdy}{ds}\times\delta y+d\cdot\frac{Fdz}{ds}\times\delta z\right)dt.$$

Main-

Maintenant, pour réſoudre le Problême, il n'y a plus qu'à mettre dans l'équation (*K*) de *l'Art. XXIX.* au lieu de $S dm u \delta u dt$ la valeur qu'on vient de trouver, & l'on aura, en ordonnant les termes

$$-\int [(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z') \frac{F' dt}{ds'} -$$
$$(d'x\delta'x + d'x\delta'y + d'z\delta'z) \frac{'F dt}{d's}] +$$
$$\int S [(d \cdot \frac{F dx}{ds} \times dt - dm \Pi dt - dm d \cdot \frac{dx}{dt}) \delta x +$$
$$(d \cdot \frac{F dy}{ds} \times dt - dm \pi dt - dm d \cdot \frac{dy}{dt}) \delta y +$$
$$(d \cdot \frac{F dz}{ds} \times dt - dm \Psi dt - dm d \cdot \frac{dz}{dt}) \delta z] = 0 ;$$

d'où l'on tire pour les équations générales du mouvement du fil

$$d \cdot \frac{F dx}{ds} \times dt - dm (\Pi dt + d \cdot \frac{dx}{dt}) = 0$$
$$d \cdot \frac{F dy}{ds} \times dt - dm (\pi dt + d \cdot \frac{dy}{dt}) = 0$$
$$d \cdot \frac{F dz}{ds} \times dt - dm (\Psi dt + d \cdot \frac{dz}{dt}) = 0,$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans *l'Art. XXVII.* en mettant π, & $\Psi = 0$, & $- P$ au lieu de Π.

On aura de plus l'équation

$$(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z') \frac{F' dt}{ds'} -$$
$$(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z) \frac{'F dt}{d's} = 0$$

qu'on traitera qu'on a fait ci-devant l'équation (*P*), & qui donnera par conſéquent des concluſions ſemblables ſur le mouvement des deux extrémités du fil. J'en laiſſe le détail au Lecteur.

XXXIV.

PROBLEME 8. Trouver le mouvement d'un corps de figure quelconque, animé par des forces quelconques.

SOLUTION. Soit nommée dm chaque particule du corps, u sa viteſſe, & ds l'eſpace qu'elle parcourt dans le tems dt; on aura comme dans *l'Art. XXIX.* $Sdmsuds$ pour la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*.

En ſuivant la méthode expliquée dans cet *Article*, on parviendra de même à l'équation (L)

$$-\int Sdm\left[\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)\delta x+\left(d\cdot\frac{dy}{dt}+\pi dt\right)\delta y+\left(d\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\Psi dt\right)\delta\zeta\right]=0,$$

& il n'y aura plus qu'à ſubſtituer dans cette équation les valeurs de dx, dy, $d\zeta$, & δx, δy, $\delta\zeta$ convenables à chaque particule du corps donné.

Pour trouver ces valeurs je prens dans l'intérieur du corps un point quelconque fixe, que j'appelle le centre de rotation, & dont je ſuppoſe que la poſition ſoit repréſentée par les coordonnées rectangles X, Y, Z; je rapporte à ce centre chacun des autres points du corps par le moïen de trois nouvelles coordonnées p, q, r priſes dans les mêmes axes que les X, Y, Z; j'ai ainſi $x=X+p$, $y=Y+q$, $\zeta=Z+r$; par conſéquent $dx=dX+dp$, $dy=dY+dq$, $d\zeta=dZ+dr$, & de même $\delta x=\delta X+\delta p$, $\delta y=\delta Y+\delta q$, $\delta\zeta=\delta Z+\delta r$.

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des différences de p, q, r pour chaque point du corps; pour cela il faut conſidérer le mouvement du corps autour de ſon centre, & déterminer les variations qui en réſultent dans chacune des lignes p, q, r. Or il eſt facile de voir que, quel que ſoit ce mouvement, il peut toujours être regardé comme formé de trois mouvemens de rotation autour de trois axes perpendiculaires entr'eux, & paſſant par le

centre

centre dont nous parlons ; donc ſi on prend pour les axes de rotation ceux des coordonnées p, q, r ; on trouvera par un calcul très-ſimple que, tandis que le corps tourne autour de l'axe des r d'un mouvement angulaire dR, la ligne p croîtra de la quantité $q\,dR$, & la ligne q décroîtra de la quantité $p\,dR$; que de même, en nommant dQ l'angle de rotation autour de l'axe des q, les lignes p & r deviendront par ce mouvement $p + r\,dQ$, $r - p\,dQ$; & qu'enfin l'angle de rotation autour de l'axe des p, étant dP, il en réſultera dans la ligne q un accroiſſement $= r\,dP$, & dans la ligne r un décroiſſement $= q\,dP$. Donc en ajoutant enſemble toutes ces différentes variations des lignes p, q, r, & exprimant les variations totales par dp, dq, dr, on aura en général

$$\left.\begin{aligned} dp &= r\,dQ + q\,dR \\ dq &= r\,dP - p\,dR \\ dr &= -q\,dP - p\,dQ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (Q)$$

& par conſéquent auſſi, en changeant d en δ.

$$\begin{aligned} \delta p &= r\delta Q + q\delta R \\ \delta q &= r\delta P - p\delta R \\ \delta r &= -q\delta P - p\delta Q. \end{aligned}$$

On aura donc par-là

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta X + r\delta Q + q\delta R \\ \delta y &= \delta Y + r\delta P - p\delta R \\ \delta z &= \delta Z - q\delta P - p\delta Q ; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dX}{dt} + r\frac{dQ}{dt} + q\frac{dR}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dY}{dt} + r\frac{dP}{dt} - p\frac{dR}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dZ}{dt} - q\frac{dP}{dt} - p\frac{dQ}{dt}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$d\cdot\frac{dx}{dt} = d\cdot\frac{dX}{dt} + r\,d\cdot\frac{dQ}{dt} + dr\frac{dQ}{dt} + q\,d\cdot\frac{dR}{dt} +$$

dq

$dq\frac{dR}{dt}$ ſavoir, en mettant pour dq, dr, leurs valeurs,

$$= d\cdot\frac{dX}{dt} + r\,d\cdot\frac{dQ}{dt} + q\,d\cdot\frac{dR}{dt} - q\frac{dP\,dQ}{dt} - p\frac{dQ^2}{dt} + r\frac{dP\,dR}{dt} - p\frac{dR^2}{dt};$$

on aura de la même maniére

$$d\cdot\frac{dy}{dt} = d\cdot\frac{dY}{dt} + r\,d\cdot\frac{dP}{dt} - p\,d\cdot\frac{dR}{dt} - q\frac{dP^2}{dt} - p\frac{dP\,dQ}{dt} - r\frac{dQ\,dR}{dt} - q\frac{dR^2}{dt};$$

$$d\cdot\frac{dz}{dt} = d\cdot\frac{dZ}{dt} - q\,d\cdot\frac{dP}{dt} - p\,d\cdot\frac{dQ}{dt} - r\frac{dP^2}{dt} + p\frac{dP\,dR}{dt} - r\frac{dQ^2}{dt} - q\frac{dQ\,dR}{dt}.$$

Subſtituant ces valeurs dans l'équation (L), & faiſant ſortir hors du ſigne S les quantités dX, dY, dZ, δX, δY, δZ, dP, dQ, dR, δP, δQ, δR, qui ſont les mêmes pour chaque point du corps, enfin ordonnant les termes par rapport à δX, δY, δZ, δP, δQ, δR; on aura une équation de la forme ſuivante

$$\int([X]\delta X + [Y]\delta Y + [Z]\delta Z + [P]\delta P + [Q]\delta Q + [R]\delta R) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (S)$$

dans laquelle

$$[X] = Md\cdot\frac{dX}{dt} + S\,r\,dm\times\left(d\cdot\frac{dQ}{dt} + \frac{dP\,dR}{dt}\right) + S\,q\,dm\times\left(d\cdot\frac{dR}{dt} - \frac{dP\,dQ}{dt}\right) - S\,p\,dm\times\frac{dQ^2 + dR^2}{dt} + S\,\Pi\,dm\,dt$$

$$[Y] = Md\cdot\frac{dY}{dt} + S\,r\,dm\times\left(d\cdot\frac{dP}{dt} - \frac{dQ\,dR}{dt}\right) + S\,q\,dm\times\frac{dP^2 + dR^2}{dt} - S\,p\,dm\times\left(d\cdot\frac{dR}{dt} + \frac{dP\,dQ}{dt}\right) + S\,\pi\,dm\,dt$$

$$[Z] = Md \cdot \frac{dZ}{dt} - Srdm \times \frac{dP^2 + dQ^2}{dt} - Sqdm \times \left(d \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{dPdR}{dt}\right) - Spdm \times \left(d \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{dPdR}{dt}\right) + S\Psi dmdt.$$

(M exprime la valeur de Sdm, ſavoir la maſſe entiére du corps).

$$[P] = Srdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} - Sqdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + (Sr^2dm + Sq^2dm) \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Spqdm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - Sprdm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sqrdm \times \frac{dQ^2 - dR^2}{dt} - Sprdm \times \frac{dPdQ}{dt} - Spqdm \times \frac{dPdR}{dt} + (Sq^2dm - Sr^2dm) \times \frac{dQdR}{dt} + S\pi rdmdt - S\Psi qdmdt$$

$$[Q] = Srdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + (Sr^2dm + Sp^2dm) \times d \cdot \frac{dQ}{dt} + Spqdm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Sqrdm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sprdm \times \frac{dP^2 - dR^2}{dt} - Sqrdm \times \frac{dPdQ}{dt} + Spqdm \times \frac{dQdR}{dt} + (Sr^2dm - Sp^2dm) \times \frac{dPdR}{dt} + S\Pi rdmdt - S\Psi pdmdt$$

$$[R] = Sqdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} + (Sp^2dm + Sq^2dm) \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sqrdm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - Sprdm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Spqdm \times \frac{dP^2 - dQ^2}{dt} + Sqrdm \times \frac{dPdR}{dt} + Sprdm \times \frac{dQdR}{dt} + (Sp^2dm - Sq^2dm) \times \frac{dPdQ}{dt} + S\Pi qdmdt - S\pi pdmdt.$$

Cette

Cette équation donnera la ſolution du Problême en faiſant, comme à l'ordinaire, les coéficiens des différences marquées par δ, chacun en particulier $= 0$; comme on va le voir dans les Corollaires ſuivans.

XXXV.

Remarque. On peut ſimplifier les expreſſions de $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, $[P]$, $[Q]$, $[R]$, en faiſant tomber le centre de rotation dans le centre de gravité du corps. Car alors les intégrales $Spdm$, $Sqdm$, $Srdm$, qui expriment la ſomme des momens de toutes les particules du corps par rapport à ſes trois axes de rotation, deviendront néceſſairement égales à zéro, par la proprieté connue de ce centre.

A l'égard des autres intégrales Sp^2dm, Sq^2dm &c., il faut obſerver que leur valeur dépend de la poſition inſtantanée du corps, & qu'elle varie, par conſéquent, avec le tems t.

En effet $d \cdot Sp^2dm = Sd \cdot p^2dm = 2Spdpdm =$ (en mettant au lieu de dp ſa valeur $rdQ + qdR$) $2Sprdm \times dQ + 2Spqdm \times dR$;
on trouvera de la même maniére
$d \cdot Sq^2dm = 2Sqrdm \times dP - 2Spqdm \times dR$,
$d \cdot Sr^2dm = -2Sqrdm \times dP - 2Sprdm \times dQ$;
$d \cdot Spqdm = Sprdm \times dP + Sqrdm \times dQ + (Sq^2dm - Sp^2dm)dR$
$d \cdot Sprdm = -Spqdm \times dP + (Sr^2dm - Sp^2dm)dQ + Sq^2dm \times dR$
$d \cdot Sqrdm = (Sr^2dm - Sq^2dm)dP - Spqdm \times dQ - Sprdm \times dR$.

Ce ſont ces équations qui ſerviront à déterminer les valeurs générales des quantités Sp^2dm, Sq^2dm, Sr^2dm, $Spqdm$, $Sprdm$, $Sqrdm$, qui entrent dans les expreſſions $[X]$, $[Y]$ &c. de l'équation (S); mais c'eſt de quoi il ne paroit

roit pas facile de venir à bout à cauſe de la difficulté d' intégrer ces ſortes d' équations.

XXXVI.

Corollaire 1. Or ſi le corps eſt entiérement libre, en ſorte que les différences δx, δy, δz, δP, δQ, δR n' aïent entr' elles aucun rapport déterminé, il faut, pour vérifier l' équation (S), faire les coeficiens de ces différences chacun en particulier $= 0$; ce qui donne les ſix équations $[X] = 0$, $[Y] = 0$, $[Z] = 0$, $[P] = 0$, $[Q] = 0$, $[R] = 0$; par où l' on peut connoître le mouvement du corps à chaque inſtant. Si on fait dans ces équations $S p\, dm = 0$, $S q\, dm = 0$, $S r\, dm = 0$, ſelon l' hypotéſe de *l' art. préc.* les trois premiéres deviendront celles-ci

$$M d \cdot \frac{dX}{dt} + S \Pi\, dm\, dt = 0$$

$$M d \cdot \frac{dY}{dt} + S \pi\, dm\, dt = 0$$

$$M d \cdot \frac{dZ}{dt} + S \Psi\, dm\, dt = 0$$

leſquelles montrent, que le centre de gravité du corps ſe meut de la même maniére que ſi toute la maſſe du corps étoit réunie dans ce centre.

Les trois autres équations ne contiendront que les variables dP, dQ, dR, d' où dépend le mouvement de rotation du corps autour de centre de gravité; ainſi ce mouvement ſera tout à fait indépendant de celui du centre de gravité.

Imaginons que le corps ne tourne, qu' autour d' un ſeul axe, on ſuppoſera, dans les équations $[P] = 0$, $[Q] = 0$ $[R] = 0$, deux quelconques des trois variables dP, dQ, dR, égales à zéro. Soient d' abord dQ, dR, $= 0$ on aura

$$(S r^2\, dm + S q^2\, dm)\, d \cdot \frac{dP}{dt}$$

+

$$+ S\pi r dm dt - S\Psi q dm dt = 0$$

$$S p q dm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + S p r dm \times \frac{dP^2}{dt}$$

$$+ S\Pi r dm dt - S\Psi p dm dt = 0$$

$$- S p r dm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + S p q dm \times \frac{dP^2}{dt}$$

$$+ S\Pi q dm dt - S\pi p dm dt = 0$$

On trouvera de plus, par les formules données à la fin de *l'art. prec.*, $d \cdot S r^2 dm + d \cdot S q^2 dm = 0$; $d \cdot S p q dm = S p r dm \times dP$, $d \cdot S p r dm = - S p q dm \times dP$; d'où 1.° $S r^2 dm + S q^2 dm =$ conſt. (j'appellerai cette conſtante A) 2.° $\frac{d \cdot S p q dm}{S p r dm} = \frac{d \cdot S p r dm}{S p q dm}$, ſavoir $S p q dm \times d \cdot S p q dm = - S p r dm \times d \cdot S p r dm$, ce qui donne, en intégrant & réduiſant, $(S p q dm)^2 + (S p r dm)^2 =$ conſt.; ſoit cette conſtante $= B^2$, on aura $S p r dm = \sqrt{[B^2 - (S p q dm)^2]}$ donc $\frac{d \cdot S p q dm}{\sqrt{[B^2 - (S p q dm)^2]}} = dP$, d'où $S p q dm = B$ ſin. $(\alpha + P)$; α étant un angle conſtant tel que B ſin. $\alpha = S p q dm$, au commencement de la rotation du corps; par conſéquent $S p r dm = B$ cof. $(\alpha + P)$; donc ſi on ſubſtitue ces valeurs dans les trois équations ci-deſſus on aura

$$A d \cdot \frac{dP}{dt} + S\pi r dm dt - S\Psi q dm dt = 0$$

$$B \text{ ſin. } (\alpha + P) d \cdot \frac{dP}{dt} + B \text{ cof. } (\alpha + P) \frac{dP^2}{d}$$

$$+ S\Pi r dm dt - S\Psi p dm dt = 0$$

$$- B \cos. (\alpha + P) d \cdot \frac{dP}{dt} + B \text{ ſin. } (\alpha + P) \frac{dP^2}{dt}$$

$$+ S\Pi q dm d - S\pi p dm dt = 0$$

La premiére de ces équations etant multipliée par $\frac{dP}{dt}$, & enſuite

enſuite intégrée donne $\frac{A\,dP^2}{2\,dt^2} + \int (S\pi\,r\,dm - S\Psi\,q\,dm)\,dP = \frac{A\,c^2}{2}$, c étant la valeur de $\frac{dP}{dt}$ lorſque $P = 0$, c'eſt à dire la viteſſe primitive de rotation; donc ſubſtituant dans la ſeconde, & dans la troiſiéme équation, au lieu de $d \cdot \frac{dP}{dt}$ & de $\frac{dP^2}{dt}$, leurs valeurs, on aura, après avoir diviſé par dt

$$-\frac{B}{A}\,\text{ſin.}\,(\alpha + P) \times (S\pi\,r\,dm - S\Psi\,q\,dm)$$
$$-\frac{2B}{A}\,\text{cof.}\,(\alpha + P) \times \int (S\pi\,r\,dm - \Psi\,q\,dm)\,dP$$
$$+ B\,c^2\,\text{cof.}\,(\alpha + P) + S\Pi\,r\,dm - S\Psi\,p\,dm = 0$$
$$\frac{B}{A}\,\text{cof.}\,(\alpha + P) \times (S\pi\,r\,dm - S\Psi\,q\,dm)$$
$$-\frac{2B}{A}\,\text{ſin.}\,(\alpha + P) \times \int (S\pi\,r\,dm - S\Psi\,q\,dm)\,dP$$
$$+ B\,c^2\,\text{ſin.}\,(\alpha + P) + S\Pi\,q\,dm - S\pi\,p\,dm = 0$$

& ces équations renfermeront les conditions néceſſaires pour que le corps tourne librement autour d'un axe immobile.

Si les forces Π, π, Ψ ſont nulles, ou conſtantes, ou bien, ſi elles ſont proportionelles à p, q, r, on a $S\pi\,r\,dm - S\Psi\,q\,dm = 0$, $S\Pi\,r\,dm - S\Psi\,p\,dm = 0$, $S\Pi\,q\,dm - S\pi\,p\,dm = 0$; par conſéquent $\frac{dP^2}{dt^2} = c^2$, c'eſt à dire que le mouvement de rotation eſt uniforme; & les équations précédentes ſe réduiſent à $B\,c^2\,\text{cof.}\,(\alpha + P) = 0$, $B\,c^2\,\text{ſin.}\,(\alpha + P) = 0$, ce qui donne $B = 0$; on aura donc $\sqrt{[(S\,p\,q\,dm)^2 + (S\,p\,r\,dm)^2]} = 0$, ce qui ne peut arriver à moins que l'on n'ait $S\,p\,q\,dm = 0$, $S\,p\,r\,dm = 0$. Voila donc les conditions par leſquelles on déterminera la poſition de l'axe de rotation au dedans du corps. Il eſt clair que ces conditions ſont ſuffiſantes pour une telle détermination

tion; puiſque on ſait que la poſition d'une droite qui paſſe par un point donné ne dépend que de deux variables.

Soient maintenant $dP = 0$, $dR = 0$, ou $dP = 0$, $dQ = 0$, dans les équations $[P] = 0$, $[Q] = 0$, $[R] = 0$; on trouvera, par des procédés ſemblables à ceux que nous venons de pratiquer, les conditions de la rotation du corps autour de deux autres axes.

Dans la ſuppoſition de $S\,\pi\,r\,dm - S\,\Psi\,q\,dm = 0$, $S\,\Pi\,r\,dm - S\,\Psi\,q\,dm = 0$, $S\,\Pi\,q\,dm - S\,\pi\,p\,dm = 0$; les équations dont il s'agit ſeront

$$S\,p\,q\,dm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} + S\,q\,r\,dm \times \frac{dQ^2}{dt} = 0$$

$$(S\,r^2\,dm + S\,p^2\,dm)\,d \cdot \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$S\,q\,r\,dm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - S\,p\,q\,dm \times \frac{dQ^2}{dt} = 0$$

pour le cas où $dP = 0$, $dR = 0$, &

$$-S\,p\,r\,dm \times d \cdot \frac{dR}{dt} - S\,q\,r\,dm \times \frac{dR^2}{dt} = 0$$

$$S\,q\,r\,dm \times d \cdot \frac{dR}{dt} - S\,p\,r\,dm \times \frac{dR^2}{dt} = 0$$

$$(S\,p^2\,dm + S\,q^2\,dm)\,d \cdot \frac{dR}{dt} = 0$$

pour le cas où $dP = 0$, $dQ = 0$.

Dans le premier cas on aura donc $d \cdot \frac{dQ}{dt} = 0$ c'eſt à dire que la rotation ſera uniforme, & de plus $S\,q\,r\,dm = 0$, $S\,p\,q\,dm = 0$ pour la détermination de l'axe de rotation.

Le ſecond cas donnera pareillement $d \cdot \frac{dR}{dt} = 0$, ſavoir la rotation uniforme, & $S\,p\,r\,dm = 0$, $S\,q\,r\,dm = 0$ pour la détermination de ſon axe.

On trouvera donc trois axes fixes, autour de chacun deſquels le corps M pourra tourner librement & uniformement,

en

en cherchant dans ce corps la position de trois droites, qui passent par son centre de gravité, & qui soient telles, que $Spqdm = o$, $Sprdm = o$, $Sqrdm = o$, $Spqdm = o$, $Sqrdm$, $Sprdm = o$, savoir $Spqdm = o$, $Sprdm = o$ $Sqrdm = o$; p, q, r, étant les coordonnées rectangles qui déterminent la position de chaque particule du corps par rapport à chacune de ces droites; d'où il est aisé de conclure que les trois axes de rotation dont il s'agit sont nécessairement perpendiculaires entr'eux.

Au reste, quelque soit le mouvement du corps autour de son centre de gravité, il y aura toujours un axe instantané de rotation, qui passera pour ce centre, & qui sera facile à déterminer dès qu'on connoîtra les mouvemens angulaires dP, dQ, dR; soient p', q', r' les coordonnées qui répondent à chacun des point placés dans l'axe dont nous parlons; il est clair que, ces points devant être immobiles pour un instant, on doit avoir $dp' = r'dQ + q'dR = o$, $dq' = r'dP - p'dR = o$, $dr' = -q'dP - p'dQ = o$; équations dont la troisiéme est, comme on le voit, une suite nécessaire des deux prémiéres; c'est pourquoi on fera simplement $r'dQ + q'dR = o$, $r'dP - p'dR = o$: ce qui, en regardant p', q', r' comme variables, & dP, dQ, dR comme constantes, donne une droite, dont la position est aisée à déterminer par rapport aux axes des coordonnées p', q', r'.

Dans le premier instant du mouvement on a, en faisant $dP = o$, $dQ = o$, $dR = o$ dans les équations $[P] = o$, $[Q] = o$, $[R] = o$,

$$(Sr^2dm + Sq^2dm)\,d\cdot\frac{dP}{dt} + Spqdm \times d\cdot\frac{dQ}{dt}$$

$$- Sprdm \times d\cdot\frac{dR}{dt} + S\varpi rdmdt - S\Psi qdmdt = o$$

$$(Sr^2dm + Sp^2dm)\,d\cdot\frac{dQ}{dt} + Spqdm \times d\cdot\frac{dP}{dt}$$

+

$$+ Sqrdm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + S\Pi rdmdt - S\Psi pdmdt = o$$

$$(Sp^2dm + Sq^2dm)\, d \cdot \frac{dR}{dt} + Sqrdm \times d \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$- Sprdm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + S\Pi qdmdt - S\pi pdmdt = o$$

de plus les équations $r'dQ + q'dR = o$, $r'dP - p'dR = o$ étant diviſées par dt, & enſuite différentiées donnent (à cauſe de $dP = o$, $dQ = o$, $dR = o$)

$$r'd \cdot \frac{dQ}{dt} + q'd \cdot \frac{dR}{dt} = o;\ r'd \cdot \frac{dP}{dt} - p'd \cdot \frac{dR}{dt} = o;$$

d' où l' on tire

$$d \cdot \frac{dQ}{dt} = -\frac{q'}{r'} \times d \cdot \frac{dR}{dt};\ d \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{p'}{r'} \times d \cdot \frac{dR}{dt};$$

ces valeurs ſubſtituées dans les équations ci-devant, on a

$$\left[(Sr^2dm + Sq^2dm)\frac{p'}{r'} - Spqdm \times \frac{q'}{r'} - Sprdm\right]$$

$$\times d \cdot \frac{dR}{dt} + S\pi rdmdt - S\Psi qdmdt = o,$$

$$\left[-(Sr^2dm + Sp^2dm)\frac{q'}{r'} + Spqdm \times \frac{p'}{r'} + Sqrdm\right]$$

$$\times d \cdot \frac{dR}{dt} + S\Pi rdmdt - S\Psi pdmdt = o,$$

$$\left[Sp^2dm + Sq^2dm - Sqrdm \times \frac{q'}{r'} - Sprdm \times \frac{p'}{r'}\right]$$

$$\times d \cdot \frac{dR}{dt} + S\Pi qdmdt - S\pi pdmdt = o,$$

& en éliminant $d \cdot \frac{dR}{dt}$,

$$\frac{(Sr^2dm + Sq^2dm)p' - Spqdm \times q' - Sprdm \times r'}{Spqdm \times p' - (Sr^2dm + Sp^2dm)q' + Sqrdm \times r'} = \frac{S\Psi qdm - S\pi rdm}{S\Psi pdm - S\Pi rdm}.$$

$$\frac{(Sr^2dm + Sq^2dm)p' - Spqdm \times q' - Sprdm \times r'}{-Sprdm \times p' - Sqrdm \times q' + (Sp^2am + Sq^2dm)r'} = \frac{S\Psi qdm - S\pi rdm}{S\pi pdm - S\Pi qdm};$$

Equations qui donnent le rapport des coordonnées p', q', r' entr'elles, & par conſéquent la poſition de l'axe de rotation au commencement du mouvement.

XXXVII.

Corollaire 2. Si le corps n'eſt pas abſolument libre, mais qu'un de ſes points quelconque ſoit obligé de ſe mouvoir ſur une ſurface donnée; alors, prenant ce point pour le centre de rotation, & ſuppoſant la ſurface exprimée par l'équation $dZ = m\,dX + n\,dY$, on ne fera que mettre, dans l'équation (S), $m\delta X + n\delta Y$ pour δZ, & l'on aura, au lieu des trois équations $[X] = 0$, $[Y] = 0$, $[Z] = 0$, ces deux-ci $[X] + m\,[Z] = 0$, $[Y] + n\,[Z] = 0$; les trois autres ne recevant aucun changement. Mais ſi pour ſimplifier les expreſſions de $[X]$, $[Y]$ *&c.*, on veut que le centre de rotation ſoit le centre de même de gravité du corps ſuivant la Remarque de *l'Art. XXXV.*; alors on ne doit plus prendre X, Y, Z pour les coordonnées de la ſurface propoſée, mais $X + p'$, $Y + q'$, $Z + r'$: p', q', r' étant les coordonnées qui déterminent la poſition du point qui ſe meut ſur cette ſurface par rapport au centre de gravité; on aura donc $dZ + dr' = m(dX + dp') + n(dY + dq')$; & mettant au lieu de dp', dq', dr' leurs valeurs $r'dQ + q'dR$, $r'dP - p'dR$, $-q'dP - p'dQ$, & ordonnant les termes, $dZ = m\,dX + n\,dY + (q' + nr')\,dP + (p' + mr')\,dQ + (mr' - np')\,dR$; On trouvera par un raiſonnement ſemblable

$$\delta Z = m\delta X + n\delta Y + (q' + nr')\delta P + (p' + mr')\delta Q + (mq' - np')\delta R.$$

donc

donc ſubſtituant cette valeur de δZ dans l'équation (S), & faiſant les coéficiens de différences reſtantes chacun $= o$, on aura les cinq équations

$[X] + m[Z] = o$; $[Y] + n[Z] = o$; $[P] + (q' + nr') \times [Z] = o$; $[Q] + (p' + mr') \times [Z] = o$; $[R] + (mr' - np') \times [Z] = o$,

& pour la ſixiéme équation on prendra celle qu'on a trouvé ci-deſſus, ſavoir $dZ = m\,dX + n\,dY + (q' + nr')\,dP + \&c.$

Mais ſi on ſuppoſoit que le point qui répond aux coordonnées p', q', r', fût fixement attaché, alors on feroit $dX + dp' = o$, $dY + dq' = o$, $dZ + dr' = o$; ce qui donneroit, en mettant au lieu de dp', dq', dr' leurs valeurs, $dX = -r'dQ - q'dR$, $dY = -r'dP + p'dR$, $dZ = q'dP + p'dQ$; on auroit par la même raiſon $\delta X = -r'\delta Q - q'\delta R$, $\delta Y = -r'\delta P + p'\delta R$, $\delta Z = q'\delta P + p'\delta Q$; & ces valeurs ſubſtituées dans l'équation (S), on trouveroit, en faiſant les coéficiens de δP, δQ, δR chacun $= o$, les trois équations

$$-r'[Y] + q'[Z] + [P] = o$$
$$-r'[X] + q'[Z] + [Q] = o$$
$$-q'[X] + p'[Y] + [R] = o.$$

XXXVIII.

Corollaire 3. Imaginons que le corps ſoit poſé ſur un plan, ou ſur une ſurface quelconque, le long de laquelle il puiſſe gliſſer librement, en tournant ſur lui même d'une maniére quelconque; ſoient p', q', r' les coordonnées de la ſuperficie du corps, & $dr' = Mdp' + Ndq'$ ſon équation différentielle, il eſt clair; 1.° Que tandis que le corps à ſes divers mouvemens dX, dY, dZ, dP, dQ, dR, chaque point de ſa ſurface parcoura les eſpaces $dX + r'dQ + q'dR$, $dY + r'dP - p'dR$, $dZ - q'dP - p'dQ$; dans la direction des coordonnées X, Y, Z; 2.° Que

le point d'attouchement étant mobile sur cette surface, parcoura de plus dans les mêmes directions les espaces dp', dq', dr', savoir dp', dq', $Mdp' + Ndq'$; d'où il s'ensuit que les espaces entiers parcourus par le point touchant seront $dX + r'dQ + q'dR + dp'$, $dY + r'dP - p'dR + dq'$, $dZ - q'dP - p'dQ + Mdp' + Ndq'$. Or ce point devant aussi se mouvoir sur une surface représentée par l'équation $dZ = mdX + ndY$, ou bien $d\zeta = mdx + ndy$ (en appellant x, y, ζ les coordonnées de cette surface pour les distinguer des X, Y, Z qui appartiennent au centre de gravité du corps), il faudra mettre dans cette équation au lieu de dx, dy, $d\zeta$ les quantités qu'on vient de trouver; ce qui donnera après les réductions

$$dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP + (p' + mr')dQ + (mq' - np')dR + (m - M)dp' + (n - N)dq'.$$

Cette équation appartiendroit en général à tous les points, dans lesquels la superficie du corps pourroit rencontrer la surface proposée; mais dans notre cas, où l'on veut que les deux surfaces se touchent, il faudra de plus supposer qu'elles aïent les mêmes tangeantes dans leurs points de rencontre, c'est-à-dire que $m = M$, $n = N$; donc l'équation trouvée se réduira à

$$dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP + (p' + mr')dQ + (mq' - np')dR.$$

Par les mêmes raisonnemens on trouvera, en considérant les différences marquées par δ,

$$\delta Z = m\delta X + n\delta Y + (q' + nr')\delta P + (p' + mr')\delta Q + (mq' - np')\delta R.$$

Il n'y aura donc plus qu'à substituer cette valeur de δZ dans l'équation (S), & à égaler ensuite à zéro chacun des coéficiens des différences δX, δY, δP, δQ, δR ce qui donnera les cinq équations

$$[X] + m[Z] = 0,\ [Y] + n[Z] = 0;\ [P] +$$

(q'

$(q' + nr') \times [Z] = 0$; $[Q] + (p' + mr') \times [Z] = 0$; $[R] + (mq' - np') \times [Z] = 0$, lesquelles étant jointes avec l'équation ci-dessus $dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP +$ &c. serviront à déterminer le mouvement du corps.

Si on vouloit que le corps n'eut à chaque instant qu'un mouvement autour du point touchant, c'est-à-dire, qu'il n'eut aucun mouvement pour glisser le long de la surface sur laquelle il se meut; alors il est clair que les espaces parcourus par le point d'attouchement sur la surface dont nous parlons, & sur celle du corps devroient être exactement les mêmes; il faudroit donc que $dX + r'dQ + q'dR + dp' = dp'$; $dY + r'dP - p'dR + dq' = dq'$; $dZ - q'dP - p'dR + dr' = dr'$; savoir $dX + r'dQ + q'dR = 0$, $dY + r'dP - p'dR = 0$, $dZ - q'dP - p'dR$, & pareillement $\delta X + r'\delta Q + q'\delta R, = 0$, $\delta Y + r'\delta P - p'\delta R = 0$, $\delta Z - q'\delta P - p'\delta R = 0$; d'où l'on auroit pour δX, δY, δZ les mêmes valeurs que dans le second cas de *l'Art. XXXVII.*, & ces valeurs substituées dans l'équation (S) donneroient par conséquent aussi les mêmes équations pour le mouvement du corps; mais, avec cette différence, que les coordonnées p', q', r' répondroient ici non plus à un point fixe, mais à un point mobile, qui change continuellement de place tant sur la surface du corps, que sur celle le long de laquelle le corps se meut.

XXXIX.

Scholie. Les expressions $[X]$, $[Y]$ &c. sont en général

$$[X] = Md \cdot \frac{dX}{dt} + S\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt\right) dm$$

$$[X] = Md \cdot \frac{dY}{dt} + S\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt\right) dm$$

$[Z] =$

$$[Z] = Md \cdot \frac{dZ}{dt} + S\left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt\right) dm$$

$$[P] = Srdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} - Sqdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} +$$

$$S\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt\right) rdm - S\left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt\right) qdm$$

$$[Q] = Srdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} +$$

$$S\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt\right) rdm - S\left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt\right) pdm$$

$$[R] = Sqdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$

$$S\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt\right) qdm - S\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt\right) pdm.$$

Dans les formules de *l'Art. XXXIV.* nous avons mis à la place de p, q, r leurs valeurs tirée de l'équation (Q), & cette ſubſtitution a introduit les quantités Sp^2dm, Sq^2dm, Sr^2dm, $Spqdm$, $Sprdm$, $Sqrdm$ qui ne peuvent être déterminées que par l'intégration des équations données dans *l'Art. XXXV.* Or, pour éviter cet embarras, il n'y aura qu'à exprimer les coordonnées p, q, r par d'autres variables, dont les unes dépandent uniquement de la ſituation du corps, & ſoient par conſéquent mêmes pour chacun de ſes points, & les autres au contraire ſoient différentes pour tous les points du corps, & demeurent toujours les mêmes pendant qu'il change de ſituation. Pour cela, aïant imaginé deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, qui paſſent par le centre de rotation, & qui demeurent toujours fixes au dedans du corps. On remarquera, 1.° Que la poſition de ces deux axes rélativement à un plan fixe quelconque ne dépend que de trois variables qu'on peut nommer P, Q, R; 2.° Que la poſition de chaque point du corps, rélativement à ces axes, dépend encore de trois autres variables que j'appellerai ξ, φ, ζ; d'où il s'enſuit que la poſition de

chaque

chaque point du corps par rapport à un plan fixe quelconque dépendra en tout de ſix variables P, Q, R, ξ, φ, ζ, & qu'ainſi les quantités p, q, r ne ſeront que des fonctions de ces mêmes variables; fonctions toujours faciles à déterminer par les élémens de Géométrie. Aïant donc trouvé les valeurs de p, q, r en P, Q, R, ξ, φ, ζ, on en tirera aiſément celles de $d \cdot \frac{dp}{dt}$, $d \cdot \frac{dq}{dt}$, $d \cdot \frac{dr}{dt}$, en faiſant varier P, Q, R; on ſubſtituera enſuite toutes ces valeurs dans les expreſſions ci-deſſus, & l'on intégrera les termes affectés du ſigne S, en regardant ξ, φ, ζ comme variables, après quoi il ne reſtera plus de variables que les P, Q, R qui repréſentent la poſition du corps à chaque inſtant.

Au reſte les expreſſions de p, q, r dont nous venons de parler, peuvent ſervir auſſi à trouver les valeurs des différences δp, δq, δr. Soient en général
$dp = AdP + BdQ + CdR$, $dq = DdP + EdQ + FdR$,
$dr = GdP + HdQ + IdR$; on aura également
$\delta p = A\delta P + B\delta Q + C\delta R$, $\delta q = D\delta P + E\delta Q + F\delta R$
$\delta r = G\delta P + H\delta Q + I\delta R$; & par conſéquent
$\delta x = \delta X + \delta p = \delta X + A\delta P + B\delta Q + C\delta R$,
$\delta y = \delta Y + \delta q = \delta Y + D\delta P + E\delta Q + F\delta R$,
$\delta z = \delta Z + \delta r = \delta Z + G\delta P + H\delta q + I\delta R$.

Subſtituant ces valeurs dans l'équation (L) on aura une équation de la même forme que la (S), dans laquelle les quantités $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ ſeront exprimées comme ci-deſſus, & les $[P]$, $[Q]$, $[R]$ auront les valeurs ſuivantes

$$[P] = SAdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + SDdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$
$$SGdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S[(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt)A +$$
$$(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt)D + (d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt)G]dm$$

$$[Q] = S B\,dm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + S E\,dm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$

$$S H\,dm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S\left[\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi\,dt\right) B + \right.$$

$$\left.\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi\,dt\right) E + \left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi\,dt\right) H\right] dm$$

$$[R] = S C\,dm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + S F\,dm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$

$$S I\,dm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S\left[\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi\,dt\right) C + \right.$$

$$\left.\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi\,dt\right) F + \left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi\,dt\right) I\right] dm.$$

Je laiſſe au Lecteur le détail de l'application de cette Equation, qui n'aura aucune difficulté, après ce que nous avons dit dans les Corollaires précédens.

X L.

Probleme 9. Trouver les loix du mouvement des fluides non élaſtiques.

Solution. Il eſt viſible que l'équation (L), qui a ſervi pour réſoudre le Problême précédent, a encore lieu ici; cette équation étant générale pour une ſiſtème quelconque de corpuſcules dm, agités par des forces quelconque P, Q, R &c.

Soit D la denſité de chaque particule du fluide dm, on aura $dm = D\,dx\,dy\,dz$, & l'équation dont il s'agit ſera

$$(a) \ldots\ldots \int S^3\,dx\,dy\,dz\,D\left[\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right) x + \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi\,dt\right)\delta y + \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right)\delta z\right] = 0;$$

je met l'expoſant 3 au ſigne S, pour exprimer les trois intégrations que ce ſigne renferme, rélativement aux trois variables

variables x, y, z intégrations que nous aurons souvent occasion dans la suite de considérer chacune en particulier.

Maintenant, comme le fluide est supposé incompressible, il faut que le volume de chaque particule dm, lequel est exprimé par $dx\,dy\,dz$, reste toujours le même; on aura donc $dy\,dz\,ddx + dx\,dz\,ddy + dx\,dy\,ddz = 0$, savoir $\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy} + \frac{ddz}{dz} = 0$, ou en mettant dd au lieu de dd

$$\frac{d\,dx}{dx} + \frac{d\,dy}{dy} + \frac{d\,dz}{dz} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

On aura par la même raison $dy\,dz\,\delta dx + dx\,dz\,\delta dy + dx\,dy\,\delta dz = 0$, ou bien $dy\,dz\,d\delta x + dx\,dz\,d\delta y + dx\,dy\,d\delta z = 0$, ce qui donne $d\delta x = -dx\,(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz})$ & par conséquent

$$(c) \quad . \quad . \quad S\,d\delta x = \delta x = \delta' x - S\,dx\,(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz});$$

$\delta' x$ est la valeur de δx, quand l'intégrale $S\,dx\,(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz})$ est nulle; or, comme cette intégrale doit être prise en variant seulement x, il s'ensuit que la quantité $\delta' x$ sera constante par rapport à x, mais variable par rapport à y, & z, c'est à dire que cette quantité sera une fonction de y, & z.

Donc mettant dans l'équation (a) à la place de δx la valeur qui on vient de trouver, l'expression intégrale $S^3\,dx\,dy\,dz\,D\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)\,\delta x$ se changera en celle-ci.

$$S^3\,dx\,dy\,dz\,D\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)\,\delta' x -$$

$$S^3\,dx\,dy\,dz\,[\,D\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)\,S\,dx\,(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz})\,].$$

J' écris d' abord le premier membre transformée ainſi: $S^2 dy\, d\zeta\, S dx\, D\,(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt)\,\delta' x$, expreſſion qu' on voit bien être équivalente à la propoſée. Or ſoit la valeur totale de $S dx\, D\,(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt)$ exprimée par $T dt$, il eſt clair qu'on aura, à cauſe que $\delta' x$ eſt conſtant par rapport à x, $S dx D\,(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt)\,\delta' x = \delta' x\, S dx D\,(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt) = \delta' x\, T dt$; donc

$$S^3 dx\, dy\, d\zeta\, D\,(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt)\,\delta' x = S^2 dy\, d\zeta\, T dt\, \delta' x.$$

Je mets de même le ſecond nombre ſous la forme ſuivante: $S^2 dy\, d\zeta\, S dx\,[D\,(d\cdot\frac{dx}{dt}+dt)\,S dx\,(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta\zeta}{d\zeta})]$; j' opére ſur l'intégrale $S dx\,[D\,(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt)\,S dx\,(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta\zeta}{d\zeta})]$ ſuivant la méthode de *l' Art. IX. Mem. préced.* j' aurai en ſuppoſant, pour abréger, $V dt = T dt - S dx\, D\,(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt)$ la transformée $S dx\, V dt\,(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta\zeta}{d\zeta})$, où il n' y à plus qu' un ſeul ſigne d' intégration; la formule propoſée deviendra donc $S^2 dy\, d\zeta\, S dx\, V dt\,(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta\zeta}{d\zeta})$, ou ce qui eſt la même choſe $S^3 dx\, dy\, d\zeta\, V dt\,(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta\zeta}{d\zeta})$, dans laquelle il ne s' agit plus que de faire diſparoître les différences de δy & $\delta\zeta$.

Pour cela il eſt néceſſaire de diſtinguer d' abord les integrations rélatives à la variabilité de y, & de ζ, en mettant cette intégrale ſous la forme ſuivante

$$S^2 dx\, d\zeta\, S dy\, \frac{V dt\, d\delta y}{dy} +$$

$$S^2 dx dy \, S d\zeta \frac{V dt d\delta\zeta}{d\zeta}.$$

Or par la méthode ordinaire des intégrations par parties, on trouve $S\, dy \frac{V dt d\delta y}{dy} = V dt \delta y - S dy \frac{dV dt}{dy} \delta y$.

(J'écris $S dy \frac{dV dt}{dy} \delta y$, au lieu de $S d V dt \delta y$ qui lui eſt égal, pour dénoter que cette intégrale, de même que la différentielle $dV dt$, doit être priſe, en ne conſidérant que la variabilité de y ſeul). Soit mainténant $'y$ la valeur de y lorſque l'intégrale $S dy (\frac{dV dt}{dy}) \delta y$ commence, & y' ſa valeur, lorſque cette intégrale finit; & ſoit exprimé par $'V$ ce qui devient V, en y mettant $'y$ à la place de y, & par V' ce que la même quantité devient en faiſant $y = y'$; on trouvera, par la Rémarque faite à la fin de *l'Art. I. Mém. prec.*, que la valeur complette du terme $V dt \delta y$ ſera $V' dt \delta y' - 'V dt \delta 'y$.

Mais pour peu qu'on réflechiſſe ſur la nature de nos formules, il eſt aiſé de voir que quand, $V = 'V$, l'intégrale $S d x D (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi \delta t)$ eſt nulle, & que quand $V = V'$, cette intégrale eſt préciſement $= T$; c'eſt pourquoi l'on aura $'V = T$, & $V' = 0$; donc enfin

$$S dy \frac{V dt d\delta y}{dy} = -T\delta 'y - S dy \frac{dV dt}{dy} \delta y.$$

On trouvera par des opérations & des raiſonnements ſembables

$$S d\zeta \frac{-V dt d\delta y}{dy} = -T\delta 'y - S d\zeta \frac{d \cdot V dt}{dy} \delta\zeta;$$

Donc $S^3 dx dy d\zeta V dt (\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta\zeta}{d\zeta})$ ſe changera en

$$- S^2 dx d\zeta T dt \delta 'y - S^2 dx d\zeta S dy \frac{dV dt}{dy} \delta y$$

$$- S^2 dx dy T dt \delta' z - S^2 dx dy S dz \frac{dV dt}{dz} \delta z$$

$= $ (en réduisant) $- S^2 dx dz T dt \delta' y - S^2 dx dz T dt \delta' z$

$- S^3 dx dy dz \left(\frac{dV dt}{dy} \delta y + \frac{dV dt}{dz} \delta z\right)$, donc

$S^3 dx dy dz D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) \delta x = S^2 dy dz T dt \delta' x$

$- S^2 dx dz T dt \delta' y - S^2 dx dy T dt \delta' z + S^3 dx dy dz$

$\left(\frac{dV dt}{dy} \delta y + \frac{dV dt}{dz} \delta z\right)$, donc l'équation (a) deviendra

$(d) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \int (S^2 dy dz T dt \delta' x$

$+ S^2 dx dz T dt \delta' y + S^2 dx dy T dt \delta' z) +$

$\int S^3 dx dy dz \left(\left[\frac{dV dt}{dy} + D \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt\right) \right] \delta y \right.$

$\left. + \left[\frac{dV dt}{dz} + D \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt\right) \right] \delta z \right) = 0;$

d'où l'on tire pour le mouvement de chaque particule du fluide en général

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV dt}{dy} + D \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt\right) &= 0 \\ \frac{dV dt}{dz} + D \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (e)$$

Ensuite pour satisfaire au reste de l'équation, on fera

$(f) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots S^2 dy dz T dt \delta' x$

$+ S^2 dx dz T dt \delta' y + S^2 dx dy T dt \delta' z = 0.$

XLI.

Corollaire 1. La valeur de $V dt$ est $T dt - S dx D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)$, l'intégrale étant prise en variant seulement x; on substituera donc cette valeur dans les équations (e); mais, pour pouvoir faire disparoître le signe S, on prendra les différentielles de ces deux équations, en suppo-

ſuppoſant x ſeul variable; ce qui donnera, en mettant pour $\frac{dV\,dt}{dx}$ ſa valeur $-D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)$,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\left[D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\right]}{dy} &= \frac{d\left[D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\pi\,dt\right)\right]}{dx}\\ \frac{d\left[D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\right]}{dz} &= \frac{d\left[D\left(d\cdot\frac{dz}{dt}+\Psi\,dt\right)\right]}{dx}\end{aligned}\right\}\ (g)$$

Deux équations qui jointes à l'équation (b) trouvée ci-deſſus feront connoître les valeurs de x, y, z pour un tems quelconque.

XLII.

Corollaire 2. Telles ſont les équations, par leſquelles on peut déterminer en général le mouvement d'un fluide non élaſtique ſollicité par des forces quelconques P, Q, R &c. qui agiſſent ſuivant des directions quelconques, ou bien par des forces Π, π, Ψ dirigées ſuivant les lignes x, y, z; comme il eſt aiſé le voir en examinant les valeurs de ces quantités Π, π, Ψ (*Art. I.*).

Pour mieux connoître les équations dont il s'agit, exprimons par α, β, γ les viteſſes de chaque particule du fluide parallélement aux coordonnées x, y, z, c'eſt-à-dire les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on aura en diviſant par dt,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\left(D\frac{d\alpha}{dt}\right)}{dy}+\frac{d\left(D\,\Pi\right)}{dy} &= \frac{d\left(D\frac{d\beta}{dt}\right)}{dx}+\frac{d\left(D\,\pi\right)}{dx}\\ \frac{d\left(D\frac{d\alpha}{dt}\right)}{dy}+\frac{d\left(D\Pi\right)}{dz}+\frac{d\left(D\frac{dy}{dt}\right)}{dx}+\frac{d\left(D\,\Psi\right)}{dx} &\end{aligned}\right\}\ (h)$$

$\frac{d\alpha}{dx}$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{dy}{dz} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

On, voit par ces équations, que les quantités α, β, γ ſont néceſſairement des fonctions, des variables x, y, z qui déterminent la poſition des particules à chaque inſtant, & du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; or dans l'inſtant dt, il eſt clair que les variables x, y, z deviennent $x + \alpha dt$, $y + \beta dt$, $z + \gamma dt$; donc les variations des quantités α, β, γ dans cet inſtant ne ſeront pas ſeulement $\frac{d\alpha}{dt}dt$, $\frac{d\beta}{dt}dt$, $\frac{d\gamma}{dt}dt$, mais

$$\frac{d\alpha}{dt}dt + \frac{d\alpha}{dx}\alpha dt + \frac{d\alpha}{dy}\beta dt + \frac{d\alpha}{dz}\gamma dt,$$
$$\frac{d\beta}{dt}dt + \frac{d\beta}{dx}\alpha dt + \frac{d\beta}{dy}\beta dt + \frac{d\beta}{dz}\gamma dt,$$
$$\frac{d\gamma}{dt}dt + \frac{d\gamma}{dx}\alpha dt + \frac{d\gamma}{dy}\beta dt + \frac{d\gamma}{dz}\gamma dt,$$

& telles ſeront les valeurs de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$; donc ſi on ſubſtitue ces valeurs dans les équations (h), & qu'on ſuppoſe, pour plus de ſimplicité, les forces Π, π, Ψ nulles, ou telles que $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$, & de plus la denſité D conſtante, on aura, en diviſant par D, & marquant toutes les différences par d (ce qui eſt abſolument indifférent ici),

$$\frac{d^2\alpha}{dtdy} + \alpha\frac{d^2\alpha}{dxdy} + \beta\frac{d^2\alpha}{dy^2} + \gamma\frac{d^2\alpha}{dydz} + \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{dy}{dy} = \frac{d^2\beta}{dtdx} + \alpha\frac{d^2\beta}{dx^2} + \beta\frac{d^2\beta}{dxdy} + \gamma\frac{d^2\beta}{dxdz} + \frac{d\beta}{dx} \times \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{dz} \times \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{d^2\alpha}{dtdz} + \alpha\frac{d^2\alpha}{dxdz} + \beta\frac{d^2\alpha}{dydz} + \gamma\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dz}$$

$$\times \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dz} = \frac{d^2\gamma}{dt\,dx} + \alpha\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \beta\frac{d^2\gamma}{dx\,dy} + \gamma\frac{d^2\gamma}{dx\,dz}$$
$$+ \frac{d\gamma}{dx} \times \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx}.$$

Ces équations peuvent s'abréger en ſuppoſant $\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = \mu$; $\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = \nu$; ce qui les réduira à

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\mu}{dt} + \alpha\frac{d\mu}{dx} + \beta\frac{d\mu}{dy} + \gamma\frac{d\mu}{dz} + \\ \mu\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx} = 0, \\ \frac{d\nu}{dt} + \alpha\frac{d\nu}{dx} + \beta\frac{d\nu}{dy} + \gamma\frac{d\nu}{dz} + \\ \nu\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} = 0 \end{array}\right\} \cdot (k)$$

On peut ſatisfaire à ces deux équations, en faiſant $\mu = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = 0$, $\nu = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0$, $\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = 0$, comme il eſt facile de s'en aſſurer; or la troiſiéme de ces conditions eſt évidemment une ſuite néceſſarire des deux premiéres; donc on n'aura réellement que deux conditions à remplir, leſquelles pourront s'emprimer plus ſimplement en diſant, que $\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz$ doit être une différentielle complette; & ces conditions jointes avec celle que donne l'équation (i), ſavoir, en changeant d en d, $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$ ſerviront à déterminer les mouvement du fluide dans pluſieurs cas particuliers.

Ces cas ſe réduiſent à ceux, où l'on ſuppoſe que particules du fluide décrivent des courbes invariables; ce qui arrive quand les rapports des viteſſes α, β, γ ſont indépendants du tems t, c'eſt-à-dire quand les quantités α, β, γ ſont ſimplement des fonctions de x, y, z, multipliées par une même fonction de t. Car ſoit mis dans les équations

gêné-

générales (h), $\theta\alpha$, $\theta\beta$, $\theta\gamma$, à la place de α, β, γ (θ étant une fonction quelconque de t, & α, β, γ étant maintenant regardées comme des fonctions indéterminées de x, y, z sans t) on trouvera après avoir divisé par θ^2,

$$\mu\frac{d\theta}{\theta^2 dt} + \alpha\frac{d\mu}{dx} + \beta\frac{d\mu}{dy} + \gamma\frac{d\mu}{dz} +$$
$$\mu\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx} = 0$$
$$\frac{d\theta}{\theta^2 dt} + \alpha\frac{d\nu}{dx} + \beta\frac{d\nu}{dy} + \gamma\frac{d\nu}{dz} +$$
$$\nu\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Or, comme les termes $\mu\frac{d\theta}{\theta^2 dt}$, $\nu\frac{d\theta}{\theta^2 dt}$ sont les seuls qui renferment t, il faut nécessairement qu'ils soient $= 0$ séparément de tous les autres, pour que les équations puissent être identiques; on aura donc $\mu = 0$, $\nu = 0$; ce qui satisfait encore au reste de l'une & de l'autre équation, comme on l'a vû plus haut.

Il y a pourtant un cas, où les équations précédentes peuvent être vérifiées sans supposer $\mu = 0$ & $\nu = 0$; c'est celui où l'on aura $\frac{d\theta}{\theta^2 dt} = const.$; c'est-à-dire, où $\frac{1}{\theta} = a - bt$, & $\theta = \frac{1}{a - bt}$, a & b étant deux constantes quelconques; car alors les termes $\mu\frac{d\theta}{\theta^2 dt}$, $\nu\frac{d\theta}{\theta^2 dt}$ se trouveront entiérement indépendants du tems t, ainsi que tous les autres.

Au reste en combinant les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$ avec l'équation (i), on peut séparer les indéterminées α, β, γ, & l'on aura

$\frac{d^2\alpha}{dx^2}$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2} = 0$$
$$\frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0$$
$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \frac{d^2\gamma}{dz^2} = 0.$$

XLIII.

Remarque. Quand on aura trouvé par le moïen des équations de *l'Art. préc.* les valeurs générales de α, β, γ, il faudra de plus déterminer ces valeurs, en ſorte que les particules contigues aux parois du vaſe, dans lequel le fluide ſe meut, puiſſent couler le long de ce parois; ſoient x', y', z' leurs coordonnées, & $dz' = p\,dx' + q\,dy'$ l'équation qui repréſente la figure du vaſe donné, en mettant, au lieu de dx', dy', dz' leurs valeurs $\alpha' dt$, $\beta' dt$, $\gamma' dt$, (α', β', γ' dénotent les valeurs de α, β, γ, lorſque x, y, z deviennent x', y', z') on aura l'équation $\gamma' = p\alpha' + q\beta'$, qui devra être vraie indépendanment de t.

Dans le cas, où le tems t n'entre point dans le rapport des viteſſes α, β, γ, il eſt clair qu'il n' entrera pas non plus dans l'équation $\gamma' = p\alpha' + q\beta'$; mais alors les valeurs de α, β, γ étant beaucoup moins générales, il pourra arriver que cette équation ne ſe vérifiera qu'en ſuppoſant que les quantités p, q aïent certaines conditions, c'eſt-à-dire, que le vaſe ait une certaine figure; c' eſt ce que M. d'Alembert a déja remarqué dans un excellent Mémoire *ſur les Loix du mouvement des fluides*, imprimé dans le premier Volume de ſes Opuſcules Mathématiques. Mais ce ſavant Géomètre prétend de plus que, lorſque le vaſe aura une autre figure quelconque, le mouvement du fluide ne pourra plus être ſoumis au calcul; c' eſt de quoi je ne ſaurois tomber d' accord avec lui; car il me ſemble que tout ce qu'il faudroit conclure alors, c'eſt que la ſup-

position particuliere de $\mu = o$, & $\nu = o$ ceſſeroit d'être exacte, & que par conſéquent les valeurs de α, β, γ dependroient de la réſolution générale des équations (k)

Il eſt vrai que M. d'Alembert prétend que les équations $\mu = o$, $\nu = o$ ſont les ſeules vraiment exactes, pour déterminer les loix du mouvement des fluides; il ſe fonde ſur ce que le rapport des viteſſes α, β, γ doit être indépendant du tems t dans les particules, qui coulent le long des parois du vaſe; d'où il infére qu'il doit l'être auſſi en général dans toutes les particules du fluide; mais cette conſéquence, ſi j'oſe le dire, ne me paroit point aſſez juſte. En effet on peut très-bien imaginer, ce me ſemble, des fonctions de x, y, z, telles que la variable t ne diſparoiſſe de l'expreſſion de leur rapport, que lorſque x, y, z deviennent x', y', z', & ſont liées par l'équation $dz' = p\,dx' + q\,dy'$.

En général il me paroit certain qu'en réſolvant les équations (h), (i), par des méthodes analogues à celles que j'ai expliquées dans les *Récher. ſur le Son* imprimées ci-devant, on aura une ſolution applicable à tous les cas poſſibles, & par laquelle on pourra déterminer le mouvement des fluides qui ſe meuvent dans des vaſes de figure quelconque, & qui ont reçu, au commencement, des impulſions quelconques.

Il ne pourra y avoir de difficulté que dans les ſeuls cas, où le fluide ſe diviſera en ſe mouvant, & ceſſera de former une maſſe continue; mais alors, ayant trouvé par le calcul (ce qui eſt toujours poſſible) les endroits, où le fluide doit ſe diviſer en pluſieurs portions, on conſidérera enſuite chaque portion à part, & on en déterminera le mouvement en la regardant comme une maſſe iſolée.

Nous avons obſervée dans *l'Art. préc.* qu'il y a un cas, où les équations $\mu = o$, $\nu = o$ ne ſont pas indiſpenſables dans l'hypoteſe, que les rapports des viteſſes α, β, γ ſoient

ſoient indépandants du tems t. M. d'Alembert a fait auſſi cette remarque dans l'*Art. X. de ſon Mémoire* cité ci-deſſus; mais il trouve, par ſes formules, que le cas, dont il s'agit eſt celui, où $\theta = a c^t$, au lieu que ſuivant les nôtres, ce cas eſt celui, où $\theta = \frac{1}{a - bt}$. Or cette différence vient d'une légère mépriſe qui s'eſt gliſſée dans les calculs de M. d'Alembert, mais qui n'influe d'ailleurs en rien ſur le reſte de ſes ingénieuſes Recherches.

Pour faire ſentir la vérité de ce que nous avançons ici, examinons les équations que M. d'Alembert donne dans l'*Art. I. du Mém. cité* pour les fluides péſants, qui ſe meuvent dans un plan. Ces équations ſont 1.° $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$, 2.° $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta q A' - \theta p B' - pT)}{dx}$, g eſt la gravité, θ eſt une fonction quelconque de t comme ci-deſſus, θq, θp expriment les viteſſes que nous avons nommées α & γ, & les quantités A, B, A', B', T ſont telles que $d(\theta q) = qTdt + \theta A dx + \theta B dz$; $d(\theta p) = pTdt + \theta A' dx + \theta B' dz$.

La premiére de ces équations réſulte de l'incompreſſibilité des particules du fluide, & revient par conſéquent au même que l'équation (*i*) ci-deſſus on y faiſant $\beta = 0$. A l'égard de la ſeconde, l'Auteur la tire de cette conſideration, que les forces verticales, & orizontales perdues à chaque inſtant par les particules du fluide, doivent ſe faire équilibre; ces forces ſont, ſelon lui, $g - B\theta p - A\theta q - qT$, $-\theta q A' - \theta p B' - pT$; ce qui donne par le loix générales de l'équilibre des fluides, l'équation dont nous parlons. Or je dis, que ſuivant les hypotéſes de M. d'Alembert, il faut écrire θ^2 au lieu de θ dans les expreſſions des forces en queſtion. Car il eſt facile de voir que ces forces

ſont en général $g - \frac{d\alpha}{dt}$, $- \frac{d\gamma}{dt}$ ſavoir $g - \frac{d(\theta q)}{dt}$, $- \frac{d(\theta p)}{dt}$, c'eſt à dire $g - qT - \frac{\theta A dx}{dt} - \frac{\theta B dz}{dt}$, $- pT - \theta A' dx - \theta B' dz$; mais $dx = \alpha dt = \theta q dt$, $dz = \gamma dt = \theta p dt$ donc ces quantités deviendront $g - qT - \theta^2 Aq - \theta^2 Bp$, $- pT - \theta^2 A' q - \theta^2 B' p$.

Ainſi l'on aura à la rigueur l'équation

$$\frac{d(g - B\theta^2 p - A\theta^2 q - qt)}{dz} = \frac{d(-\theta^2 qA' - \theta^2 pB' - pT)}{dx}$$

de laquelle le tems t ne diſparoit, que quand θ^2 eſt proportionel à T, c'eſt à dire, $\frac{T dt}{\theta^2} = \frac{d\theta}{\theta^2} = const.$; d'où l'on tire, comme ci-deſſus, $\theta = \frac{1}{a - bt}$; au lieu que ſelon l'équation de M. d'Alembert, cela doit arriver lorſque $\frac{T}{\theta} = const.$ ce qui donne, en intégrant, $\theta = ac$, comme cette Auteur l'a trouvé.

XLIV.

Corollaire 3. Si au lieu de conſidérer les viteſſes α, β, γ on veut conſidérer les variables x, y, z elles-mêmes, on rémarquera que ces variables ne peuvent être que des fonctions du tems t & des valeurs que elles avoient au commencement du mouvement quand $t = 0$, valeurs qui doivent être entiérement arbitraires, pour que la ſolution du problême ait toute la généralité poſſibile.

Dénotons ces valeurs par X, Y, Z, c'eſt à dire ſuppoſons que les variables x, y, z qui repréſentent la poſition de chaque particule du fluide, après un tems quelconque t, ſoient, au commencement du mouvement, X, Y, Z; les dif-

differences de x, y, z s'exprimeront en géneral de la maniere ſuivante

$$dif.\ x = L\,dX + M\,dY + N\,dZ + \alpha\,dt$$
$$dif.\ y = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ + \beta\,dt$$
$$dif.\ z = S\,dX + T\,dY + V\,dZ + \gamma\,dt$$

de ſorte que $dx = \alpha\,dt$, $dy = \beta\,dt$, $dz = \gamma\,dt$ & $dx = L\,dX + M\,dY + N\,dZ$, $dy = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ$ $dz = S\,dX + T\,dY + V\,dZ$.

Subſtituant dans les équations (h), (i), α, β, γ au lieu $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, & ſuppoſant d'ailleurs, pour ſimplifier le calcul, D conſtant, & $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$; on trouvera, aprés avoir diviſé les deux premiéres par $D\,dt$, & la troiſiéme par dt

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{dy} &= \frac{d\cdot\frac{d\beta}{dt}}{dx} \\ \frac{d\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{dz} &= \frac{d\cdot\frac{d\gamma}{dt}}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (l)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (m)$$

Or $\frac{d\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{dy}$ exprime, α comme on ſait, le coéficient qu'auroit y dans la différentiation de $\frac{d\alpha}{dt}$, ſuppoſé que α fût exprimée par une fonction de x, y, z, t; & ainſi des autres expreſſions ſemblables. Donc, puiſque les quantités α, β, γ ſont (*hip.*) des fonctions de X, Y, Z, il faudra ſubſtituer dans α, β, γ, à la place des variables, X, Y, Z, leurs valeurs en x, y, z, & différentier enſuite, en prenant x, y, z pour

pour variables; ou bien ce, qui revient au même, différentier d'abord les quantités α, β, γ en faisant varier X, Y, Z, & substituer ensuite, au lieu de dX, dY, dZ, leurs valeurs en dx, dy, dz.

Des expressions de dx, dy, dz données ci-dessus on tire par les régles communes de l'algébre.

$$dX = \frac{(QV-RT)\,dx + (NT-MV)\,dy + (MR-NQ)\,dz}{K}$$

$$dY = \frac{(RS-PV)\,dx + (LV-NS)\,dy + (NP-LR)\,dz}{K}$$

$$dZ = \frac{(PT-QS)\,dx + (MS-LT)\,dy + (LQ-MP)\,dz}{K}$$

K étant mis, pour abréger, au lieu de $LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT$

Or $d\alpha$ est la différence de α, qui nait des différences dx, dy, dz, ou bien des différences dX, dY, dZ; donc on aura en général $d\alpha = \frac{d\alpha}{dX}\,dX + \frac{d\alpha}{dY}\,dY + \frac{d\alpha}{dZ}\,dZ$; on aura de plus à cause que *dif.* x, est une différentielle complette, $\frac{d\alpha}{dX} = \frac{dL}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dY} = \frac{dM}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dZ} = \frac{dN}{dt}$; donc

$$d\alpha = \frac{dL}{dt}\,dX + \frac{dM}{dt}\,dY + \frac{dN}{dt}\,dZ;$$

on trouvera de même.

$$d\beta = \frac{dP}{dt}\,dX + \frac{dQ}{dt}\,dY + \frac{dR}{dt}\,dZ$$

$$d\gamma = \frac{dS}{dt}\,dX + \frac{dT}{dt}\,dY + \frac{dV}{dt}\,dZ.$$

substituant, au lieu de dX, dY, dZ, les valeurs trouvées ci-devant, il viendra

$$d\alpha = \frac{(QV-RT)\frac{dL}{dt} + (RS-PV)\frac{dM}{dt} + (PT-QS)\frac{dN}{dt}}{K}\,dx$$

(N

$$+\frac{(NT-MV)\frac{dL}{dt}+(LV-NS)\frac{dM}{dt}+(MS-LT)\frac{dN}{dt}}{K}dy$$

$$+\frac{(MR-NQ)\frac{dL}{dt}+(NP-LR)\frac{dM}{dt}+(LQ-MP)\frac{dN}{dt}}{K}dz$$

$$d\beta=\frac{(QV-RT)\frac{dP}{dt}+(RS-PV)\frac{dQ}{dt}+(PT-QS)\frac{dR}{dt}}{K}dx$$

$$+\frac{(NT-MV)\frac{dP}{dt}+(LV-NS)\frac{dQ}{dt}+(MS-LT)\frac{dR}{dt}}{K}dy$$

$$+\frac{(MR-NQ)\frac{dP}{dt}+(NP-NL)\frac{dQ}{dt}+(LQ-MP)\frac{dR}{dt}}{K}dz$$

$$d\gamma=\frac{(QV-RT)\frac{dS}{dt}+(RS-PV)\frac{dT}{dt}+(PT-QS)\frac{dV}{dt}}{K}dx$$

$$+\frac{(NT-MV)\frac{dS}{dt}+(LV-NS)\frac{dT}{dt}+(MS-LT)\frac{dV}{dy}}{K}dy$$

$$+\frac{(MR-NQ)\frac{dS}{dt}+(NP-LR)\frac{dT}{dt}+(LQ-MP)\frac{dV}{dt}}{K}dz$$

Donc prenant, dans l'expreſſion de $d\alpha$, le coéficient de dx, dans celle de $d\beta$ le coéficient de dy, & dans celle de $d\gamma$ le coéficient de dz, on aura les valeurs de $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\beta}{dy}$, $\frac{d\gamma}{dz}$ & l'équation (m) deviendra

$$(QV-RT)\frac{dL}{dt}+(RS-PV)\frac{dM}{dt}+(PT-QS)\frac{dN}{dt}+$$

$$(NT-MV)\frac{dP}{dt}+(LV-NS)\frac{dQ}{dt}+(MS-LT)\frac{dR}{dt}+$$

$$(MR-NQ)\frac{dS}{dt}+(NP-LR)\frac{dT}{dt}+(LQ-NP)\frac{dV}{dt}=0;$$

ou

ou, (ce qui eſt la même choſe) $\frac{dK}{dt} = 0$, d'où l'on tirera $K = const.$, ſavoir

$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = H$,

H étant une fonction de X, Y, Z, ſans t, ſavoir la valeur de K, lorſque $t = 0$.

A l'égard des deux équations (l), on remarquera que $\mathrm{d} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$ eſt la même choſe que $\frac{d \cdot \mathrm{d}\alpha}{dt}$; c'eſt pourquoi il n'y aura qu'à différentier la valeur de $\mathrm{d}\alpha$ trouvée ci-deſſus, en ne faiſant varier que t, & l'on aura

$$\mathrm{d} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2 L}{dt^2} dX + \frac{d^2 M}{dt^2} dY + \frac{d^2 N}{dt^2} dZ$$

de la même maniére on trouvera

$$\mathrm{d} \cdot \frac{d\beta}{dt} = \frac{d^2 P}{dt^2} dX + \frac{d^2 Q}{dt^2} dY + \frac{d^2 R}{dt^2} dZ,$$

$$\mathrm{d} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} dX + \frac{d^2 T}{dt^2} dY + \frac{d^2 V}{dt^2} dZ.$$

On ſubſtituera donc dans ces expreſſions, comme on a fait ci-deſſus dans celles de $\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\beta$, $\mathrm{d}\gamma$, les valeurs de dX, dY, dZ en $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, & prenant les coéficiens de $\mathrm{d}y$ & $\mathrm{d}z$ dans la différentielle $\mathrm{d}\frac{d\alpha}{dt}$, & ceux de $\mathrm{d}x$ dans les deux différentielles $\mathrm{d}\frac{d\beta}{dt}$, $\mathrm{d}\frac{d\gamma}{dt}$, on aura les valeurs de $\frac{\mathrm{d} \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d} \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}z}$, $\frac{\mathrm{d} \cdot \frac{d\beta}{dt}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d} \cdot \frac{d\gamma}{dt}}{\mathrm{d}x}$, leſquelles étant miſes à la place de ces quantités dans les équations (l), il nous viendra, en ôtant le dénominateur commun K les deux équations

(NT

$$(NT-MV)\frac{d^2L}{dt^2}+(LV-NS)\frac{d^2M}{dt^2}+(MS-LT)\frac{d^2N}{dt^2}=$$
$$(QV-RT)\frac{d^2P}{dt^2}+(RS-PV)\frac{d^2Q}{dt^2}+(PT-QS)\frac{d^2R}{dt^2};$$
$$(MR-NQ)\frac{d^2L}{dt^2}+(NP-LR)\frac{d^2M}{dt^2}+(LQ-MP)\frac{d^2N}{dt^2}=$$
$$(QV-RT)\frac{d^2S}{dt^2}+(RS-PV)\frac{d^2T}{dt^2}+(PT-QS)\frac{d^2V}{dt^2}.$$

Si on met dans ces deux équations auſſi bien que dans celle qui a été trouvé précédemment, pour L, M, N, P, Q, R, S, T, V, leurs valeurs $\frac{dx}{dX}$, $\frac{dx}{dY}$, $\frac{dx}{dZ}$, $\frac{dy}{dX}$, $\frac{dy}{dY}$, $\frac{dy}{dZ}$, $\frac{d\zeta}{dX}$, $\frac{d\zeta}{dY}$, $\frac{d\zeta}{dZ}$, on aura trois équations générales qui ne renfermeront que les changeantes x, y, ζ avec leurs différences relatives à X, Y, Z, t, & par leſquelles on pourra déterminer la poſition de chaque particule du fluide à chaque inſtant de ſon mouvement,

XLV.

Scholie. Les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy}=\frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz}=\frac{d(D\Psi)}{dx}$, que nous avons ſuppoſées dans *l'Art. XLII.* pour ſimplifier les formules (h), ont lieu quand toutes les forces Π, π, Ψ ſont telles que leurs actions ſur les particules du fluide ſe détruiſent mutuellement, c'eſt-à-dire, que les particules du fluide animées par ces forces ſe ſont équilibre. En effet ſi le fluide eſt en répos les viteſſes α, β, γ ſont nulles, & les équations (h) ſe réduiſent à celles que nous venons de rapporter.

Au reſte pour pouvoir faire uſage des équations dont il s'agit, il n'eſt pas néceſſaire que les quantités D, Π,

π, Ψ soient uniquement des fonctions de x, y, z comme il semble qu'on pourroit le conclure de la forme même de ces équations.

Supposons par exemple que les quantités D, Π, π, Ψ renferment, outre les variables x, y, z, encore une quatriéme variable s représentée par une ligne quelconque; il est clair que quelle que soit la nature & la position de cette ligne, on pourra toujours exprimer sa différentielle ds de cette maniére $A\,dx + B\,dy + C\,dz$; par conséquent la valeur complette de l'expression $\frac{d(D\Pi)}{dy}$, qui n'est autre chose que le coéficient de dy dans la différentiation de $D\Pi$, sera $\frac{d(D\Pi)}{dy} + B\frac{d(D\Pi)}{ds}$; on trouvera de même $\frac{d(D\Pi)}{dz} + C\frac{d(D\Pi)}{ds}$, $\frac{d(D\pi)}{dx} + A\frac{d(D\pi)}{ds}$, $\frac{d(D\Psi)}{dx} + A\frac{d(D\Psi)}{ds}$, pour les valeurs complettes des expressions $\frac{d(D\Pi)}{dz}$, $\frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Psi)}{dx}$; substituant ces valeurs dans les équations ci-dessus elles deviendront

$$\frac{d(D\Pi)}{dy} + B\frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\pi)}{dx} + A\frac{d(D\pi)}{ds}$$

$$\frac{d(D\Pi)}{dz} + C\frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\Psi)}{dx} + A\frac{d(D\Psi)}{ds}.$$

Equations, dans lesquelles les différentielles qui dépendent de chacune des variables x, y, z, s se trouvent séparées.

Je fais cette remarque rélativement à un endroit de l'excellent Traité de *la Résistance des fluides* (*Art.* 164.).

Si la densité D est constante, les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$ deviennent, en di-

visant

visant par D, $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}$, lesquelles renferment les conditions de l'équilibre des fluides homogénes.

Supposons que le fluide soit composé de différentes couches, dont chacune soit d'une densité uniforme, & qu'on en cherche l'équation; soient x, y, z les coordonnées de chacune de ces couches, on aura (*hypoth.*) $\frac{dD}{dx}dx + \frac{dD}{dy}dy + \frac{dD}{dz}dz = 0$. Or les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$, donnent

$$\Pi\frac{dD}{dy} + D\frac{d\Pi}{dy} = \pi\frac{dD}{dx} + D\frac{d\pi}{dx},$$

$$\Pi\frac{dD}{dz} + D\frac{d\Pi}{dz} = \Psi\frac{dD}{dx} + D\frac{d\Psi}{dx},$$

substituant dans l'équation ci-dessus les valeurs de $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$ tirées de celles-ci; & ordonnant les termes il viendra

$$\frac{dD}{dx}(dx + \frac{\pi}{\Pi}dy + \frac{\Psi}{\Pi}dz) + \frac{D}{\Pi}\left[(\frac{d\pi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy})dy + (\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz})dz\right] = 0,$$

savoir en multipliant par $\frac{\Pi}{D}$,

$$\frac{dD}{Ddx}(\Pi dx + \pi dy + \Psi dz) + (\frac{d\pi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy})dy + (\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz})dz = 0.$$

Équation qui exprimera la figure de chaque couche où la densité est uniforme.

Si l'on a $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}$ c'eſt-à-dire ſi les forces Π, π, Ψ ſont par leur nature telles, qu'elles puiſſent tenir en équilibre une maſſe fluide homogéne, alors l'équation précédente ſe réduit à $\frac{dD}{D\,dx}(\Pi\,dx + \pi\,dy + \Psi\,dz) = 0$ ce qui donne

$$\Pi\,dx + \pi\,dy + \Psi\,dz = 0$$

Equation générale des couches de niveau, comme il eſt aiſé de le voir, d'où il s'enſuit que dans ce cas chaque couche de niveau ſera néceſſairement d'une denſité uniforme dans toute ſon étendue.

Tel devroit donc être l'arrangement de différentes parties de la terre ſi elle avoit été primitivement fluide; car il eſt aiſé de prouver par le calcul, & M. Clairant l'a démontré à *l'Art. LIV.* de ſa Théorie *de la figure de la Terre*, que les forces Π, π, Ψ réſultantes de toutes les attractions que les particules exercent les unes ſur les autres ont d'elles mêmes les conditions $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}$.

Cependant un grand Géométre a crû que il n'étoit pas toujours néceſſaire que les ſurfaces des différentes couches fuſſent de niveau, & il a donné un autre Principe pour connoître la figure de ces ſurfaces. Voyés l'Appendice qui eſt à la fin de l'*Eſſai ſur la réſiſtence des fluides* cité ci-deſſus, & la III. Partie des *Recherches ſur le ſiſteme du Monde* pag. 226. & ſuiv. Mais les équations, que ſon Principe fournit ne ſont elles mêmes dans le fond, que celles des couches de niveau. Pour le démontrer d'une maniére générale, ſoit un ſphéroïde compoſé de couches de différentes denſités, & dont le rayon ſoit exprimé généralement par $r + \alpha Z$, r étant une quantité conſtante dans la même couche, Z étant une fonction quelconque de r, & d'un angle z variable pour tous les points de chaque couche, & α marquant une

petite

petite quantité conſtante. Qu'on réduiſe l'attraction totale que ce ſphéroïde exerce ſur chaque particule d'une couche quelconque, à deux forces, l'une verticale, c'eſt à dire perpendiculaire à la couche, & qui pourra ſans erreur ſenſible être ſuppoſée égale à la péſanteur qui tend au centre du ſphéroïde; l'autre horizontale, ſavoir dans la direction même de la couche, laquelle eſt à peu près perpendiculaire au rayon; & ſoit nommée la premiere Π, & la ſeconde π. Par le Principe de l'illuſtre Auteur dont nous venons de parler, il faudra multiplier la force horizontale π par $\Delta r d\zeta$ (Δ marque la denſité du fluide qu'on ſuppoſe être une fonction de r ſeulement) enſuite la différentier en ne faiſant varier que r; de même il faudra multiplier la force verticale Π par $\Delta(dr + \alpha \frac{dZ}{dr} dr,)$ & différentier enſuite en ne faiſant varier que ζ; après quoi on égalera les deux différentielles, ce qui donnera l'équation

$$\frac{d(\Delta r \pi)}{dr} dr d\zeta = \frac{d(\Delta \Pi + \Delta \Pi \frac{dZ}{dr})}{d\zeta} d\zeta dr, \text{ ſavoir}$$

$$\frac{d\Delta}{dr} \times r\pi + \frac{d(r\pi)}{dr} \times \Delta = \frac{d(\Pi + \Pi \frac{dZ}{dr})}{d\zeta} \times \Delta.$$

Or, en faiſant le calcul, on trouvera toujours que les quantités Π, π, Z ſeront telles que $\frac{d(\Pi + \Pi \frac{dZ}{dr})}{d\zeta} = \frac{d(r\pi)}{dr}$; donc il ne reſtera que l'équation $\frac{d\Delta}{dr} \times r\pi = 0$, qui donne $\pi = 0$, ſavoir la force horizontale nulle, & par conſéquent chaque couche de niveau.

XLVI.

Corollaire 4. Je viens maintenant à l'équation (f). Par la nature des expreſſions dont cette équation eſt compoſée, il eſt manifeſte qu'elle appartient uniquement à la ſurface poſtérieure du fluide. Or ſi l'on ſuppoſe qu'il n'y ait point de parois qui ſoutiennent le fluide, les valeurs de $\varsigma' x$, $\delta' y$, $\delta' \zeta$ demeureront abſolument arbitraires, & l'équation (f) ne pourra ſe vérifier qu'en faiſant généralement $T = 0$, ſavoir la valeur totale de l'intégrale $\int d x\, D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)$ nulle.

Soient rapportées les équations (e) à la ſurface poſtérieure du fluide en y mettant x', y', ζ' au lieu de x, y, ζ, & ſuppoſant l'intégrale $\int d x\, D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) = 0$, ce qui rend $V = T$, on aura $\frac{dTdt}{dy'} = D'\left(d \cdot \frac{dy'}{dt} + \Pi' dt\right)$, $\frac{dTdt}{d\zeta'} = D'\left(d \cdot \frac{d\zeta'}{dt} + \Psi' dt\right)$; donc

$$dT = \frac{dT}{dx'} dx' + \frac{dT}{dy'} dy' + \frac{dT}{d\zeta'} d\zeta' =$$

$$D'\left[\left(d \cdot \frac{dx'}{dt} + \Pi' dt\right) dx' + \left(d \cdot \frac{dy'}{dt} + \pi' dt\right) dy' + \left(d \cdot \frac{d\zeta'}{dt} + \Psi' dt\right) d\zeta'\right].$$

C'eſt la valeur de la différentielle de T priſe dans la ſurface dont nous parlons; donc puiſque la quantité T y doit être généralement $= 0$, ſa différentielle le ſera auſſi, & l'on aura par conſéquent l'équation

$$\left(d \cdot \frac{dx'}{dt} + \Pi' dt\right) dx' + \left(d \cdot \frac{dy'}{dt} + \pi' dt\right) dy' + \left(d \cdot \frac{dy'}{dt} + \Psi' dt\right) d\zeta' = 0,$$

qui ſera celle que la ſurface poſtérieure du fluide doit avoir.

On

On trouvera une équation ſemblable pour la ſurface antérieure du fluide; car nommant x', y', ζ' les coordonnées pour cette ſurface, & V' ce que devient V quand x, y, ζ, deviennent x', y', ζ', on aura en général, comme on l'a déja remarqué (*Art. XL.*) $V' = 0$; donc auſſi dV' ou $\frac{dV'}{dx'}dx' + \frac{dV'}{dy'}dy' + \frac{dV'}{d\zeta'}d\zeta' = 0$. Or $\frac{dVdt}{dx}dx = -Ddx(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)$, & $\frac{dVdt}{dy} = -D(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt)$, $\frac{dVdt}{d\zeta} = -D(d\cdot\frac{d\zeta}{dt} + \Psi dt)$; donc $dV' = -\frac{D'}{dt}[(d\cdot\frac{dx'}{dt} + \Pi' dt)dx' + (d\cdot\frac{dy'}{dt} + \pi' dt)dy' + (d\cdot\frac{d\zeta'}{dt} + \Psi' dt)d\zeta'] = 0$. Donc en général, quand le fluide eſt libre de tous cotés ſa ſurface extérieure doit être déterminée par l'équation

$$(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)dx + (d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt)dy + (d\cdot\frac{d\zeta}{dt} + \Psi dt)d\zeta = 0.$$

Suppoſons maintenant que le fluide ſoit ſoutenu par des parois fixes de figure quelconque, & dont l'équation ſoit $d\zeta = m\,dx + n\,dy$. Si l'on conſidére les trois expreſſions intégrales de l'équation (f) on voit qu'elles renferment chacune deux intégrations, qui ſe rapportent à y & ζ dans la premiére, à x & ζ dans la ſeconde, à x & y dans la troiſiéme. Or puiſque la rélation des trois variables x, y, ζ eſt donnée par l'équation $d\zeta = m\,dx + n\,dy$ ces différentes intégrales pourront être ramenées toutes à la même forme, c'eſt-à-dire être rapportées à deux ſeules changeantes x, & y; il n'y aura pour cela qu'à mettre dans la premiere au lieu de $d\zeta$ ſa valeur en x, $m\,dx$,

& dans la seconde, sa valeur en y, $n\,dy$; par-là l'équation (f) deviendra celle-ci

$S^2\,dx\,dy\,(m\,\delta x + n\,\delta y + \delta z)\,T\,dt = 0$ . . . . .

Mais puisque $dz = m\,dx + n\,dy$, on doit avoir aussi $\delta z = m\,\delta x + n\,\delta y$; donc l'équation sera identique, & ne fournira aucune condition; ainsi tout se reduira à faire ensorte que les équations génerales (b), (e), satisfassent, après leur intégration, à l'équation donnée $dz = m\,dx + n\,dy$.

XLVIII.

Rémarque. Je ne m'étends pas d'avantage sur cette matiere pour ne point passer les bornes que je me suis prescrites dans le présent Mémoire. Au reste par les formules méthodes données dans ce Problême, & dans les précedents, on pourroit encore trouver la solution de plusieurs questions qui concernent les fluides: comme le mouvement d'un fluide enfermé dans un vase mobile, les oscillations d'un corps qui flotte sur un fluide, la résistance qu'un fluide fait à un corps qui s'y meut; & d'autres Problêmes de cette espece.

XLIX.

Problême 10. Trouver les lois du mouvement des fluides élastiques.

Solution. Par nôtre Principe général il faut que la quantité $S^3\,d\,m\,s\,u\,d\,s$ soit un *maximum*, ou un *minimum*; donc en faisant les mêmes raisonnemens que dans le Prob. 6., on trouvera l'équation

$$\int S^3\,dm\,(u\,\delta u\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt}\times\delta x - d\cdot\frac{dy}{dt}\times\delta y - d\cdot\frac{dz}{dt}\times\delta z) = 0.$$

Or

Or si aucune force n'agissoit entre les corpuscules dm, on auroit, conformement à la formule (X) du même Prob. $S^3 dmu\delta u dt = S^3 dm(\Pi dt\delta x + \pi dt\delta y + \Psi dt\delta z)$; mais le fluide étant supposé élastique, on doit regarder chaque particule comme un ressort qui agit de tous côtés sur les particules contigues. Nommant F la force du ressort, & f l'espace par lequel il tend à se dilater, on trouvera en appliquant ici la formule (V) de l'*Art. VIII.*

$S^3 dmu\delta u = -S^3 dm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.) - S^3 F\delta f$, ou (en mettant $\Pi\delta x + \pi\delta y + \Psi\delta z$ au lieu de $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.$, & prenant F négativement, à cause que cette force tend ici à éloigner les particules) $S^3 dmu\delta u = -S^3 dm(\Pi\delta x + \pi\delta y + \Psi\delta z) + S^3 F\delta f$.

Substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, & mettant au lieu de dm sa valeur $D\,dx\,dy\,dz$, on aura donc

$$-\int S^3\,dx\,dy\,dz\,D\left[\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)\delta x+\left(d\cdot\frac{dy}{dt}+\pi dt\right)\delta y+\left(d\cdot\frac{dz}{dt}+\Psi dt\right)\delta z\right]+\int S^3 F\delta f dt = 0 \quad . \quad . \quad (n)$$

Or comme l'action du ressort F consiste à augmenter le volume de chaque particule dm, il est clair il faudra prendre ce volume même pour la valeur de l'espace f, donc $f = dx\,dy\,dz$, par conséquent $\delta f = dy\,dz\,\delta dx + dx\,dz\,\delta dy + dx\,dy\,\delta dz$; $=$ (en transposant les signes δ, d) $dy\,dz\,d\delta x + dx\,dz\,d\delta y + dx\,dy\,d\delta z$; donc $S^3 F\delta f = S^3(F dy\,dz\,d\delta x + F dx\,dz\,d\delta y + F dx\,dy\,d\delta z) = S^3 dx\,dy\,dz\left(\frac{F}{dx}d\delta x + \frac{F}{dy}d\delta y + \frac{F}{dz}d\delta z\right)$; formule, qu'on peut mettre sous cette forme

$$S^2 dy\,dz\,S dx\frac{F}{dx}d\delta x + S^2 dx\,dz\,S dy\frac{F}{dy}d\delta y + S^2 dx\,dy\,S dz\frac{F}{dz}d\delta z.$$

Or $S\,dx\,\frac{F}{dx}\,d\delta x$ se réduit, en intégrant par parties, à $F\delta x - S\,dx\,\frac{dF}{dx}\,\delta x$ (j'écris $dx\,\frac{dF}{dx}$ au lieu de dF pour dénoter que cette différentielle doit être prise en ne variant que x), & complettant l'intégrale, suivant la remarque que nous avons faite à la fin de *l'Art. I. du Mém. préced.* $F'\delta x' - F\delta x - S\,dx\,\frac{dF}{dx}\,\delta x$; on changera de même $S\,dy\,\frac{F}{dy}\,d\delta y$, en $F'\delta y' - F\delta y - S\,dy\,\frac{dF}{dy}\,\delta y$; & $S\,dz\,\frac{F}{dz}\,d\delta z$, en $F'\delta z' - F\delta z - S\,dz\,\frac{dF}{dz}\,\delta z$; donc

$$S^3 F\delta f = S^2\,dy\,dz\,(F'\delta x' - F\delta x) + S^2\,dx\,dz\,(F'\delta y' - F\delta y) + S^2\,dx\,dy\,(F'\delta z' - F\delta z)$$
$$- S^3\,dy\,dz\,S\,dx\,\frac{dF}{dx}\,\delta x - S^2\,dx\,dz\,S\,dy\,\frac{dF}{dy}\,\delta y -$$
$$- S^2\,dx\,dy\,S\,dz\,\frac{dF}{dz}\,\delta z$$
$$= S^2\,dy\,dz\,F'\delta x' + S^2\,dx\,dz\,F'\delta y' + S^2\,dx\,dy\,F'\delta z'$$
$$- S^2\,dy\,dz\,F\delta x - S^2\,dx\,dz\,F\delta y - S^2\,dx\,dy\,F\delta z$$
$$+ S^3\,dx\,dy\,dz\,\left(\frac{dF}{dx}\,\delta x + \frac{dF}{dy}\,\delta y + \frac{dF}{dz}\,\delta z\right);$$

donc substituant dans l'équation (n), au lieu de $S^3 F\delta f$, l'expression qu'on vient de trouver on aura enfin

$$\int (S^2\,dy\,dz\,F'\delta x' + S^2\,dx\,dz\,F'\delta y' + S^2\,dx\,dy\,F'\delta z' -$$
$$S^2\,dy\,dz\,F\delta x - S^2\,dx\,dz\,F\delta y - S^2\,dx\,dy\,F\delta z)$$
$$- \int S^3\,dx\,dy\,dz\,\left(D\,d\cdot\frac{dx}{dt} + D\Pi\,dt + \frac{dF}{dx}\,dt\right)\delta x$$
$$+ \left(D\,d\cdot\frac{dy}{dt} + D\pi\,dt + \frac{dF}{dy}\,dt\right)\delta y$$
$$+ \left(D\,d\cdot\frac{dz}{dt} + D\varpi\,dt + \frac{dF}{dz}\,dt\right)\delta z\,] = 0$$

équa-

Equation réduite à l'état qu'exige notre Méthode ; ſuppoſant donc les coéficiens des différences δx, δy, δz chacun $= 0$; on aura

$$\left.\begin{aligned} D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)+\frac{dF}{dx}\,dt &= 0\\ D\left(d\cdot\frac{dy}{dt}+\pi\,dt\right)+\frac{dF}{dy}\,dt &= 0\\ D\left(d\cdot\frac{dz}{dt}+\Psi\,dt\right)+\frac{dF}{dz}\,dt &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (p)$$

& le reſte de l'équation donnera

$$S^2 dy\,dz\,F'\delta x' + S^2 dx\,dz\,F'\delta y' + S^2 dx\,dy\,F'\delta z' - S^2 dy\,dz\,F\delta x + S^2 dx\,dz\,F\delta y + S^2 dx\,dy\,F\delta z = 0 \ldots (q)$$

L.

Corollaire 1. Les trois équations (p) renferment les loix générales du mouvement des fluides élaſtiques. Pour faire uſage de ces équations on ſuppoſera comme dans *l'Art. XLII.*, $\frac{dx}{dt} = \alpha$, $\frac{dy}{dt} = \beta$, $\frac{dz}{dt} = \gamma$, on mettra au lieu de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ leurs valeurs trouvées dans le même *Article*, & marquant, pour plus de ſimplicité, toutes les différences par d, on trouvera, après avoir diviſé par $D\,dt$, les trois équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt}+\alpha\frac{d\alpha}{dx}+\beta\frac{d\alpha}{dy}+\gamma\frac{d\alpha}{dz}+\Pi &= -\frac{dF}{D\,dx}\\ \frac{d\beta}{dt}+\alpha\frac{d\beta}{dx}+\beta\frac{d\beta}{dy}+\gamma\frac{d\beta}{dz}+\pi &= -\frac{dF}{D\,dy}\\ \frac{d\gamma}{dt}+\alpha\frac{d\gamma}{dx}+\beta\frac{d\gamma}{dy}+\gamma\frac{d\gamma}{dz}+\Psi &= -\frac{dF}{D\,dz} \end{aligned}\right\} (r)$$

dans leſquelles il ne faudra plus que ſubſtituer au lieu de F, & de D leurs valeurs en x, y, z, t.

Voici comment on trouvera ces valeurs ; F exprime la force du reſſort de chaque particule du fluide, laquelle eſt

ordinairement proportionelle à la denſité ; ſuppoſons donc, pour plus de généralité, que cette force ſoit comme une fonction quelconque donnée de la denſité, enſorte que $dF = E\,dD$; on aura $\frac{dF}{dx} = E\,\frac{dD}{dx}$, $\frac{dF}{dy} = E\,\frac{dD}{dy}$, $\frac{dF}{dz} = E\,\frac{dD}{dz}$. Enſuite pour trouver D, on obſervera que la maſſe dm de chaque particule du fluide eſt $D\,dx\,dy\,dz$, & que cette maſſe reſte toujours la même quelque mouvement que le fluide reçoive ; dont ſa différentielle en faiſant varier t, doit être nulle ; ce qui donne $\frac{d(D\,dx\,dy\,dz)}{dt} = 0$, ſavoir $\frac{dD}{dt}\,dx\,dy\,dz + \frac{d\,dx}{dt}\,D\,dy\,dz + \frac{d\,dy}{dt}\,D\,dx\,dz + \frac{d\,dz}{dt}\,D\,dx\,dy = 0$, ou

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D} + \frac{\frac{d\,dx}{dt}}{dx} + \frac{\frac{d\,dy}{dt}}{dy} + \frac{\frac{d\,dz}{dt}}{dz} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (s)$$

Or $\frac{d\,dx}{dt} = d\cdot\frac{dx}{dt} = d\alpha$; donc $\frac{\frac{d\,dx}{dt}}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}$; on trouve de même $\frac{\frac{d\,dy}{dt}}{dy} = \frac{d\beta}{dy}$, & $\frac{\frac{d\,dz}{dt}}{dz} = \frac{d\gamma}{dz}$; de plus $\frac{dD}{dt}\,dt$ exprime la variation de D dans l'inſtant dt ; donc ſi on ſuppoſe que D ſoit repréſenté par une fonction quelconque de x, y, z, t, on trouvera que la valeur complette de $\frac{dD}{dt}\,dt$ ſera $\frac{dD}{dt}\,dt + \frac{dD}{dx}\,\alpha\,dt + \frac{dD}{dy}\,\beta\,dt + \frac{dD}{dz}\,\gamma\,dt$; on mettra ces valeurs dans l'équation ci-deſſus, & changeant les lettres d en d, & multipliant le tout par

D

D on aura

$$\frac{dD}{dt} + \alpha\frac{dD}{dx} + \beta\frac{dD}{dy} + \gamma\frac{dD}{dz} +$$
$$D\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) = 0, \text{ ou}$$
$$\frac{dD}{dt} + \frac{d(D\alpha)}{dx} + \frac{d(D\beta)}{dy} + \frac{d(D\gamma)}{dz} = 0.$$

Equation par laquelle on connoîtra D, & par conſéquent F.

L I.

Corollaire 2. Soit, ſuivant l'hypotéſe ordinaire, $F = D$, par conſéquent $E = 1$; & qu'on mette les équations (r) ſous cette forme $L = -\frac{dF}{D\,dx}$, $M = -\frac{dF}{D\,dy}$, $N = -\frac{dF}{D\,dz}$, on aura

$$L = -\frac{dD}{D\,dx},\ M = -\frac{dD}{D\,dy},\ N = -\frac{dD}{D\,dz}.$$

Suppoſons encore, $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = V$, on aura (*Artic. précédent*) l'équation $\frac{dD}{dt} + \alpha\frac{dD}{dx} + \beta\frac{dD}{dy} + \gamma\frac{dD}{dz} + DV = 0$; donc, chaſſant les quantités $\frac{dD}{dx}$, $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$, par le moïen des équations préc.; diviſant par D, & tranſpoſant, on aura $\frac{\frac{dD}{dt}}{D}$, ou $\frac{d\cdot lD}{dt} = \alpha L + \beta M + \gamma N - V$, ou, pour abréger, $\frac{d\cdot lD}{dt} = T$. Or les équations ci-deſſus ſe réduiſent à $L = -\frac{d\cdot lD}{dx}$; $M = -$

$d\cdot lD$

$\frac{d \cdot lD}{dy}$, $N = -\frac{d \cdot lD}{dz}$, donc comparant ces équations avec celle qu'on vient de trouver on aura $\frac{dL}{dt} = -\frac{dT}{dx}$; $\frac{dM}{dt} = -\frac{dT}{dy}$; $\frac{dN}{dt} = -\frac{dT}{dz}$; équations, où la lettre D ne se trouve plus. On trouvera encore en combinant ensemble les équations ci-devant $\frac{dL}{dy} = \frac{dM}{dx}$, $\frac{dL}{dz} = \frac{dN}{dx}$, deux équations qui reviennent au même que les équations (k) de *l'Art. XLII.* L'on aura donc cinq équations toutes délivrées de la lettre D, dont trois prises à volonté suffiront pour résoudre le Problème.

Si on suppose que le mouvement du fluide soit parvenu à un état permanant; alors on aura $\frac{dD}{dt} = 0$, & par conséquent $T = 0$.

LIII.

Corollaire 3. On peut encore représenter le mouvement du fluide par les variables X, Y, Z, t, comme dans *l'Art. XLIV.* Pour cela on cherchera d'abord la valeur de D au moïen de l'équation (s), laquelle en introduisant les lettres α, β, γ, devient celle-ci, $\frac{\frac{dD}{dt}}{D} + \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}$. Or, par les formules de *l'Art. cité*, on trouve $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \frac{\frac{dK}{dt}}{K}$, par conséquent $\frac{\frac{dD}{dt}}{D}$

$\frac{dK}{dt}$

$+\frac{dK}{K}=0$, d'où l'on tire $lD+lK=$ *const.*, savoir $DK=h$, & $D=\frac{h}{K}$. Pour déterminer la constante h, on remarquera, qu'au commencement du mouvement, $dx=dX$, $dy=dY$, $dz=dZ$; donc $L=1$, $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=1$, $R=0$, $S=0$, $T=0$, $V=1$; ce qui donne $K=1$; d'où il s'ensuit que h doit être égale à la densité D que le fluide a au premier instant de son mouvement.

Aiant trouvé l'expression de D il n'y aura plus qu'à la substituer dans les équations (p); or D étant une fonction de X, Y, Z, t; sa différentielle, en prenant t constant, sera représentée par $E\,dX+F\,dY+G\,dZ$; ainsi pour avoir les valeurs de $\frac{dD}{dx}$, $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$, il faudra encore substituer au lieu de dX, dY, dZ leurs expressions en dx, dy, dz trouvées dans *l'Art. XLIV.*, ce qui donnera, en supposant

$E(QV-RT)+F(RS-PV)+G(PT-QS)=A$
$E(NT-MV)+F(LV-NS)+G(MS-LT)=B$
$E(MR-NQ)+F(NP-LR)+G(LQ-MP)=C$,

$dD=\frac{A\,dx+B\,dy+C\,dz}{K}$, d'où l'on tire $\frac{dD}{dx}=\frac{A}{K}$, $\frac{dD}{dy}=\frac{B}{K}$, $\frac{dD}{dz}=\frac{C}{K}$; & par conséquent suivant l'hyp. de *l'Art. L.* $\frac{dF}{dx}=\frac{EA}{K}$, $\frac{dF}{dy}=\frac{EB}{K}$, $\frac{dF}{dz}=\frac{EC}{K}$.

On substituera donc ces valeurs dans les équations (p), & l'on aura, en divisant par D qui est $=\frac{h}{K}$,

$$d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt+\frac{EA}{h}dt=0$$

$$d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt + \frac{EB}{b} dt = 0$$

$$d \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \Psi dt + \frac{EC}{b} dt = 0.$$

Si on suppose dans ces équations $\Pi = 0$, $\pi = 0$, $\Psi = 0$, $\frac{E}{b} = 2g$, elles reviennent au même que celles que M. Euler a trouvé par une voie différente, *pag. 6. ci-dessus*.

LIII.

Scholie. A l'égard de l'équation (*q*) qui reste encore à examiner, on prouvera par un raisonnement semblale à celui de *l'Art. XLVI.* que, si le fluide appuie contre des parois fixes, les trois termes $S^2 dy\, d\zeta\, F\delta x + S^2 dx\, d\zeta\, F\delta y + S^2 dx\, dy\, F\delta\zeta$ sont toujours $= 0$ aussi bien que les trois autres $S^2 dy\, d\zeta\, F'\delta x' + S^2 dx\, d\zeta\, F'\delta y' + S^2 dx\, dy\, F'\delta\zeta'$. Mais si on suppose le fluide libre de toutes parts, ou seulement de quelque côté; alors la quantité F devra être nulle à la surface extérieure du fluide dans les endroits, où il est libre; on aura donc, pour cette surface, l'équation $dF = 0$, savoir $\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{d\zeta} d\zeta = 0$; ou, en mettant, au lieu de $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{d\zeta}$ leurs valeurs, tirées des équations (*p*)

$$\left(d \cdot \frac{dx}{dx} + \Pi dt\right) dx + \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt\right) dy + \left(d \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \Psi dt\right) d\zeta = 0,$$

précisément comme on a trouvé dans *l'Art. cité* pour les fluides non élastiques.

Fautes

Fautes à corriger.

Pag. 196., *lign.* 5. qui a pour titre: *Methodus maximorum &c.*, *liſez* qui a pour titre: *Methodus inveniendi lineas curvas &c.*

Cet Ouvrage eſt le même que celui que nous avons déja cité dans le Mémoire précédent.

Pag. 201. *ligne antépénultiéme* les mêmes ſubſtitutions, *liſez* les mêmes ſuppoſitions.

Pag. 203. *lign.* 4. multipliant par $\frac{\delta\varphi}{V}$, *changez* le δ en d.

Pag. 204. *lign.* 17. un raport tel que $Pdp\delta$, *mettez* $\delta P.dp$.

lign. 24. $A\delta p + B\delta q + R\delta r$, *liſez* $A\delta p + B\delta q + C\delta r$.

Pag. 209. *lign.* 9. & 10. de *l'Art. X.*, *changez* P', P'' en P; Q', Q'' en Q; R', R'' en R.

Pag. 215. *lig. pénultiéme* $\delta ds = 0$, *liſez* $\delta ds'' = 0$.

Pag. 216. *lign. premiére* $(Mu\delta u + M'\delta u' + M''\delta u'' + \&c.)\,dt$ *liſez* $(Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.)\,dt$.

Pag. 217. *lig.* 18. $M'\int\delta ds'$, *liſez* $M'\int u'\delta ds'$.

Pag. 223. *lign. ſeconde*, *mettez le ſigne* $-$ *avant le premier membre de l'équation* (H).

Pag. 225. *lign. derniére*, & $\delta\varphi$ pour $\delta\phi$, *liſez* & $\delta\varphi$ pour $\delta\phi'$.

Pag. 231. *lign.* 4. $\frac{d\cdot\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt}$, *liſez* $\frac{d\cdot\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt}$.

lign. 14., $Psdt$, étant la longueur &c., *liſez* $Psdt$, s étant la longueur &c.

Pag. 240. *lign.* 6. *au lieu de* $+ d\cdot\frac{dy}{dx} \times kdt$, *liſez* $+ d\cdot\frac{dy}{dx} \times kdt$.

Pag. 249. *lign.* 9. dans l'équation (*L*), *liſez pour plus de clarté* dans l'équation (*L*) ci-deſſus.

Pag. 261. *lign. derniére, changez* [*X*] *en* [*Y*].

Pag. 263. *lign.* 15. Soient en général, *liſez pour plus de clarté* Soient en général pour chaque point du corps, c'eſt-à-dire, en regardant ξ, φ, ζ comme conſtantes.

lign. 22. $H\delta q$, *liſez* $H\delta Q$.

Pag. 266. *lign.* 9. Je mets de même le ſecond nombre; *liſez* Je mets de même le ſecond membre.

Pag. 267. *lign.* 11. devient en fatigant, *liſez* devient en faiſant.

lign. 19. eſt préciſément $= T$, *liſez* $= Tdt$.

Pag. 270. *dans les trois formules des lignes* 10. 11. 12., *changez par-tout la lettre* d *en* d.

Pag. 272. *lign.* 11. pour que les équations puiſſent être identiques, *liſez* pour que les équations ſoient poſſibles.

Pag. 276. *lign.* 2. *au lieu de* $-pT - \theta A'dx - \theta B'dz$, *liſez* $-pT - \frac{\theta A'dx}{dt} - \frac{\theta B'dz}{dt}$.

lign. 7. *Dans le premier membre de l'équation de cette ligne, liſez* qT *au lieu de* qz.

lign. 12., en intégrant $\theta = ac$, *liſez* en intégrant $\theta = ac^t$.

Pag. 277. *lign.* 2. dans les équations (*h*), (*i*), *liſez* dans les équations (*g*), (*b*).

dans la ligne qui ſuit l'équation (*m*) α comme on ſait, *effacez* α.

Pag. 285. *Dans les équations des lign.* 17., 18., 20. *au lieu de* $\Pi \frac{dZ}{dr}$, *liſez* $\alpha \Pi \frac{dZ}{dr}$.

Pag. 290. *lig.* 19. *ajoutez dt à la fin de la ligne.*

Pag. 291. *dans la ligne* (*q*) *changez les deux ſignes* + *en* −.

SUR

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MECHANIQUE.

PAR M. LE CHEV. DAVIET DE FONCENEX.

UN très-grand Géomètre qui s'eſt appliqué avec un égal ſuccès à reculer les bornes de la Méchanique & à en éclaircir les principes, les a réduit à la Force d'inertie, la Compoſition des forces, & l'Equilibre : je vais tâcher dans cet Ecrit de démontrer ces Principes d'une maniére exacte & rigoureuſe, & de ſatisfaire ainſi à la queſtion ſi ſouvent agitée parmi les Géomètres & les Philoſophes, *ſi les loix de la Méchanique ſont de vérité néceſſaire ou contingente.*

L'homme Célébre dont je viens de parler remarque à ce ſujet, dans l'excellent diſcours préliminaire qu'il a mis à la tête de ſon Traité de Dynamique, que la queſtion dont il s'agit ſe réduit à ſavoir ſi les loix de l'équilibre, & du mouvement qu'on obſerve dans la nature ſont différentes de celles que la matiére abandonnée à elle même auroit ſuivie : qu'on me permette cependant ici quelques réflexions qui pourront peut-être ſervir à répandre un plus grand jour ſur cette matiére. Il paroit d'abord que l'action du Créateur ſur les corps ne rend en aucune façon hipotétique l'exécution des loix de la Méchanique dans l'univers, comme M. d'Alembert ſemble le ſuppoſer dans cet endroit ; puiſqu'il nous ſera toujours permis de conſidérer cette action de Dieu comme une nouvelle force qui agit ſur les corps : quels que ſoient alors les mouvemens qui en réſultent, ils ne ſeront

jamais contraires aux principes de la Méchanique qui doivent être immuables par eux mêmes.

En effet les objets des différentes parties des Mathématiques pures, ſont également abſtraits, & par conſéquent ſuſceptibles d'un même dégré d'évidence: car pendant qu'on ne conſidére les corps dans l'algébre que comme capables de former des nombres, & que la Géométrie ne s'occupe que de leur étendue: on ne leur conſerve dans la méchanique que la ſeule impénétrabilité: & quoique cette ſcience emprunte de l'algébre la réplicabilité de ces points impénétrables, & qu'elle ait recours à la Géométrie pour en apprecier les mouvemens; il eſt toujours viſible que ces notions étant également ſimples & abſtraites, les concluſions qu'on peut en déduire devront toujours être marquées au ſceau de la certitude & de l'évidence.

Si nous parvenons donc à fonder les loix de la Méchanique ſur ces ſeules conſidérations purement abſtraites & intellectuelles, non ſeulement elles ſeront d'une vérité auſſi néceſſaire que les propoſitions de la Géométrie, mais il ſera encore certain que ces loix ſeront obſervées dans la nature: car, comme il eſt indubitable qu'un cercle aura toujours les propriétés que la Géométrie lui aſſigne, ſi réellement il eſt tel qu'on l'a ſuppoſé; de même quand deux ou pluſieurs corps agiront les uns ſur les autres d'une maniére quelconque, il en réſultera néceſſairement l'effet qui appartient à cette maniére d'agir, & que la méchanique nous enſeigne. Il eſt vrai qu'il eſt toujours aſsès difficile de s'aſſurer dans la pratique, de la maniére dont les corps agiſſent les uns ſur les autres; ou pour me ſervir du langage des Méchaniciens, il eſt moralement impoſſible de connoître exactement toutes les forces qui agiſſent ſur les corps qui nous environnent; mais la Méchanique, proprement dite, n'en eſt pas moins certaine, & même moins utile; & c'eſt encore ici comme dans la Géométrie,

ou

ou l'on transporte avec succès les théorèmes qu'on démontre sur les figures exactes, à celles qui ne font qu'en approcher sensiblement. Enfin l'Etre Suprême peut sans doute alterer à son gré la configuration des corps, comme leur mouvement; mais les loix qu'ils suivront dans leurs nouveaux mouvemens, & les propriétés de leurs nouvelles figures, pourront toujours se déduire de la quantité de ces changemens, conformément aux principes immuables de la Méchanique & de la Géométrie.

En voilà assès pour faire connoître à mes Lecteurs le point de vue, sous lequel j'ai cru devoir considérer cette Science, & la route que j'ai tâché de suivre pour en établir les principes d'une maniére qui ne souffrit aucune difficulté. Les trois principes que j'ai indiqué plus haut m'ont fournit la division naturelle de ces Recherches: j'y ai joint une démonstration du principe de l'équilibre du lévier absolument indépendante des précédens; ce que j'ai fait d'autant plus volontiers, qu'il paroit assés difficile de décider, si l'on doit plus tôt faire dépendre l'équilibre du lévier de la composition des forces, que déduire au contraire ce dernier principe de celui de l'équilibre du lévier. La démonstration toute analytique que j'en ai trouvé m'a d'ailleurs paru par sa singularité digne de trouver place ici.

I.

De la Force ou Loi d'inertie.

SI l'on réfléchit sur la maniére dont les hommes se forment les idées de l'extension & du mouvement, & sur la méthode qu'ils suivent pour leur donner plus de précision: on verra bien-tot que comme nous sommes obligés de rapeller toutes les espéces d'extension à la seule

ex-

extenſion linéaire & rectiligne, ſi nous voulons en évaluer les raports; de même quand il s'agir de fixer les rélations, qui ſe trouvent entre les différents mouvements, que nous obſervons dans la nature, il eſt d'abord néceſſaire de les raporter à une unité commune & déterminée. Déja accoutumés en Géométrie à conſidérer la ligne droite comme la plus ſimple des extenſions linéaires, nous nous ſommes déterminés pour le mouvent rectiligne & nous avons préféré le mouvement uniforme à cauſe de l'égalité des eſpaces décrits en tems égaux, qui nous l'a fait regarder comme toujours ſemblable à lui même.

Après avoir choiſi le mouvement uniforme pour la meſure commune de tous les autres, il a fallu pour en faciliter la comparaiſon raporter a des cauſes vraies, ou imaginaires, les changemens continuels qui arrivent dans l'uniformité du mouvement des corps: ſi à préſent on fait abſtraction de ces cauſes quelles qu'elles ſoient, le mouvement ſera uniforme, & rectiligne par la definition même, & c'eſt ſi je ne me trompe dans cette ſeule abſtraction purement mathématique que conſiſte la loi d'inertie, dont l'énoncé ſe reduira à dire, que tous les corps, ſoit qu'ils ſoient en repos, ou en mouvement, doivent être conſidérés comme perſévérant dans l'état où ils ſont, ſi l'on fait abſtraction de tous les changemens qui pourroient arriver dans leurs viteſſes & dans leurs directions.

Il eſt viſible qu'un pareil principe n'a pas beſoin de démonſtration, puiſque ce n'eſt qu'une propoſition identique; & pour peu qu'on y réfléchiſſe, on s'appercevra aiſément qu'il eſt ſuffiſant pour la méchanique, & que cette ſcience n'exige pas qu'on lui donne plus d'extenſion, & de réalité. En effet quand même les corps ſeroient capables d'accélérer, ou de retarder d'eux mêmes leurs mouvemens, il eſt évident que cela ne pourroit ſe faire que ſelon quelque loi déterminée, à laquelle il ſeroit toujours facile d'avoir

égard

égard, dès que l'experience nous l'auroit appriſe, de la même façon qu'on calcule les effets de l'attraction, & de la réſiſtance des fluides. En un mot c'eſt une choſe fort indifférente pour la Méchanique, que le mouvement des corps ſoit altéré par la nature même de ces corps, ou par quelques cauſes étrangères; ſur tout, ſi ces cauſes nous ſont inconnues, comme on ſait qu'il en eſt pluſieurs, qui le ſont encore pour nous, & le ſeront peut-être toujours.

Il eſt donc inutile de donner plus d'étendue à la loi d'inertie, & il paroit même qu'elle n'en eſt pas ſuſceptible. Pluſieurs Philoſophes ont prétendu à la vérité que c'eſt une propriété eſſentielle à la matiere de conſerver ſon état, c'eſt à dire de continuer à ſe mouvoir avec la même viteſſe, & dans la même direction; mais ſans examiner ici ſi c'eſt mieux conſerver ſon état de ſe mouvoir uniformément & en ligne droite, que ſuivant une autre loi & dans une courbe: il me ſuffira de remarquer que, dans l'entiére ignorance où nous ſommes ſur la nature des corps, le ſeul moïen qui nous reſte pour établir une pareille aſſertion, ſeroit de faire voir que cette propriété eſt une conſéquence de l'étendue & de l'impénétrabilité; or je ne penſe pas que cela nous ſoit jamais poſſible.

En vain dira-t-on qu'on n'aperçoit rien dans l'idée que nous avons de la matiére, qui puiſſe lui donner du mouvement, ou le ralentir ſi elle en a déja: il ſuffit que cette propriété n'ait rien de contradictoire pour nous autoriſer à penſer qu'elle peut en être doüée; or je ne vois pas en quoi il ſeroit plus abſurde d'aſſurer qu'un corps a, ou peut avoir en lui même de quoi retarder ſon mouvement, que de dire que cet effet eſt produit par la ſeule préſence d'un autre corps, quoique fort éloigné, comme le penſe une ſecte de Philoſophes fort acréditée aujourd'hui.

Je ſuis au reſte très perſuadé que la force d'inertie telle qu'on la conçoit communement, a réellement lieu dans la

nature

nature; la régularité du mouvement des Planettes, & une infinité d'autres faits ſemblent ne pas permettre d'en douter; mais c'eſt là une vérité d'experience, une des premiéres ſans doute de celles qui doivent ſervir de fondement aux ſciences phyſico-mathématiques, mais inutile à la Méchanique, & d'un genre différent de celles qu'il eſt permis d'admettre dans cette ſcience, à moins qu'on ne veuille, avec quelques Philoſophes, la ranger dans la claſſe des ſciences expérimentales.

M. d'Alembert ſemble ſe rapprocher de ce ſentiment au mot *Force* dans l'Encyclopédie. *La force d'inertie* (dit cet illuſtre Ecrivain) *n'a lieu, comme l'experience le prouve, que dans la matiére brute, c'eſt-a-dire dans la matiére qui n'eſt pas unie à une principe intelligent*: or après un pareil aveu, nôtre Auteur n'a ſans doute pas prétendu que cette loi fût démontrée même pour les corps abſtraits qui ſont l'objet de la Méchanique; puiſqu'alors la matiére y ſeroit aſtreinte ſans réſtriction. La démonſtration qu'il donne au commencement du Traité de Dynamique tend donc uniquement à établir qu'on ne trouve dans l'idée du mouvement d'un corps aucune raiſon de variabilité, ce que j'accorderai ſans peine, quoique pluſieurs Philoſophes croient avoir de bonnes raiſons pour être d'un ſentiment contraire; mais il me ſemble que l'idée d'une viteſſe conſtante n'y eſt pas plus compriſe que celle d'une viteſſe retardée. Je le répéte encore: la ligne droite, & le mouvement uniforme ne ſont pas plus ſimples en eux mêmes, que toute autre ligne, & toute autre loi de mouvement: ainſi quand même il ſeroit certain que les corps ne ſont pas capables de ſe donner le mouvement à eux mêmes, il ne s'en ſuivroit pas encore qu'ils fuſſent incapables de retarder celui, qu'ils auroient déja, comme un grand Géomètre l'a crû; puiſque cette concluſion ſuppoſe que le mouvement uniforme eſt celui que les corps ſuivent d'eux mêmes, & que, s'il eſt variable, il en faut chercher la cauſe dans une force active.

I I.

De la compoſition des forces.

DE quelle nature que ſoient les cauſes du mouvement des corps, qu'on comprend ſous le nom général de *forces* : il eſt au moins certain qu'elles n'ont par rapport à nous aucune réalité, que par leurs effets, & que les mouvemens qu'elles produiſent, étant les ſeuls moyens que nous aions pour nous aſſurer de leur exiſtence, c'eſt dans ces mouvemens ſeuls que nous devons chercher la meſure de leurs rapports. Les forces ſont donc à nôtre égard toujours proportionelles à leurs effets, puiſque nous entendons par cette expreſſion bien moins la cauſe du mouvement que le mouvement même. Mais comment doit-on eſtimer le rapport des mouvemens de pluſieurs corps différens? On voit d'abord qu'on ne peut conſidérer dans un mouvement quelconque, que le corps en mouvement, & la viteſſe, avec laquelle il ſe meut : tout ſe réduit donc à ſavoir ſi l'on doit dire qu'une force eſt double d'une autre, quand agiſſant toutes les deux ſur une même maſſe, celle-ci lui donne une viteſſe double ; ou bien ſi pour cela elle doit imprimer une viteſſe égale à une maſſe double. Il eſt évident qu'on peut indifféremment choiſir celle qu'on voudra de ces deux definitions, & j'eſpére de faire voir dans l'article ſuivant qu'elles ont lieu toutes les deux en même tems; je me contenterai, en attendant, d'obſerver ici que ce que j'ai à dire dans cet article ſur la compoſition de forces, ſera également vrai dans l'un & dans l'autre cas.

LEMME. Si deux forces égales dont la quantité, & les directions ſont exprimées par les lignes CA, CB agiſſent (*fig.* 1. *plan.* 4.) ſur un corps quelconque C, il eſt évident

que le corps ne pourra pas obeir à ces deux forces en même tems : car il ne peut pas se mouvoir en même tems selon CA, & selon CB; il prendra donc une direction CM différente de CA & de CB, & la ligne CM doit nécessairement diviser l'angle ABC en deux également, puisque les forces CA, CB étant égales par la supposition, tout ce qui tend à raprocher CM de CA tend également à la raprocher de CB. Cela posé, il est encore évident qu'on peut imaginer une troisiéme force CM, qui fasse seule sur le corps C le même effet, que CA, CB conjointément. D'autre part la quantité de la force CM ne peut dépendre que de la quantité de CA ou CB, & de la valeur de l'angle ACB, & par conséquent si l'on fait $CA = CB = a$, $CM = \zeta$, $ACB = \varphi$, on aura $\zeta = \mathit{fonct.}\ (a, \varphi)$.

Or la force CM étant de même nature, que la CA, il faut qu'elles contienent un même nombre de dimensions; ce qui donne $\zeta = CM = \mathit{fonct.}\ (a, \varphi) = a\ \mathit{fonct.}\ \varphi$, parceque la dimension de φ est nulle. *

Au reste si quelqu'un n'étoit pas content de ces sortes de raisonnemens, on pourroit d'abord poser comme un principe incontestable & évident par lui même, que pour le même angle φ, la force ζ est toujours proportionelle à a, ensuite faisant $\frac{d\zeta}{da} = y$, on trouveroit y constant, & par consequent $\zeta = ay$ ou bien $\zeta = a\ \mathit{fonct.}\ \varphi$.

Problème *Trouver la valeur de* y *ou de* fonct. φ.

Soient menées les lignes (*fig.* 2. *plan.* 4.) Cm, Cm, Ca, Ca', Cb', Cb, telles que $ACB = \varphi$, $mCM = ACa = aCa' = BCb = bCb' = \frac{d\varphi}{2}$ on aura $mCm = ACa' = BCb' = d\varphi$, $aCb = \varphi + d\varphi$, $a'Cb' = \varphi + 2d\varphi$, & la

* Il suit de là que, l'angle φ demeurant constant, ζ est toujours proportionel à a; on pourroit de même démontrer par cette méthode d'une maniére directe & fort naturelle plusieurs théorêmes sur la proportionalité des côtés des figures, & un grand nombre d'autres propositions de Géométrie, & de Méchanique.

valeur de y qui appartient à l'angle ACB, deviendra $y + dy = y'$ pour l'angle aCb, & $y + 2dy + d^2y = y''$ pour l'angle $a'Cb'$. *Soit* $dy = u\,d\varphi$, & $u = V$ lorsque $\varphi = 0$, on aura pour l'angle mCm, $y = 2 + V\,d\varphi$; car l'on fait que quand l'angle mCm s'évanoüit tout à fait, z devient $= 2a$, ce qui donne $y = 2$.

Tout ceci posé, & bien entendu, imaginons que les quatre forces Ca', CA, Cb', CB, dont chacune est $= a$, agissent en même tems sur le point C: il est clair (*lemme*) que la force composée de ces quatre forces sera suivant CM, & $= a(y + y'')$. Or les deux forces CA, Ca' sont équivalentes à une troisiéme Ca, qui doit être égale à celle qui résulte suivant CM de l'action simultanée des Cm, Cm, cette force sera donc $= a(2 + V\,d\varphi)$: on reduira de même les forces CB, Cb' à un troisiéme selon Cb, & $= a(2 + V\,d\varphi)$. On pourra donc substituer aux quatre forces Ca', CA, Cb', CB deux autres forces chacune $= a(2 + V\,d\varphi)$, & agissant dans les directions Ca, Cb; or si ces forces étoient $= a$ elles auroient pour force composée une troisiéme force dans la direction CM & $= ay'$, donc (*lemme*) cette force composée sera $= ay'(2 + V\,d\varphi)$. d'autre part cette force devra, comme nous l'avons vû plus haut, être $= a(y + y'')$. De là résulte l'équation $y'(2 + V\,d\varphi) = y + y''$, & substituant les valeurs de y' & de y'', $(y + dy) \times (2 + V\,d\varphi) = 2y + 2dy + d^2y$, & ôtant ce qui se détruit $yV\,d\varphi + V\,dy\,d\varphi = d^2y$, ou bien $yV\,d\varphi = d^2y$. On voit de là que puisque y doit être une quantité finie, il faut que V soit infiniment petite & du même ordre que $d\varphi$.

Supposons donc $V = H\,d\varphi$, on aura $d^2y = yH\,d\varphi^2$, dont l'intégrale est généralement $y = Ae^{\varphi\sqrt{H}} + Be^{-\varphi\sqrt{H}}$: si dans cette équation, & dans sa différentielle, qui est $dy = \sqrt{H} \cdot d\varphi\,(Ae^{\varphi\sqrt{H}} - Be^{-\varphi\sqrt{H}})$, on fait $\varphi = 0$, cette supposition, qui rend $y = 2$, nous donnera premiérement

$A + B = 2$ enſuite $dy = \sqrt{H}\, d\varphi\, (A - B)$: Or quand $\varphi = 0$ on a $dy = V\, d\varphi = H\, d\varphi^2$, donc $H\, d\varphi = A - B$, ou $A - B = 0$, & par conſéquent $A = B = 1$; donc $y = e^{\varphi\sqrt{H}} + e^{-\varphi\sqrt{H}} = 2\, cof.\, \varphi\sqrt{-H}$. Maintenant lorſque $\varphi = \frac{\pi}{2}$ c'eſt à dire quand l'angle φ eſt égal à la demi-circonférence, on a $y = 0$ donc $cof.\, \frac{\pi}{2}\sqrt{-H} = 0$ & par conſéquent $\frac{\pi}{2}\sqrt{-H} = \frac{\pi}{4}(2\mu + 1)$; ($\mu$ étant un nombre entier quelconque poſitif ou négatif). On tire de cette équation $\sqrt{-H} = \frac{2\mu + 1}{2}$ & enfin $y = 2\, cof.\, \frac{(2\mu + 1)}{2}\varphi$.

Or il eſt viſible que tant que l'angle φ eſt moindre que deux droits, la force z, & par conſéquent la valeur de y doit toujours être poſitive: condition qui ne ſauroit avoir lieu à moins que μ ne ſoit $= 0$, on aura donç enfin y ou *fonct.* $\varphi = 2\, cof.\, \frac{\varphi}{2}$. C. Q. F. T.

Corollaire. De là il eſt aiſé de déduire cette concluſion générale, ſçavoir que la force compoſée de deux forces quelconques égales entre elles & inclinées comme que ce ſoit, eſt toujours déterminée quant à ſa quantité, & à ſa direction par la diagonale du rhombe qu'on peut faire ſur les lignes qui exprimeroient la quantité & les directions de ces forces.

Problème 2. *Trouver la quantité, & la direction de la force CG qu'on ſuppoſe équivalente à deux autres forces CD, CB qui forment entre elles un angle droit.*

Soit tirée par le point C la ligne droite (*fig.* 3. *plan.* 4.) EFC, en ſorte que $GCB = BCE$, on aura encore $DCG = DCF$: qu'on imagine à préſent la force CB di-

viſée

visée en deux forces égales selon CG & selon CE, & la force CD en deux autres dans les directions CF, CG: les deux premiéres seront (*prop. précéd.*) $= \frac{CB}{2\,cos.BCG}$, & les deux secondes $= \frac{CD}{2\,cos.DCG}$; nous aurons donc, au lieu de CD, & CB, quatre autres forces: sçavoir deux dans les directions CE, CF, & deux conspirantes dans la direction CG; or par la supposition toute l'action doit se faire dans la ligne CG, donc les deux forces selon CE, & CF, qui sont directement opposées doivent être égales, ce qui donne $\frac{CB}{2\,cos.BCG} = \frac{CD}{2\,cos.DCG}$: & celles qui sont selon CG devant être égales à CG, on a, $CG = \frac{CB}{2\,cos.BCG} + \frac{CD}{2\,cos.DCG}$. Si à présent on substitue dans la seconde équation la valeur de $CB = \frac{CD \times cos.BCG}{cos.DCG}$ prise dans la primiére. elle deviendra $CG = \frac{CD}{cos.DCG}$: on aura donc les analogies suivantes $cos.BCG : cos.DCG = CB : CD$, $CG\ CD :: = 1 : cos.DCG$; & à cause de l'angle DCB qui est droit, $cos.DCG : sin.DCG = CD : CB$, $CD : CG = sin.BCG : 1$. La premiére de ces analogies détermine la direction de la force CG & la seconde la quantité. C. Q. F. T.

Problème 3. *Trouver la quantité & la direction de la force CM composée de deux autres forces CE, CD, qui forment entre elles un angle quelconque.*

Après avoir tirée la ligne FCG perpendiculaire à CM, qu'on divise CD en deux autres CG, CB, on aura (*prop. prec.*) $CB = CD \times cos.DCB$, $CG = CD \times sin.DCB$ (*fig.* 4. *plan.* IV.) & en divisant de même CE on trouvera $CQ = CF \times cos.ECB$; $CF = CE \times sin.ECB$; l'opposition des forces CF, CG, nous donnera l'équation

$CD \times \sin. BCD = EC \times \sin. ECB$, qui détermine la direction : les deux autres forces CQ, CB, qui agiſſent dans la direction CM donneront $CM = CD \times \cos. DCB + CE \times \cos. ECB$, valeur de la force compoſée.

Si dans cette équation on ſubſtitue au lieu de CD ſa valeur $\frac{CE \times \sin. ECB}{\sin DCB}$, tirée de la premiére, on a

$$CM = CE \frac{(\cos. BCD \times \sin. ECB + \cos. ECB \times \sin BCD)}{\sin. BCD}$$

$= \frac{CE \times \sin. ECD}{\sin. DCB}$, à cauſe de $ECB + BCD = ECD$,

Donc CE: CD: CM ſont entre elles comme $\sin. BCD$: $\sin. ECB$: $\sin. ECD$, ou comme le ſinus des angles oppoſées. C. Q. F. T.

Corollaire. Les équations qui determinent CM, ſont comme on voit les mêmes que celles, qui expriment le rapport de la Diagonale d'un paralellogramme quelconque à ſes côtés ; nous avons donc démontré généralement que la force compoſée de deux forces quelconques, eſt toujours exprimée quant à ſa quantité, & à ſa direction par la diagonale du paralellogramme qu'on peut faire ſur les lignes qui repréſentent la direction, & la quantité des forces compoſantes.

Scholie 1. La démonſtration du Prob. 1., dont les deux autres ne ſont que des Corollaires aſſez ſimples, eſt comme on voit directe, & fort courte : je n'ai pas fait difficulté d'y faire uſage dès le commencement, des calculs différentiel, & intégral ; parceque l'expreſſion de la force compoſée de deux forces données, & qui forment entre elles un angle quelconque, contient toujours implicitement ces principes, puiſque le rapport de cette force aux compoſantes peut-être incommenſurable. Il eſt vrai que l'application

de

de ces calculs à la fonction indéterminée qui exprime ce raport, ſuppoſe qu'elle eſt aſſujettie à la loi de continuité; mais il eſt viſible qu'on ne ſauroit raiſonablement en douter, & que puiſque les accroiſſemens de cette force dépendent de celle de l'angle, ces accroiſſemens ne ſe font pas par ſauts. Cependant, comme je veux prévenir juſqu'aux difficultés les moins fondées, voici un autre démonſtrarion de la même propoſition, entiérement délivrée de ces calculs, & qui ne dépend en aucune façon de cette ſuppoſition d'ailleurs ſi légitime.

Soit (*fig.* 2. *plan. IV*) mCM un angle, qui ſoit à l'angle droit comme $1 : \nu$, ν étant un nombre entier quelconque, & ſoit $ACM = BCM$ un angle multiple de mCM, & $= n \times mCM$; & après avoir tiré les lignes Ca, Ca', Cb, Cb', telles que $ACa = aCa' = BCb = bCb' = mCM$, qu'on ſuppoſe que la force compoſée de deux forces $= a$, ſoit $= ka$ pour l'angle mCm; $= pa$ ou $p^1 a$ pour l'angle ACB; $= p^{n+1} a$ pour l'angle aCb, & enfin que la force compoſée pour l'angle $a'Cb'$ ſoit $= p^{2+2} a$. (on voit que dans ces expreſſions les nombres n, $n + 1$, $2 + 2$, n'expriment pas des puiſſances de p, mais ſervent ſeulement à dénoter que les forces $q^n a$, p^{n+1} &c. répondent aux angles $2n \times mCM = ACB$, $2(n + 1) \times mCM = aCb$, $2(n + 2) \times mCM = a'Cb'$.

Puiſque $a'CA = b'CB = mCm$, les deux forces $a'C$, AC ſeront équivalentes (*hyp.*) à une ſeule $= ka$ ſelon aC & par la même raiſon deux autres forces égales Bc, $b'c$ équivaudront à une troiſiéme ſuivant bC & $= ka$: or deux forces $= a$ ſuivant aC, bC donnent pour force compoſée $p^{n+1} a$, donc les deux $= ka$ donneront $kp^{n+1} a$ dans la direction MC. D'un autre côté (*hip.*) les deux forces AC, BC donnent $p^n a$ ſelon BC, & les deux autres $a'C$, $b'C$ agiſſent comme $p^{n+2} a$ dans la même direction: on aura donc $(p^n + p^{n+2}) a$, $= k p^{n+1} a$, ſçavoir, $p^{n+2} - kp^{n+1}$

$+ p^n = 0$; d'où l'on voit que les quantités p forment une ſuite recurrente, dont l'echelle de relation eſt $k - 1$; donc on aura généralement $p^n = D x^n + E y^n$, D & E étant des conſtantes, n étant ici expoſant de x & y à la maniére ordinaire, & x & y étant les racines de l'équation $u^2 - k u + 1 = 0$, ce qui donne $u = \frac{k}{2} \pm \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$, & par conſéquent $x = \frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{2} - 1)}$, $y = \frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$ on aura donc en ſubſtituant ces valeurs

$$p^n = D[\frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^n + E[\frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^n.$$

Or ſoit $k = 2\ cof.\ \alpha$, on ſait que $[cof.\ \alpha + \sqrt{(cof.\ \alpha^2 - 1)}]^n = cof.\ n\alpha + \sqrt{-1} \times fin.\ n\alpha$ & $[cof.\ \alpha - \sqrt{(cof.\ \alpha^2 - 1)}]^n = cof.\ n\alpha - \sqrt{-1}\ fin.\ n\alpha$; donc $p^n = (E + E)\ cof.\ n\alpha + \sqrt{-1} \times (D - E) \times fin.\ n\alpha$ &, changeant les conſtantes, $p^n = F\ cof.\ n\alpha + G\ fin.\ n\alpha$.

Or ſi $n = 0$, on a $p^n = 2$, puiſqu'alors l'angle $n \times mCM$ devient $= 0$; donc on a $2 = F$; ſi $n = 1$, p^n devient par l'hipotéſe $= k = 2\ cof.\ \alpha$, donc $2\ cof.\ \alpha = 2\ cof.\ \alpha + D\ fin.\ \alpha$, & $D = 0$; donc nôtre formule devient généralement $p^n = 2\ cof.\ n\alpha$; de plus ſi $n = \nu$ c'eſt-à-dire ſi l'angle $n \times mCM$, auquel répond la force compoſée p^n eſt égal à deux droits, on doit avoir $p^\nu = 0$, & par conſequent $2\ cof.\ \nu\alpha = 0$, ce qui fait voir que $\nu\alpha = \frac{\pi}{4}$, & donne finalement $\alpha = \frac{\pi}{4\nu}$ donc $p^n = cof.\ \frac{n\pi}{4\nu} = 2\ cof.\ \frac{ACB}{2}$

Voila donc nôtre propoſition démontrée à la rigueur pour tous les angles commenſurables avec la demicirconférence, & en faiſant voir, ce qui eſt très-facile qu'on peut toujours prendre l'angle mCm tel que, n & ν reſtant des nombres entiers, l'angle $\frac{n\pi}{4\nu}$ ne differe que d'une quantité auſſi peti-

te

te qu'on voudra d'un angle donné, on pourra prouver ſans reſtriction & avec la derniere exactitude la vérité de cette propoſition, par une méthode trop familiére aux Géomêtres & ſurtout dans les Ecrits des Anciens, pour que je m'arrête à la dévéloper ici.

Remarque. Le Savant M. Daniel Bernoulli à le premier démontré ce principe en 1726. dans les Mémoires de l'Académie de Petersbourg, d'une maniére exacte, & fort ingénieuſe: mais la longue ſuite de raiſonnemens, & de théorêmes géométriques, & algébriques, par leſquels il eſt obligé de paſſer ſemble ne pas aſſés répondre à la ſimplicité ſi déſirable dans la démonſtration d'un principe auſſi important. C'eſt ſans doute ce qui a engagé M. d' Alembert à traiter de nouveau cette matiére dans une diſſertation particuliére qu'on trouve parmi ſes Opuſcules imprimés derniérement. Sa démonſtration déja un peu plus courte & plus ſimple que celle de M. Bernoulli, exige cependant encore ſept, ou huit théorêmes aſſés compliqués: & ſi, comme je n' en doute pas, la méthode ſyntetique que ces habiles Géomêtres y ont emploié, n' eſt pas ſuſceptible d'une plus grande ſimplification; il faudra convenir que l'analyſe dont je me ſuis ſervi contient ſeule le double avantage d' abréger & de faciliter la ſolution de ce Problême, & de nous y conduire en même tems d'une maniére toujours directe, & lumineuſe.

Scholie 2. J'ai averti au commencement de cet Article que la démonſtration que j'allois donner de la compoſition des forces étoit également concluante, & rigoureuſe, ſoit qu' on eſtimât les forces proportionelles aux maſſes aux quelles elles impriment des viteſſes égales, ou qu'on voulût les eſtimer par les viteſſes qu' elles feroient capables d'imprimer à une même maſſe: il ſuffira pour s' en convaincre de re-

lire cette démonſtration, en ſubſtituant au mot *Force* ceux de *Maſſe*, ou de *Viteſſe*.

En effet ſi on a deux maſſes $= a$, animées de viteſſes égales (*fig.* 1. *plan.* IV.) dans les directions CA, CB, & qu'on cherche la quantité & la direction de la maſſe qui animée de la même viteſſe leur feroit équilibre, on trouvera (comme dans le *lemme*) que cette direction ſera MC, & que la quantité de la maſſe ſera exprimée par a *fonct.* φ. On verra enſuite que le raiſonnement du Prob. 1. n'eſt apuïé, que ſur ces deux principes, ſavoir que $y = 2$ quand $\varphi = 0$, & $y = 0$ quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$: or ces deux propoſitions ſont évidentes pour le cas dont il s'agit, puiſque la premiére ne ſignifie autre choſe, ſi non que deux maſſes $= a$ animées d'une viteſſe quelconque ſont équilibre à deux autres maſſes auſſi $= a$, & animées de la même viteſſe dans une direction oppoſée: & la ſeconde que deux corps égaux animés de viteſſes égales en ſens contraire n'ont beſoin de l'action d'aucun autre corps pour ſe faire équilibre.

On verra de même (*lemme*) que ſi un corps quelconque C eſt ſollicité en même tems par deux viteſſes $= a$, dans les directions CA, CB, il reſtera en repos ſi on lui ſuppoſe en même tems une autre viteſſe $= a$ *fonct.* φ dans la direction MC, & qu'enfin on a poſé avec raiſon dans le prob. 1, $y = 2$ quand $\varphi = 0$, & $y = 0$ quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$; puiſqu'il eſt évident que le corps reſtera en repos, s'il eſt animé de viteſſes égales en ſens contraire, ſavoir des viteſſes $2a$ dans le premier cas, & des viteſſes a dans le ſecond.

Si l'on fait les mêmes réflexions ſur le raiſonnement géométrique du prob. 2., on verra qu'il prouve auſſi en toute rigueur, (*fig.* 3. *planche* IV.);

1.° Que ſi, l'angle DCB étant droit, on fait $DCG = \theta$, &

qu'on

qu'on imagine une masse $= m \times cof.\ \theta$ animée d'une vitesse quelconque dans la direction DC, & une autre masse $= m\ fin.\ \theta$ animée de la même vitesse selon BC, & finalement une masse $= m$, qui ait encor cette même vitesse dans la direction CG, ces trois masses se feront équilibre.

2° Qu'un corps quelconque C restera en repos, s'il est en même tems sollicité par trois vitesses différentes u, $u \times cof.\ \theta$, $u \times fin.\ \theta$ dans les directions CG, DC, BC.

III.

Du principe de l'équilibre.

Soit qu'on considére les forces comme les causes du mouvement des corps, ou simplement comme l'expression abrégée de ces mouvemens mêmes: il est toujours visible que nous ne saurions les exprimer que par une fonction du corps mû, & de la vitesse avec laquelle il se meut; la force, ou le mouvement d'une masse m animée d'une vitesse u sera donc *fonct.* (m, u); il s'agit dans cet article de trouver la valeur de cette fonction, ou ce qui revient au même, étant donnée une masse m animée de la vitesse u, il faut trouver la vitesse dont une autre masse M devroit être animée en sens contraire pour qu'il y eut équilibre.

Lemme. Si un corps C (*fig.* 5.) est animé en même tems de la vitesse V dans la direction AC, & d'une autre vitesse $= u$ selon BC perpendiculaire à AC, & que deux autres corps D & E lui résistent en même tems, savoir D selon DC avec la vitesse $= d$, & E dans la direction EC avec une vitesse $= e$, je dis que le corps C agit sur D avec toute sa vitesse u, & fait sur lui le même effet que s'il étoit animé de la seule vitesse u, & que E n'exista pas; c'est

à dire que ſi ces trois corps étoient en équilibre, cet équilibre ſubſiſtoit encor entre D & C, ſi on anéantiſoit le corps E, & la viteſſe V de C. En effet la viteſſe V du corps C étant dans la direction $A\,C$ perpendiculaire à $D\,B$, elle ne ſollicite pas plus le corps C dans la direction $C\,B$ que ſelon $C\,D$, & eſt par conſéquent incapable d'augmenter ni d'altérer ſon action ſur D. On en dira de même du corps E qui tend auſſi à donner à C une viteſſe perpendiculairement à $D\,Q$

Problème. *Trouver le rapport des viteſſes de deux maſſes qui ſe ſont équilibre.*

Soient deux corps P, Q (*fig.6.*) chacun de maſſe $= m$, & animés de la viteſſe $= u$ dans les directions contraire $P\,C$, $Q\,C$. il eſt évident que ces corps ſe feront équilibre en C. Qu'on faſſe à préſent l'angle $A\,C\,P = \theta$, & $A\,C\,B$ droit: on pourra ſubſtituer (*Art. II. Sch. 2. n. 1*) au lieu du corps P deux autres corps, ſavoir A de maſſe $= m \times cof.\ \theta$, agiſſant avec la viteſſe u dans la direction $A\,C$, & B dont la maſſe $= m \times ſin.\ \theta$ ſoit animée ſelon $B\,C$ d'une viteſſe $= u$. On pourra de même imaginer (*Art. II. ſchol. 2. n. 2.*) que le corps Q au lieu de la viteſſe u ſelon $C\,Q$ ſoit ſollicité par une viteſſe $= u \times cof.\ \theta$ ſelon $E\,C$, & par une autre viteſſe $= u \times ſin\,\theta$ dans la direction $D\,C$, ſans que l'équilibre ſoit dérangé par l'une, ni par l'autre de ces ſuppoſitions; or (*lemme précédent.*) le corps C agit ſur le corps A avec ſa ſeule viteſſe $u \times cof.\ \theta$, & l'équilibre ſubſiſtera entre m & $m \times cof.\ \theta$, ſi on ſuppoſe $m \times ſin.\ \theta$ & $u \times ſin.\ \theta$ annéantis; donc une maſſe $= m$ animée de la viteſſe $u \times cof.\ \theta$ fait équilibre à une maſſe $m \times cof.\ \theta$ animée d'une viteſſe $= u$ dans une direction contraire, & par conſéquent, puiſque $cof.\ \theta$ peut repréſenter une fraction quelconque, il il y aura toujours équilibre entre deux corps s'ils ſont animés de viteſſes réciproques à leurs maſſes. C. Q. F. T.

Co-

Corollaire. Il ſuit de là qu'une maſſe A animée de la viteſſe a fait équilibre aux maſſes $B, C, D,$ &c. animées en ſens contraire des viteſſes b, c, d, &c., ſi $Aa = Bb + Cc + Dd +$ &c. Car ſi on diviſe A dans les parties $x, y, z,$ &c. proportionelles à $Bb, Cc, Dd,$ &c. on trouvera $ax = Bb,$ &c. On voit encore que pourvû que le produit MV de la maſſe d' un corps quelconque par ſa viteſſe demeure conſtant, ſon action, ou ſa force reſtera la même quelles que ſoient M & V, & que par conſéquent cette force que nous avons dit être une fonction de M & V ſera néceſſairement une fonction de MV. Donc pour le cas préſent la force de A ſera $\Psi\, Aa = \Psi(Bb + Cc + Dd +$ &c.) comme nous l'avons fait voir : or l' action des corps $B, C, D,$ &c. doit encore s' exprimer par $\Psi\, Bb + \Psi\, Cc + \Psi\, Dd +$ &c. on aura donc l'équation $\Psi\,(Bb + Cc + Dd) = \Psi\, Bb + \Psi\, Cc + \Psi\, Dd +$ &c. qui ne ſauroit ſe vérifier en général à moins que la fonction Ψ ne ſoit telle que $\Psi\, MV = MV$. D' où l' on tire que la force d' un corps en mouvement eſt toujours comme le produit de ſa maſſe par la viteſſe : conclusion que le dévélopement de la formule générale $\Psi\,(m, u\ cof.\ \theta) = \Psi\,(u, m\ cof.\ \theta)$ tirée du Problême précédent nous auroit également fourni.

Scholie 1. La démonſtration que je viens de donner du principe de l' équilibre, pourroit paroître indirecte, & défectueuſe, parceque je la déduis d' une propoſition en apparence plus compoſée ; mais peut-être en jugera-t-on autrement ; ſi l' on réfléchit qu' une vérité ne ſauroit être ſimple à nôtre égard, qu' autant que nous la concevons moins confuſement, & avec plus de facilité, & que ce n' eſt que dans le cas ſeul, où un corps eſt animé de deux viteſſes dans des directions perpendiculaires entr' elles, qu' on voit clairement (*lemme*) qu'elles ne ſont pas modifiées l' une par l' autre. On rencontre d' ailleurs trés-fréquemment en géo-

métrie

métrie des exemples de paſſages ſemblables, & (pour citer ici quelque choſe d'analogue à mon ſujet) de très-grands hommes n'ont pas fait difficulté de tirer l'équilibre du levier droit de celui du levier courbe. Quoiqu'il en ſoit au reſte de la méthode que j'ai ſuivie, il eſt au moins certain qu'elle eſt à l'abri de toutes les difficultés qu'on pouvoit former contre les preuves, ſur les quelles cette propoſition étoit apuïée juſqu'à préſent; preuves qui ont paru ſi peu convaincantes, que pluſieurs habiles Géomêtres leur on préféré celles qu'on tire de l'expérience; & que quelques Philoſophes ont oſé avancer avec confiance que la méthode des Géomêtres étoit abſolument inſuffiſante pour fournir une démonſtration de ce principe. *

Scholie 2. Il eſt viſible que, puiſque deux maſſes animées de viteſſes en raiſon réciproque ſe font équilibre, ſi une maſſe A animée de la viteſſe a ſoutient un effort quelconque, comme par exemple celui d'un reſſort, la maſſe B avec la viteſſe $\frac{Aa}{B}$ fera équilibre à la même force: & que par conſéquent l'effet d'une force p ſur deux corp A & B ſera de leur donner des viteſſes réciproques à leurs maſſes. C'eſt ſur cette propoſition qu'eſt fondée la formule générale $p\,dt = m\,du$; car quoiqu'il ſoit très permis de ne conſidérer, avec M. d'Alembert, la quantité p que comme un ſimple coéficient de dt, ce n'eſt cependant que d'après le principe que nous venons d'établir qu'on peut s'aſſûrer que ce coéficient doit être le même à chaque inſtant, quand une même force agit ſur deux maſſes différentes.

Corollaire général. On peut conclure de tout ce que nous venons de démontrer, que les propoſitions qui font l'objet de la Méchanique ne ſont pas moins certaines, & moins

* *Recherches ſur les élémens de la matiére par M. Formey, &c.*

moins évidentes que celles que la Géométrie, où l'Algébre nous enſeignent : Car cette ſcience n'a aucun Problême, auquel on ne puiſſe appliquer avec ſuccès le principe général qu'on trouve à la tête de la ſeconde partie du Traité de Dynamique de M. d'Alembert ; or il eſt viſible que ce théoréme ne ſuppoſe abſolument que les principes que nous avons établi ci-deſſus d'une maniére exacte, & entiérement rigoureuſe.

IV.

Du Levier.

LA compoſition des forces ſuffit comme l'on ſait pour démontrer l'équilibre du levier, & réciproquement cette derniére propoſition une fois prouvée, on peut facilement en déduire la compoſition des forces. Elle nous fournit d'ailleurs une démonſtration fort-ſimple du principe des viteſſes virtuelles, qu'on peut avec raiſon conſidérer comme le plus fécond & le plus univerſel de la Méchanique : tous les autres en effet s'y reduiſent ſans peine, le principe de la conſervation des forces vives, & généralement, tous ceux que quelques Géomètres ont imaginés pour faciliter la ſolution de pluſieurs Problêmes, n'en ſont qu'une conſéquence purement géométrique, ou plus toſt ne ſont que ce même principe réduit en formule. La démonſtration de l'équilibre du levier que je vais donner ici, ſera donc une nouvelle preuve des principes que j'ai démontré directement dans les Articles précédens.

LEMME. Si (*fig.*7.) deux forces égales $= p$, (comme par exemple deux poids égaux) agiſſent dans des directions paralelles ſur le levier $A\,B$ aux points A & B également éloignés du point fixe C. Il eſt d'abord évident que le le-

levier ſera en équilibre autour du point C, puiſque toutes choſes ſont égales de part, & d'autre: je dis de plus que le point C ſoutiendra le même effort, que ſi les forces $p + p$ étoient immédiatement appliquée en C; car cet effort, ou la force qui leur feroit équilibre ſi elle agiſſoit en C dans une direction contraire, ne peut dépendre que de la quantité p, & ſi l'on veut de la diſtance CA que j'appelle x; cette force ſera donc exprimée par *fonct.* (p, x), qu'on démontrera $= p$ *fonct.* x, comme dans le lemme de *l'Art. I.*

Qu'on faſſe à préſent $CA = AE = BD$, & qu'on imagine quatre forces $= p$ appliquées en E, D, C, C, l'action de deux premiéres ſur le point C ſera $= p$ *fonct.* $2x$ par l'hiporéſe, & l'action des deux derniéres ſera évidemment $= 2p$; or (*hip.*) les forces E & C ſont équivalentes à une force p *fonct.* x appliquée en A; & C, D ſont la même choſe que p *fonct.* x agiſſant en B, & par conſéquent les forces A, B font ſur C l'effort $= p$ $(fonct.\ x)^2$: on a donc l'équation $p\ (fonct.\ x)^2 = 2p + p$ *fonct.* $2x$, qui ne ſauroit ſe vérifier en général à moins que *fonct.* x ne ſoit conſtante, comme il eſt aiſé de s'en convaincre par le calcul, & puiſque quand $x = 0$ on doit avoir *fonct.* $x = 2$, on aura généralement *fonct.* $x =$ *fonct.* $2x =$ *conſt.* $= 2$; il ſuit de là qu'une force $2p$ fait ſur une verge quelconque le même effet que deux forces p appliquées ſur la même verge à quelles diſtances que ce ſoit du point où elle agit pourvu que ces diſtances ſoient égales.

PROBLEME. *Trouver l'action d'une force quelconque* p *appliquée en* A *pour mouvoir le levier* E C, *autour de* C (*fig.* 8. *planche* IV.).

Cette action ne peut être exprimée que par une fonction de p & de la diſtance $AC = x$, j'appelle cette fonction $\xi\ (p, x)$ & on verra comme ci-devant qu'elle ſera $= p\ \xi\ x$:

qu'on

qu'on faſſe à préſent $AD = AE = \zeta$, il eſt viſible (*lemme*) que deux forces $= \frac{p}{2}$ appliquées en E & D font ſur la verge le même effet que p appliquée en A: or (*hip.*) l'action de la premiére ſur C, ſera $\frac{p}{2} \xi (x + \zeta)$, & l'action de la ſeconde $\frac{p}{2} \xi (x - \zeta)$: on aura donc l'équation

$$p \xi x = \frac{p}{2} \xi (x + \zeta) + \frac{p}{2} \xi (x - \zeta), \text{ ou}$$

$2 \xi x = \xi (x + \zeta) + \xi (x - \zeta)$ qui doit être vraie quelle que ſoit ζ: ſi l'on fait donc ζ infiniment petit, & qu'on dévélope la fonction ξ par les méthodes connues, on trouvera ($\xi' x$, $\xi'' x$, $\xi''' x$ &c. dénotant ſelon l'uſage ordinaire les différences ſucceſſives de ξx diviſées par dx)

$$\xi (x + \zeta) = \xi x + \frac{\zeta \xi' x}{2} + \frac{\zeta^2 \xi'' x}{2 \cdot 3} + \frac{\zeta^3 \xi''' x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{&c.}$$

$$\xi (x - \zeta) = \xi x - \frac{\zeta \xi' x}{2} + \frac{\zeta^2 \xi'' x}{2 \cdot 3} - \frac{\zeta^3 \xi''' x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{&c.}$$

& par conſéquent $2 \xi x = \xi (x + \zeta) + \xi (x - \zeta)$

$$= 2 \xi x + \frac{\zeta^2 \xi'' x}{3} + \frac{\zeta^4 \xi^{IV} x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{\zeta^6 \xi^{V} x}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{&c.}$$

& réduiſant, $\frac{\zeta^2 \xi'' x}{3} + \frac{\zeta^4 \xi^{IV} x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{\zeta^6 \xi^{V} x}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{&c.} = 0$: diviſant cette équation par $\frac{\zeta^2}{3}$, on trouvera ſéparément $\xi'' x = 0$, $\frac{\zeta^2 \xi^{IV} x}{4 \cdot 5} = 0$, &c.: la premiére donne en multipliant par dx, & intégrant $\xi' x = H$, & multipliant, & intégrant de nouveau $\xi x = Hx + K$: or comme la force p n'agit point ſur le levier pour le mouvoir quand elle eſt appliquées en C, ξx doit être $= 0$ quand $x = 0$: on

a donc généralement $K = o$, & $\xi x = Hx$, & par conſéquent ſi deux forces p & P ſont appliquées aux deux extrémités du levier AB, ſçavoir p en A à la diſtance $CA = x$ du point d'apui, C & P à la diſtance $CB = y$ du même point, leurs actions pour mouvoir le levier en ſens contraire, que nous avons exprimées par $p\xi x$, & $P\xi y$, ſeront HPx, & Hpy, & il y aura par conſéquent équilibre, quand $Hpx = HPy$, ou $px = Py$, ou bien $p : P = y : x$. C. Q. F. D.

ADDITION

A LA PREMIERE PARTIE DES

RECHERCHES SUR LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON

Imprimées dans le Volume précédent.

PAR M. DE LA GRANGE.

M. D'Alembert aïant fait l'honneur à ma ſolution du Problême des *Cordes vibrantes*, de l'attaquer ſur quelques points, par un Ecrit particulier imprimé dans le premier Tome de ſes *Opuſcules Mathématiques*; je vais ajouter ici de nouveaux éclairciſſemens ſur l'analiſe de cette ſolution, qui ſerviront en même tems de réponſe aux objections de cet illuſtre Géomètre, & de confirmation à ma Théorie.

I.

La ſolution en queſtion n'eſt qu'une application de la formule trouvée dans le Chap. III., pour le mouvement d'un fil chargé d'un nombre quelconque $m-1$ de poids, au cas ou l'on ſuppoſe ce nombre infini; c'eſt cette application qui a paru à M. d'Alembert ſuſceptible de pluſieurs difficultés.

1.° La formule, dont je viens de parler, étant compoſée d'une ſuite de termes qui renferment ſucceſſivement les *ſinus* de tous les arcs $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ &c. juſqu'à $\frac{(m-1)\pi}{4m}$; j'ai pris dans le cas de $m = \infty$ ces arcs mêmes pour les valeurs de leurs *ſinus*. M. d'Alembert m'objecte que cela n'eſt permis que pour tout angle

$\frac{r\pi}{4m}$, r étant un nombre fini, & nullement pour les angles $\frac{(m-1)\pi}{4m}$, $\frac{(m-2)\pi}{4m}$ &c. Cette objection prise en elle-même eſt ſolide & ſans réplique ; mais elle perd toute ſa force ſi on la conſidére par rapport à la formule dont il s'agit ; car je vais prouver directement & invinciblement que les expreſſions ſin. $\frac{\pi}{4m}$, ſin. $\frac{2\pi}{4m}$ &c. ſin. $\frac{(m-1)\pi}{4m}$ doivent être changées en $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, &c. $\frac{(m-1)\pi}{4m}$ dans le cas de $m = \infty$.

En remontant à l'analiſe du Chap. cité, il eſt aiſé de trouver que toutes ces expreſſions viennent de l'expreſſion générale $\pm 2\sqrt{e} \times$ ſin. $\frac{v\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$ (*Art. XXI.*), qui eſt celle du coéficient R (*Art. XIX.*), v étant un nombre quelconque entier depuis o juſqu'à m. Tout ſe réduit donc à prouver que, quand $m = \infty$, $R = \pm 2\sqrt{e} \times \frac{v\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$.

Pour y parvenir je remarque d'abord que $R^2 = e(k-2)$, (*Art. XIX.*) ; je vois de plus que la valeur de k dépend de cette condition que $M^\mu = \frac{a^\mu - b^\mu}{a-b}$ ſoit $= o$, lorſque $\mu = m$, a étant $= \frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$, & $b = \frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$, (*Art. cité*) ; c'eſt-à-dire de l'équation

$$\frac{[\frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^m - [\frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^m}{2\sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}} = o$$

ou

ou ſimplement

$$\left[\frac{k}{2}+\sqrt{\left(\frac{k^2}{4}-1\right)}\right]^m-\left[\frac{k}{2}-\sqrt{\left(\frac{k^2}{4}-1\right)}\right]^m=0.$$

Or $\sqrt{e}=m\times\frac{H}{T}$, (*Art. XXXV.*), $\frac{H}{T}$ étant une quantité finie; donc $k=2+\frac{R^2}{e}=2+\frac{R^2T^2}{m^2H^2}$; mais R doit être auſſi une quantité finie, comme il eſt aiſé de le voir par la nature même du calcul, donc $\frac{R^2T^2}{m^2H^2}$ ſera une quantité infiniment petite du ſecond ordre dans le cas où $m=\infty$.

Qu'on ſuppoſe $\frac{RT}{H}=f\sqrt{-1}$, enſorte que $k=2-\frac{f^2}{m^2}$, & qu'on mette cette valeur de k dans l'équation ci-deſſus, il viendra

$$\left[1-\frac{f^2}{m^2}+\sqrt{\left(-\frac{f^2}{m^2}+\frac{f^4}{4m^4}\right)}\right]^m-$$
$$-\frac{f^2}{m^2}-\sqrt{\left(-\frac{f^2}{m^2}+\frac{f^4}{4m^4}\right)}\Bigg]^m=0;$$

équation, qui, en négligeant ce qui ſe doit négliger à cauſe de $m=\infty$, ſe réduit à celle-ci

$$\left(1+\frac{f}{m}\sqrt{-1}\right)-\left(1-\frac{f}{m}\sqrt{-1}\right)^m=0.$$

Or on ſait qu'une expreſſion telle que

$$\frac{\left(1+\frac{f}{m}\sqrt{-1}\right)^m-\left(1-\frac{f}{m}\sqrt{-1}\right)^m}{2\sqrt{-1}}$$

devient, dans le cas de $m=\infty$, égale à ſin. f; donc l'équation qu'on vient de trouver eſt équivalente à $2\sqrt{-1}\times$ ſin. $f=0$, ſavoir à ſin. $f=0$; ce qui donne $f=\frac{\nu\pi}{2}$, ν étant un

nombre

nombre quelconque entier ; donc $\frac{RT}{H} = \frac{v\pi}{2} \times \sqrt{-1}$, donc $R = \frac{H}{T} \times \frac{v\pi}{2} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{e} \times \frac{v\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$.

2.° M. d'Alembert prétend que j'ai tort de regarder en général l'expreſſion ſin. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} \pm \frac{mHt}{T}\right)$ comme égale à zéro, lorſque $m = \infty$ (*Voïés Art. XXXVIII.*).

Je conviens que je ne me ſuis pas exprimé aſsès exactement, en diſant que $m\left(\frac{x}{a} \pm \frac{Ht}{T}\right)$ eſt toujours égal à un nombre entier, parceque $m = \infty$; mais ma propoſition n'en eſt pas moins vraie pour cela. Car on voit par *l'Art. XXXVI.* que $\frac{mx}{a}$ eſt mis au lieu de μ qui eſt de lui même un nombre entier ; & à l'égard de $\frac{mHt}{T}$, il ſera auſſi un nombre entier, en regardant $\frac{Ht}{T}$ comme commenſurable avec $\frac{x}{a}$; c'eſt-à-dire en ſuppoſant $\frac{Hdt}{T} = \frac{dx}{a}$; ſuppoſition qui eſt évidemment permiſe, & qui n'apportera pas la moindre limitation à ma ſolution.

3.° M. d'Alembert attaque auſſi les calculs que j'ai fait dans le Chap. VI. pour trouver d'une maniére directe & générale la ſomme d'une ſuite infinie, telle que ſin. $\varphi \times$ ſin. $\theta +$ ſin. $2\varphi \times$ ſin. $2\theta +$ *&c.*

La méthode que j'ai emploïée dans cette recherche eſt très-ſimple ; après avoir transformé la ſuite propoſée en deux autres compoſées de ſimples *coſinus*, j'ai mis à la place de chacun de ces *coſinus* ſon expreſſion exponentielle imaginaire, & j'ai cherché la ſomme de ſuites réſultantes, par la méthode ordinaire de la ſommation des ſeries géo-

géométriques, en ſuppoſant le dernier terme nul comme on le fait communement lorſque la ſerie va à l'infini. M. d'Alembert m'objecte que cette ſuppoſition n'eſt point exacte, parceque dans la ſuite $e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}}$ &c. le dernier terme eſt $e^{n\sqrt{-1}}$ quantité qui eſt infinie au lieu d'être zéro.

Or je demande ſi toutes les fois que dans une formule algébrique, il ſe trouvera par exemple une ſerie géométrique infinie, telle que $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. on ne ſera pas en droit d'y ſubſtituer $\frac{1}{1-x}$, quoique cette quantité ne ſoit réellement égale à la ſomme de la ſerie propoſée qu'en ſuppoſant le dernier terme x^n nul. Il me ſemble qu'on ne ſauroit conteſter l'exactitude d'une telle ſubſtitution ſans renverſer les Principes les plus communs de l'Analiſe.

M. d'Alembert apporte encore un argument particulier pour prouver que la ſomme de la ſuite cof. x + cof. $2x$ + cof. $3x$ + &c. *à l'infini* ne peut pas être $-\frac{1}{2}$ comme je l'ai trouvée par mon calcul. Il ſuppoſe $x = 45°$, & il trouve que cette ſuite devient $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, -1, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $+1$ &c. après quoi elle recommence: *or* (dit-il) *la ſomme de cette ſuite finie eſt*, *ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0, *ou* -1, *ou* $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ *ſelon qu'on y prendra plus ou moins de termes. Donc la ſomme de la ſuite entiére eſt auſſi ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0, *ou* -1, *ou* $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ſelon le nombre des termes qu'on y prendra, quel que ſoit d'ailleurs ce nombre de termes fini ou infini, & cette ſomme ne ſera point*

$= 0$,

$= 0$, *à moins que* $m \times 45°$ *ne soit* $=$ *à une infinité de fois la circonférence, ou* $135° +$ *une infinité de fois la circonférence.*

Je répons qu'avec un pareil raisonnement on soutiendroit aussi que $\frac{1}{1+x}$ n'est point l'expression générale de la somme de la suite infinie $1 - x + x^2 - x^3 +$ *&c.* parcequ'en faisant $x = 1$ on a $1 - 1 + 1 - 1 +$ *&c* ce qui est ou 0, ou 1, selon que le nombre des termes qu'on prend est pair, ou impair, tandis que la valeur de $\frac{1}{1+x}$ est $\frac{1}{2}$. Or je ne crois pas qu'aucun Géomètre voulût admettre cette conclusion.

II.

Quand même les objections auxquelles nous venons de répondre seroient fondées, M. d'Alembert ne pourroit pas se dispenser de convenir que les résultâts de ma Théorie sont nécessairement exacts dans les cas où ces résultâts s'accordent avec ceux qu'il a trouvés par la sienne; ce qui arrive quand la corde a une certaine figure au commencement du mouvement. Or toutes les objections que M. d'Alembert m'a faites jusqu'ici sont absolument indépendantes de la figure initiale de la corde; donc, puisque ses objections n'empêchent point ma solution d'être exacte lorsque cette figure a certaines conditions, elles ne l'empêcheront pas non plus d'être exacte en général, quelle que soit la figure initiale de la corde.

Ce raisonnement est simple, & ne peut pas avoir echappé au savant Géometre dont nous parlons; aussi s'est-il attaché dans la suite à combattre seulement la généralité de ma solution, & à la borner comme la sienne aux courbes assujetties à la loi de continuité. Il se fonde sur ce que

j'ai

j' ai fait uſage de la méthode de M. Bernoulli pour trouver la valeur d' une quantité qui dans certains cas eſt $\frac{0}{0}$, méthode qui ſuppoſe que la quantité propoſée ſoit une fonction algebrique.

Mais je le prie de faire attention, que dans ma ſolution, la détermination de la figure de la corde à chaque inſtant dépend uniquement des quantités Z & V, leſquelles n' entrent point dans l' opération dont il s' agit. Je conviens que la formule à laquelle j' applique la méthode de M. Bernoulli eſt aſſujettie à la loi de continuité ; mais il ne me paroit pas s' enſuivre, que les quantités Z & V qui conſtituent le coéficient de cette formule le ſoient auſſi, comme M. d' Alembert le prétend.

III.

Je viens maintenant aux difficultés que M. d' Alembert a faites contre la Théorie de M. Euler, & qui peuvent auſſi s' appliquer à la mienne : ce ſont celles qui regardent la conſtruction que M. Euler a donnée pour trouver la figure de la corde à chaque inſtant ; conſtruction qui eſt préciſément la même que celle qui réſulte de ma Théorie. *Voïés l' Art. XL.*

1.° M. d' Alembert prétend que cette conſtruction ne peut ſatisfaire à l' équation de la corde vibrante $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ à moins que la courbe initiale $A\ M\ B$ (*fig. A plan.* 3.) ne ſoit telle que les fleches $r''\omega$, $r'o'$ de deux arcs conſécutifs, & infiniment petits $\rho''R'$, $R'\rho'$, ſoient égales ; où, ce qui eſt la même choſe, que la courbure au point r'' ſoit la même que le courbure au point r' infiniment proche ; ce qui exclut déja toutes le courbes dans leſquelles le rayon

oſculateur change bruſquement en quelque point. Voici le raiſonnement de M. d'Alembert.

Soit pris (dit-il dans le §. VII. du Mémoire *ſur les vibrations de Cordes ſonores* imprimé dans le même volume) $AP = x$ (fig. citée) $PT = t$ *ſur l'axe* AB; *donc regardant* x *comme conſtante*, *& faiſant* $PT' = PT$, $Tt = t\theta = T't' = t'\theta' = dt$, *on aura* $AT = x + t$, $At = x + t + dt$, $A\theta = x + t + 2dt$, $AT' = x - t$, $At' = x - t - dt$, $A\theta' = x - t - 2dt$. *Or* y *étant égale, ſuivant la conſtruction de M. Euler, à la demie ordonnée* TR *qui répond à* $x + t$ *plus à la demie ordonnée* T'R' *qui répond à* $x - t$, *il s'enſuit que* d^2y *en ne faiſant varier que* t *eſt* $\frac{\theta\rho - tr - (tr - TR)}{2} + \frac{\theta'\rho' - t'r' - (t'r' - T'R')}{2}$; *donc* $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{\theta'\rho' + T'R' - 2t'r'}{2It^2} =$ (*en menant les cordes* $R\rho$, $R'\rho'$) $\frac{-ro - r'o'}{Tt^2}$. *Maintenant faiſons* t *conſtante &* $= PT$, *&* x *variable*; *prenons* $Pp = p\pi = dx$, *& ſuppoſons* $dx = Tt$, *ce qui eſt évidemment permis*, *nous aurons* 1.° $At = x + t + dx$, $A\theta = x + t + 2dx$; 2.° *Faiſant* $T't'' = t''\theta'' = Pp = Tt$, *nous aurons* $At'' = x + dx - t$, $A\theta'' = x + 2dx - t$; *donc*, *menant la corde* $R'\rho''$, *on trouvera que* d^2y, *en ne faiſant varier que* x, *eſt* $-ro - r''\omega$; *donc* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-ro - r''\omega}{Pp^2}$. *Il faut donc*, *pour que* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *ſoit égal à* $\frac{d^2y}{dt^2}$, *que* $r'o' = r''\omega$.

Je répons que, dans l'équation générale $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, d^2y (en ne faiſant varier que x) eſt la différence ſeconde de trois ordonnées conſécutives, dont l'une répond à l'abſciſſe

$x - dx$, l'autre à l'abſciſſe x, la troiſiéme à l'abſciſſe $x + dx$, & que d^2y (en ne faiſant varier que t) eſt la différence ſeconde de trois ordonnées répondantes à la même x, la premiére pour le tems $t - dt$, la ſeconde pour le tems t, la derniére pour le tems $t + dt$; comme M. d'Alembert lui même le dit dans le §. X.; qu'ainſi la valeur de d^2y (en ne faiſant varier que t) ſera, ſuivant la conſtruction de M. Euler & la mienne, $\frac{tr - TR - (TR - y\zeta)}{2}$ [en tirant l'ordonnée $y\zeta$ telle que $yT = Tt$] $+ \frac{t'r' - T'R' - (T'R' - t''r'')}{2} = \frac{tr + y\zeta - 2TR}{2} + \frac{t'r' + t''r'' - 2T'R'}{2} =$ (en menant les cordes ζr, $r''r'$) $\frac{-Rx - R'x'}{2}$; & que la valeur de d^2y (en ne faiſant varier que x) ſera $\frac{tr - TR - (TR - \zeta y)}{2} + \frac{t''r'' - T'R' - (T'R' - t'r')}{2} = \frac{-Rx - R'x'}{2}$; donc $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-Rx - R'x'}{2Tt^2}$, $\frac{a^2y}{dx^2} = \frac{-Rx - R'x'}{2Pp^2} =$ (en ſuppoſant $Tt = Pp$) $\frac{-Rx - R'x'}{2Tt^2}$; & l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ devient identique.

2.° M. d'Alembert prétend enſuite que la courbure doit être nulle aux extrémités A & B. *Car ſoit* (dit-il, dans le §. VIII.) PT, & PT′ = AP, *on a* (*en ne faiſant varier que* t) $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{l's' - 2L'Q'}{2Tt^2} = \frac{-ro + Q'q'}{Tt^2}$, *& non pas* $\frac{-ro - Q'q'}{Tt^2}$ *parceque* $l's' - 2Q'L' = -2Q'q'$, *& que* $l's'$ *&* $Q'L'$ *doivent être priſes négativement par leur poſition, & par la conſtruction de M. Euler.*

Maintenant, en ne faisant varier que x, *on aura* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-ro-Qq}{dt^2}$; *donc* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *ne sera pas* $= \frac{d^2y}{dt^2}$, *si la courbure n'est pas nulle en* A.

Ce raisonnement est semblable à celui, auquel je viens de répondre, & se refute par conséquent de la même maniére. En effet la valeur de $\frac{d^2y}{dt^2}$ au point A n' est pas $\frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{l's' - 2L'Q'}{2Tt^2}$, comme le suppose M. d'Alembert, mais $\frac{tr+ty-2TR}{2Tt^2} + \frac{L'Q'+QL}{2Tt^2} = \frac{Rx}{2Tt^2}$, parceque $L'Q'$ étant égale, & de position contraire à QL, suivant la construction de M. Euler & la mienne, on a $L'Q' + LQ = 0$; de même la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est $\frac{tr+ty-2TR}{2Tt^2} + \frac{LQ+L'Q'}{Tt^2} = \frac{Rx}{2Tt^2}$, & non pas $\frac{-ro-Qq}{Tt^2}$; donc $\frac{d^2y}{dt^2}$ est toujours $= \frac{d^2y}{dx^2}$ quelle que soit la courbure en A.

3.° Autre argument de M. d'Alembert pour prouver que la courbure doit être uniforme dans chaque portion infiniment petite de la courbe AMB. Il donne à la différence dt deux valeurs différentes à volonté, & il trouve que pour que la valeur de $\frac{d^2y}{dt^2}$ soit toujours la même & égale à celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, il faut que les fléches ro, qui appartiennent à différens arcs infiniment petis $Rr\rho$ soient toujours proportionelles aux quarrés des portions correspondantes $T\theta$ de l'axe; ce qui ne peut avoir lieu, que dans des arcs de courbure uniforme, comme M. d'Alembert le démontre fort au long dans le §. X. de son Mémoire.

A cela je répondrai qu'il n'eſt nullement néceſſaire, pour la généralité de ma ſolution, que les différences dt demeurent indeterminées & puiſſent être ſuppoſées quelconques ; comme je l'ai déja remarqué plus haut (*n.* 2 *Art. I.*). Il me ſuffit qu'on prenne toujours $dt = \frac{T}{Ha} dx$, ou, en ſuppoſant avec M. d'Alembert $\frac{Ha}{T} = 1$, $dt = dx$; car, comme dx peut être pris auſſi petit qu'on voudra, il eſt évident qu'on n'en trouvera pas moins la figure de corde au bout d'un tems quelconque donné t.

4.° M. d'Alembert apporte de plus une raiſon métaphyſique pour faire voir en général que le mouvement de la corde ne peut être repréſenté par aucune conſtruction quand la courbure fait un ſaut en quelque point M de la courbe initiale. *C'eſt* (dit-il dans le §. *XI.*) *que dans ce cas il y a proprement au point* M *deux rayons oſculateurs différens, quoique coincidens quant à la direction, dont l'un appartient à la portion de courbe MR, & l'autre à la portion de courbe* MA. *Or la force accélératrice en chaque point de la corde étant en raiſon inverſe du rayon oſculateur, lequel de deux rayons communs au point* M *doit ſervir à déterminer la force en ce point* M ? *C'eſt ce qu'il eſt impoſſible de fixer, & il l'eſt par conſéquent auſſi de réſoudre le Probleme dans ce cas-là. En effet ſuppoſons que la figure initiale de la corde ſoit compoſée de deux différentes courbes ainſi reunies en* M ; *je demande quelle eſt la force acceleratrice du point M, lorſque la corde commence à ſe mouvoir ?*

La réponſe eſt bien ſimple ; la courbe AMB étant continue, il eſt clair qu'on peut toujours prendre, à quelque point R que ce ſoit, trois ordonnées conſécutives, & infiniment proches zy, RT, rt ; or les différences de ces trois ordonnées conſtituent la valeur de d^2y, à laquelle la force accélératrice du point du milieu R eſt néceſſairement pro-

por-

portionelle par la nature du Problême, quel que ſoit d'ailleurs le rayon oſculateur en ce point.

5.° M. d'Alembert fait voir dans le même §., que ſi la courbure n' etoit pas nulle en B, il s'enſuivroit de la conſtruction de M. Euler, & de la mienne qu' il y auroit un ſaut dans le $\frac{d^2y}{dt^2}$ qui répond a un point quelconque M lorſque $t = PT$, ſavoir que ſa force accélératrice paſſeroit bruſquement, & ſans dégrés de la valeur qu'elle a en cet inſtant à une autre valeur, qui différeroit de celle-là d' une quantité du même ordre; ce qui ſeroit contraire à la nature de la force accélératrice.

Je réponds que cet inconvénient auroit lieu en effet, ſi les forces accélératrices qui agiſſent ſur chaque point de la corde à chaque inſtant avoient une valeur finie; mais dans nôtre cas ces forces ſont toujours infiniment petites, puiſque on ſuppoſe dy infiniment petit, par raport à dx; par conſéquent l' accroiſſement de la force du point M ſera auſſi infiniment petit; ce qui n' a plus rien de choquant.

6.° M. d' Alembert ajoute encore une nouvelle conſidération, pour prouver que le mouvement de la corde ne peut être ſoumis à aucun calcul analitique quand la courbure eſt finie en A, & B. *Qu' on ſe repréſente* (dit-il §. XII.) *la corde au commencement de ſon mouvement; ſi la courbure n'eſt pas nulle en* B *le rayon oſculateur y ſera donc fini; par conſéquent la force accélératrice y ſera auſſi finie, & tendra à donner du mouvement au point* B; *cependant ce point étant fixement arrêté, eſt incapable de ſe mouvoir; ainſi d'un côté* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *eſt finie lorſque* $x = AB$, *& lorſque* $t = 0$, & *de l'autre* $\frac{d^2y}{dt^2}$ *eſt toujours* $= 0$ *au point* B *quelle que ſoit la valeur de* t..... *La nature en ce point arrête, pour ainſi dire, bruſquement le calcul; on a deux forces accélératrices voiſines, &*

infini-

infiniment peu différentes ; l'une au point B, l'autre au point infiniment proche de celui-là ; la seconde de ces forces produit un mouvement, la premiére n'en sauroit produire, quoique par l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ *elle paroisse devoir en produire un, lorsque* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *n'est pas = o ; ainsi la loi du mouvement n'étant pas continue pour tous les points de la courbe ne peut être représentée avec exactitude par l'équation dont il s'agit.*

A cela je réponds 1.° Qu'il ne me paroit nullement exact de dire que la force accélératrice est finie en *B*, & tend à donner du mouvement à ce point. Car il est facile de voir que les points *A* & *B*, par où la corde est attachée, ne sont réellement sollicités par aucune force accélératrice perpendiculaire à l'axe ; mais simplement tirés par la force de tension de la corde, laquelle agit presque dans la direction même de l'axe, & qui doit être détruite par l'hypotése du probléme. 2.° Sans m'embarrasser de la valeur, quelle qu'elle soit, du rayon osculateur en *A* & *B* je considére que le $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui répond exactement à ces points est toujours nul de lui même, suivant ma construction, comme on l'a fait voir plus haut. D'où je conclus que le calcul est parfaitement d'accord avec la nature.

Voilà les principales objections de M. d'Alembert sur la construction que M. Euler & moi avons donnée pour le mouvement des cordes vibrantes. Il me paroit d'y avoir pleinement satisfait, & d'avoir montré en même tems que cette construction a toute la généralité dont la question est susceptible.

Quant aux autres difficultés que M. d'Alembert propose dans le même *Mémoire* contre la Théorie de M. Euler, & qui sont tirées de la considération des fonctions algébriques ; il est clair qu'elles ne touchent point à ma solution ; mais

ſervent ſeulement à confirmer ce que j'avois déja avancé (*Art. XV.*) ſur l'inſuffiſance de la méthode de ces deux grands Géomètres, pour conduire à une Théorie exacte & complette du mouvement des cordes ſonores.

Au reſte, quelque générale que ſoit la ſolution que j'ai trouvée de cet important Problême, je ſuis bien éloigné de penſer qu'elle puiſſe donner le vrai mouvement de la corde, quand ſa figure initiale eſt compoſée de deux, ou pluſieurs lignes qui font des angles entr'elles; car il eſt évident que l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ne ſauroit avoir lieu dans ces cas. Mais il eſt certain d'autre part, & l'on peut même s'en aſſurer par l'expérience, que la roideur de la corde, & l'action réciproque de toutes ſes parties l'obligeront de prendre auſſi-tôt une figure courbe continue, à laquelle on pourra par conſéquent appliquer notre conſtruction générale de l'*Art. XLV.* Les vibrations qui ſuivront les premiers inſtants, & qui ſont les ſeules qu'il nous importe de connoître, ſeront donc toujours réguliéres & iſochrones, & leur durée ne dépendra en aucune maniére de la figure primitive, mais ſeulement de la tenſion, de la longueur, & de la groſſeur de la corde, comme on l'a démontré (*Art. XLVI.*); ce qui ſuffit pour expliquer, pourquoi une corde frappée d'une maniére quelconque rend toujours le même ſon.

ÉCLAIRCISSEMENS

Pour le Mémoire ſur les quantités imaginaires inſéré dans le premier Volume

PAR Mr. DE FONCENEX.

J'Ai donné dans le premier Volume un Ecrit, où je traite aſsès au long des logarithmes des quantités négatives. Cette matiére, qui avoit déja été le ſujet d'une controverſe fort-vive entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli, a été ſavamment approfondie par le célébre Mr. Euler dans le *Mémoires de l'Académie Royale de Pruſſe pour l'année* 1749. Cet habile Géomètre y fait voir par une méthode, dont j'ai taché de donner un précis dans l'écrit dont il s'agit, que les nombre poſitifs ont non ſeulement un logarithme réel, mais encore une infinité d'autres qui ſont imaginaires & ſemblables à ceux qu'il trouve pour les nombres négatifs corréſpondans : c'eſt ainſi que ce grand Géomètre ſatisfait à pluſieurs objections très-fortes que Mr. Bernoulli faiſoit contre le ſentiment de Mr. Leibnitz, & que ce dernier avoit plutôt éludées que réſolues.

Cependant la plus grande preuve de Mr. Bernoulli, tirée de la quadrature de l'hyperbole, étoit encore dans toute ſa force : c'eſt pourquoi, quand j'entrepris de traiter cette matiére, je crus devoir chercher dans l'hyperbole même une formule générale qui donnât tout d'un coup les logarithmes des quantités poſitives & négatives : un calcul aſsès ſimple me la fit découvrir, & elle s'eſt trouvée parfaitement ſemblable à celle de Mr. Euler ; mais les concluſions que j'ai tiré de cette formule, & de pluſieurs autres conſidérations que j'ai détaillé dans mon Mémoire, ſont un peu différentes de celles de Mr. Euler. D'abord il me paroiſſoit

prouvé que les logarithmes des nombres négatifs pouvoient à la rigueur être considérés comme réels de même que ceux des nombre positifs, & que par conséquent la logarithmique a deux branches, l'une au-dessus, & l'autre au-dessous de l'axe; mais il me sembloit que ces deux branches n'étoient pas liées par la loi de continuité, ou au moins que les raisons qui l'auroient pût faire croire n'étoient pas convaincantes.

J'apprens qu'avant que Mr. Euler eusse publié ses recherches sur cette matiére, elle avoit déja été le sujet d'une dispute par lettres entre Mr. D'Alembert & lui. Dans les Opuscules que ce grand Géomètre vient de donner au Public, on trouve un savant Mémoire, dans lequel il établit sur de nouvelles preuves, que les logarithmes des quantités négatives sont réels, contre le sentiment de Mr. Euler: enfin il m'a fait l'honneur d'examiner dans une Ecrit particulier la théorie que j'avois proposée dans mon Mémoire. Les réflexions de cet illustre Matématicien ont réveillé ma curiosité sur cette matiére que des occupations d'un genre absolument différent, m'avoient empêché de suivre: & je soumets ici au jugement des Géomètres les nouvelles considérations que la briéveté du tems m'a permis de faire sur ce sujet assès délicat par lui-même.

On entend communément par *logarithmes* une suite de nombres en progression arithmétique quelconque, répondant chacun à chacun, à ceux d'une autre suite de nombres qui forment entr'eux une progression géométrique aussi quelconque; mais comme on peut toujours réduire les logaritmes à être les exposans des puissances successives d'un nombre e pris à volonté, en leur ajoûtant seulement une quantité constante, ou en changeant l'origine des x dans la courbe qui exprime le rapport des nombre à leurs log.: il est visible que ce n'est rien lever à la généralité de la définition que nous venons de donner, que de dire simplement que x sera le log. de y quand on aura l'équation $y = e^x$.

Et

Et il paroit d'ailleurs que c'eſt la ſeule façon dont on les conſidére dans le calcul.

Cela poſé il eſt néceſſaire de bien diſtinguer la queſtion Arithmétique de la queſtion Géométrique : car il me paroit évident que l'origine des log. numériques ne permet pas d'en donner aucun aux nombres négatifs, puiſqu'à quelle puiſſance qu'on éleve le nombre e il ne ſauroit réſulter $= -e$.

Je ſais bien qu'en faiſant que e^{2m} répréſente un nombre quelconque on trouve $\sqrt{e^{2m}} = \pm e^{m}$, d'où l'on conclud que $2m$ étant le log. de e^{2m}, m doit auſſi bien être le log. de $-e^{m}$, que de $+e^{m}$, mais ſi l'on s'en tient à la premiére origine de e^{2m}, comme nous le ſuppoſons ici, & qu'on veuille faire attention à la théorie des quantités négatives que Mr. D'Alembert a fort-bien dévélopé dans ſon Ecrit ſur les logaritmes & dans l'Encyclopédie, on verra aiſément que, puiſque e^{2m} vient par la génération même des log. de la quantité $+e$ élevée à la puiſſance $2m$, & non pas de $-e$ élevé à cette puiſſance, on ne peut pas dire que $-e^{m}$ ſoit réellement la racine quarré de e^{2m}, mais ſeulement que $-e^{m}$ élevé au quarré produit une quantité égale au même nombre e^{2m} : ce qui ne ſuffit pas pour la queſtion arithmétique, où on s'eſt contenté de raporter tous les nombre à l'indéterminé poſitif $+e$.

Cette théorie recevra encor un plus grand jour ſi on conſidére les logarithmes comme des nombres en progréſſion arithmétique répondant à une progréſſion géométrique : car après avoir choiſi, par exemple la progréſſion decuple 1, 10, 100 pour les nombres, & la progréſſion naturelle 0, 1, 2, &c. pour leurs log. ; il eſt viſible que la progréſſion géométrique prolongée tant qu'on voudra ne nous fera jamais parvenir à des nombres négatifs. Envain diroit-on que les nombre négatifs peuvent entrer en proportion avec les nombres poſitifs ; car il eſt évident que la proportion ne ſauroit affecter que la ſeule quantité, & que le ſigne

$+$ ou $-$ ne lui appartient point, mais ſignifie ſeulement la différente poſition des quantités qui en ſont affectées, comme Mr. d'Alembert lui-même l'a remarqué. Les nombres $1, -1, -1, 1$ ne forment donc pas plus une proportion que ceux-ci $-1, 1, 1, 1$, & toute la différence qu'on y voit, c'eſt que dans la premiére ſuite le produit des extrémes eſt égal au produit des moïens, & non pas dans la ſeconde, ou pour m'exprimer plus exactement, ces produits ſont égaux dans toutes les deux, mais affectés de ſignes contraires dans la ſeconde, ce qui ne change rien à la quantité, ni par conſéquent à la proportionalité, dans les principes de Mr. d'Alembert même. Enfin quand même on voudroit que le produit des extrêmes étant égal au produit des moïens, les quantités formaſſent une proportion, cela ne ſerviroit pas encore au cas préſent, où le premier terme de la progreſſion doit être poſitif $= +e$, & le dernier, le nombre négatif dont on cherche le log., puiſqu'il eſt viſible qu'alors le quarré du terme moïen n'eſt pas même égal au produit des extrêmes.

Quant à la preuve qu'on prétend déduire de ce que les deux progréſſions peuvent être quelconques, elle ne me paroit pas pouvoir s'appliquer ici, puiſqu'il s'agit de déterminer le log. de -2: les log. de $1, 2, 3, 4$, &c. étant déja donnés, c'eſt-à-dire la progréſſion dans laquelle on doit le trouver étant déja déterminée. C'eſt ainſi, par exemple, qu'on ne peut pas dire qu'à la même ordonnée d'une parabole, il réponde différentes abſciſſes x, $x + a$, $x + b$ &c., quoiqu'on puiſſe toujours les lui rapporter en prenant l'origine de x à volonté.

On voit donc qu'à conſidérer les logatithmes arithmétiquement, & en les rapportant toujours à un nombre déterminé e, les nombres négatifs ne ſauroient en avoir, & je crois devoir remarquer ici que c'eſt ſous ce point de vüe que Mr. Leibnits, & même Mr. Euler les avoient conſidérés.

Telle

Telle étoit, dans leur premiére origine, la nature des logarithmes ; mais les Géomètres ont bien-tôt cherché à tranſporter ces notions dans la Géométrie : or l'on ſait qu'en pareil cas l'expréſſion algébrique devient ſouvent plus générale qu'on ne le veut, & notre queſtion ſe réduit à examiner s'il en a été ainſi dans la logarithmique.

L'équation de cette courbe eſt, comme on ſait, $dx = \frac{dy}{y}$. Je crois d'avoir aſſés bien prouvé dans mon Mémoire que cette équation nous fait voir que la logarithmique a deux branches, & qu'elles ſont même liées par leur expreſſion tranſcendante, ce qui s'accorde avec le ſentiment de Mrs. Bernoulli & d'Alembert ; mais les raiſonnemens par leſquels le premier de ces grands Géomètres prétendoit prouver l'entiére continuité de cette courbe, & même les nouvelles raiſons que le dernier y a ajouté pour fortifier ce ſentiment ne me paroiſſent pas entiérement concluantes.

En effet l'argument tiré de la quadrature de l'hyperbole que Mr. Bernoulli regardoit comme démonſtratif, & ſur lequel Mr. d'Alembert ſe fonde auſſi le plus, pourroit ſervir également à établir une théorie contraire : car ſi on conſidére la courbe dont l'équation eſt $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, il eſt évident qu'elle ne s'étendra point du côté des x négatives, puiſqu'alors $y = \frac{1}{\sqrt{-x}}$: qu'on ſuppoſe à préſent que cette courbe faſſe une révolution ſur ſon axe, elle formera un ſolide dont l'élément ſera $\frac{dx}{x}$, & cette ſolidité ſera par conſéquent exprimée par $l.x$; or puiſque la courbe n'exiſte pas quand x eſt négative, le ſolide n'exiſtera pas non plus, & par conſéquent x négative n'a point de logarithme.

Je ſuis bien éloigné de vouloir conclure de là, & d'une infinité de raiſonnemens ſemblables, qu'on peut aiſément imaginer

giner, que la logarithmique n'a point de branche au-deſſous de l'axe ; mais il me ſemble que, puiſqu'en choiſiſſant à volonté différentes courbes génératrices pour les logarithmes, on peut en déduire des conſéquences directement oppoſées, nous ne devons pas faire beaucoup de fond ſur ces ſortes de raiſonnemens. Cela ſe raporte à ce que j'avois déja obſervé dans mon Mémoire, que l'intégration change toujours un peu l'équation différentielle au moins quant à ſa généralité.

Pour s'aſsûrer donc de la coexiſtance & de l'union des branches de la logarithmique, il eſt abſolument néceſſaire de s'abſtenir de toute intégration, & même des quadratures qui les ſuppoſent toujours ; voici un raiſonnement qui ne me paroit ſujet à aucun inconvénient.

Soit BP (*Fig.* * *pl. IV.*) la logarithmique, AQ ſon axe, $AD = x$, $DP = y$. On trouvera le raïon de la dévéloppée qui appartient au point P, $PR = \frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{y}$ & par conſéquent $CR = \frac{2y^2+1}{y}$, $CD = 1+y^2$, donc ſi on appelle $CD = u$, $CR = z$ on trouvera l'équation $z^2 = \frac{4u - 4u^2 - 1}{1-u}$, qui à chaque valeur de $CD = u$ fournir toujours deux valeurs égales, & de ſignes différens pour $z = CR$; il ſuit delà que la dévélopée de la logarithmique a deux branches ſemblables l'une au-deſſus & l'autre au-deſſous de l'axe ; & que par conſéquent, non ſeulement il en eſt de même de la logarithmique, mais encore que ces deux branches forment une courbe continue.

Ce raiſonnement me paroit être démonſtratif, & ne laiſſer plus aucun doute ſur la continuité des deux branches de notre courbe, c'eſt donc inutilement que je cherchois dans mon Ecrit à trouver une différence entre la continuité

dans

des branches de l'hyperbole, & celle de ſes aires, puiſqu'elles ſont auſſi bien liées les unes que les autres : il eſt viſible qu'on ne peut pas dire que l'aire qui appartient à l'x négative ſoit auſſi négative, comme le ſuppoſoit le raiſonnement de *l'Art.* 11.; je l'avois moi même remarqué un peu auparavant, & c'eſt avec raiſon que M. d'Alembert me le conteſte, mais je ne ſaurois convenir avec lui que cela poſé l'on ne pût en tirer les conſéquences que j'en ai déduit : quoiqu'il en ſoit cette diſcuſſion eſt inutile ici, puiſque nous convenons ſur le fond de la queſtion.

Mais que deviendra alors la formule $\varphi\sqrt{-1} = l.\ (coſſ.\ \varphi \pm ſin.\ \varphi\sqrt{-1})$ trouvée par l'illuſtre Bernoulli, & que j'ai déduite dans mon Mémoire du rapport conſtant du ſecteur hyperbolique au ſecteur circulaire ?

Je répons 1.° que cette formule peut s'exprimer un peu plus généralement en la changeant en celle-ci $\varphi\sqrt{-1} = l.\ (\pm coſſ.\ \varphi \mp ſin.\ \varphi\sqrt{-1})$, & en choiſiſſant les ſignes convenables pour les cas, auxquels on veut l'appliquer : comme je l'avois déja conclu dans mon Mémoire, de l'origine de cette même formule, auſſi bien que de l'intégration directe de l'équation $dx = \frac{dy}{y}$ que j'ai donnée dans le même écrit, & qui eſt $y = m\,e^{x}$, où m eſt abſolument arbitraire.

2.° Que ſi l'on veut dans notre formule conſerver toujours les mêmes ſignes, on trouvera à la vérité des log. imaginaires pour les nombres négatifs, mais pourvû qu'on s'en tienne à l'expreſſion algébrique, & qu'on n'en tire aucune concluſion avant que d'avoir transformé de nouveau la formule, on pourra s'en ſervir ſans crainte d'erreur, comme l'uſage continuel qu'on en a fait juſqu'ici le prouve ſuffiſamment.

On peut lire dans mon Mémoire l'origine & le dénoüement de cet eſpéce de paradoxe ; j'y ai remarqué que ſi on cherchoit une appliquée négative dans la branche ſupé-

rieure

rieure de la courbe qui appartient à l'équation $y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}$ qui en a évidemment deux égales, on la trouveroit imaginaire : il en eſt préciſément de même dans notre formule $\varphi\sqrt{-1} = l.[x + \sqrt{(x^2 - 1)}]$, qui ne ſauroit exprimer généralement tous les nombres en faiſant ſeulement varier l' x, mais dans laquelle il faut tantôt ſe ſervir de $x + \sqrt{(x^2 - 1)}$ tantôt de $x - \sqrt{(x^2 - 1)}$.

Voilà je penſe la vraie raiſon pour laquelle notre formule ne fournit que des imaginaires pour les log. des nombres négatifs, & je ne ſaurois accorder à Mr. d' Alembert qu'elle appartienne à une logarithmique dont la ſoutengeante eſt imaginaire, puiſque Mrs. Bernoulli, Euler, & moi l'avons tous conſtruite d' après cette ſuppoſition que le log. de 1 fût $= 0$, quoique par des procédés fort-différens.

Il eſt vrai que Mr. d'Alembert attaque le raiſonnement géométrique ſur lequel j'ai fondé la vérité de cette formule; parceque j'y ſuppoſe que les ordonnées du cercle étant toujours aux ordonnées de l'hyperbole comme $1 : \sqrt{-1}$, il en doit être de même de leurs ſecteurs : il objecte que la conſtante qu'on doit ajouter à l'une de ces intégrales, change la proportion de leurs élémens; mais il eſt viſible qu'on n'a point à craindre ici un pareil inconvénient, puiſque nous exprimons l'arc de cercle ſimplement par φ, & que l'intégration de l'hyperbole n'exige point de conſtante.

Un plus grand détail ſur cette matiére me paroit inutile, & je me contente de renvoïer à mon Mémoire pour les conſéquences qu'on peut déduire de cette théorie. J' ai, ſi je ne me trompe, prouvé ici ſuffiſamment, que les logarithmes tels que Mrs. Leibnitz & Euler les ont conſidérés ſont imaginaires pour les nombres négatifs : & d' un autre côté que la logarithmique a cependant deux branches, comme l'ont ſoutenu Mrs. Bernoulli & d'Alembert.

DE

DE L'INFINI ABSOLU

Considéré dans la Grandeur

PAR LE

P. GERDIL BARNABITE.

LE mot *infini* appliqué à la quantité peut être pris en deux sens : tantôt il signifie une propriété essentielle à la grandeur, par laquelle on conçoit qu'elle est susceptible d'augmentation & de diminution sans fin ; tantôt il exprime l'élévation actuelle d'une grandeur à la derniére période, pour ainsi dire, de l'augmentation, dont elle est susceptible, où son abaissement jusqu'a la derniere période de sa diminution possible. *Une quantité infinie* dit-on communément, *est celle qui a reçu tous ses accroissements finis possibles : une quantité infiniment petite, celle qui a reçu tous ses decroissements finis possibles.*

Locke distingue très nettement ces deux significations. Il designe la premiere par le mot *d'infinité*, qu'il substitue à celui d'infini en puissance, emploïé par les anciens pour marquer qu'il n'est aucun terme qui borne l'augmentation, où la diminution possible de la grandeur. Il exprime la seconde par le mot simple *d'infini*, c'est à dire de l'infini absolu & en acte : & il ajoute que cette sorte d'infini dans la quantité est impossible à concevoir, *car*, dit-il, *une repetition à l'infini ne sauroit jamais représenter l'infini.*

La premiere idée est très-claire. C'est une suite de la notion même de la grandeur ; quelque augmentation que la grandeur ait reçuë, on conçoit, qu'elle peut être encore augmentée, & l'esprit ne voit aucune borne à cette suite possible d'augmentation. Mais pour former la notion de

l'infini abſolu, il faudroit allier ces deux idées, qu'une ſuite d'augmentation ne peut avoir aucune fin, & que pourtant cette augmentation peut parvenir a ſon comble. Auſſi Chambers raiſonnant ſur les principes de Locke n'héſite pas de dire, que l'idée d'un nombre actuel infini eſt une abſurdité. (*a*)

Les anciens Géométres ſcrupuleuſement attachés à la rigueur de la démonſtration, & à la clarté des idées, qui en eſt inſéparable, ont heureuſement emploïé la premiere notion de l'infini dans leurs recherches, & en ont ſévérement écarté l'idée de l'infini abſolu, dont les réſultats paradoxes ſont plus faits pour étonner une imagination avide du merveilleux, que pour ſatisfaire un eſprit ami du vrai.

Cavalleri fut le premier qui oſa introduire dans la Géométrie l'infini ſous une forme nouvelle, en imaginant le continu compoſé d'un nombre infini de parties, qui ſont comme les derniers termes de la décompoſition qu'on peut en faire, en le partageant en tranches paralelles entr'elles, il conſidera ces derniers termes, comme les éléments du continu, & les appella *indiviſibles*. Mais M. de Montucla dans ſon excellente hiſtoire des Mathématiques obſerve que quoiqu'on ne puiſſe diſconvenir que Cavalleri s'énonce d'une maniere un peu dure pour des oreilles Géométriques, il eſt pourtant facile de reconcilier ſon langage avec la ſaine Géométrie, par l'interprêtation qu'il y donna luy même, lorſqu'il fut attaqué par Guldin, faiſant voir que ſa méthode n'eſt autre choſe, que celle d'exhauſtion des anciens, ſimplifiée. Le ſoin donc qu'il eut de diſſimuler l'infini, dont il faiſoit uſage, & de le maſquer le plus ſouvent ſous

(*a*) Le P. Jacquier dans ſes inſtitutions de Philoſophie parlant de l'infini mathématique dit qu'il eſt évident qu'une grandeur infinie répugne de ſa nature, & implique contradiction. Le P. Boſchovitz dans ſon traité des ſect. Con. p. 465. établit qu'il ne peut éxiſter aucune quantité qui ne ſoit finie.

ſous le nom plus doux en apparence d'indéfini, ne doit pas être regardé comme un ménagement néceſſaire pour introduire l'idée nouvelle de l'infini abſolu, ainſi que M. de Fontenelle voudroit le perſuader, mais plutôſt comme une précaution, dont il reconnut la néceſſité, pour faire ſentir, que ſa méthode pouvoit être aiſément ramenée aux idées exactes de la Géométrie.

On vit encore dans le même ſiécle la notion de l'infinité ſagement emploïée par d'habiles Maîtres ſe développer plus, ou moins en différentes méthodes, dont l'heureuſe application aux recherches les plus difficiles avança extraordinairement les progrès de la Géométrie, & acquit une gloire immortelle à leurs inventeurs.

Enfin parut le calcul de l'infini qui fut en même tems & le point de réunion des Thèories qui l'avoient précédé, & le germe des brillantes découvertes qui l'ont ſuivi. L'infini ſoumis aux regles du calcul donna lieu de penſer aux perſonnes peu verſeés dans ces matiéres, qu'on connoit l'infini, ſelon l'expreſſion de M. Voltaire, comme dix & dix font vingt; & quelques Savants regarderent ce calcul comme une preuve convaincante de la réalité de l'infini abſolu, & de l'éxiſtence d'une infinité de différents ordres d'infini.

Cependant M. Dalembert, qui (au mot différentiel de l'Encyclop) a expliqué la métaphyſique de ce calcul avec autant de clarté, que de ſolidité, fait voir que la ſuppoſition qu'on y fait de quantités infiniment petites n'eſt que pour abréger, & ſimpliſier les raiſonnements, qu'il ne s'agit point de quantités infiniment petites dans le calcul différentiel, mais uniquement de limites de quantités finies, qu'ainſi la métaphyſique de l'infini, & des quantités infiniment petites, plus grandes, ou plus petites les unes que les autres, eſt totalement inutile au calcul différentiel, où l'on ne ſe ſert du terme d'infiniment petit, que pour abréger les expreſſions.

Il remarque en même tems que ſi ce calcul a eu des ennemis dans ſa naiſſance, c'eſt la faute des Géométres ſes partiſans, dont les uns l'ont mal compris, les autres peu expliqué.

M. Rolle qui fut un des plus ardents à le combattre, ne le rejetta, que parcequ'il ne pouvoit admettre la ſuppoſition de grandeurs infiniment petites. Rolle ſe trompoit en faiſant dépendre le calcul de cette ſuppoſition, mais il ne ſe trompoit pas à rejetter la ſuppoſition en elle même.

Leibnitz n'ignorant pas ſans doute la force des preuves que la Géométrie même pouvoit fournir contre ces ſortes, de grandeur, reduiſit ſes infiniment petits à n'être que des incomparables, dans le même ſens qu'un grain de ſable ſeroit incomparable au globe de la Terre. Cette idée ne s'accorde guere à la vérité avec l'exactitude géométrique des calculs, mais elle fait voir du moins que Leibnitz étoit bien éloigné d'admettre cette ſorte d'infini.

Newton, dont la Métaphyſique ſur ce point, dit M. Dalembert, eſt très-exacte, & très-lumineuſe, eſt parti d'un autre principe, & il n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode de trouver les limites des rapports.

Il paroit donc bien prouvé que ni la ſynthéſe rigoureuſe des anciens, ni l'analiſe ſublime des modernes ne portent aucunement ſur la ſuppoſition de quantités infiniment petites, & ne renferment rien qui tende à établir la réalité de l'infini abſolu ſoit dans la quantité diſcrete, ſoit dans la quantité continuë.

Envain le célébre Fontenelle a entrepris d'éléver, comme on dit, l'édifice de l'infini en établiſſant les différents ordres d'infinis, & d'infiniment petits. Cet édifice au jugement de M. de Montucla & des plus habiles Maîtres, eſt plus hardi que ſolide.

J'ai

J'ai déja tâché dans la premiere de mes dissertations imprimées à Paris chez Chaubert de dévoiler le foible de cette Théorie, & je dois répéter ici, pour l'intérêt seul de la vérité, qu'aïant fait communiquer cette partie du manuscrit à un Géométre du premier ordre, il m'écrivit, que les principes que je combattois, étoient en effet très-faux, & tendoient à jetter du doute sur les verités de Géométrie; & au sujet d'une autre dissertation il m'ecrivit que j'avois réfuté avec grande raison les infinis indéterminables de M. de Fontenelle.

Cette recherche peut n'être pas entiérement inutile. Sans parler de la néceſſité d'éloigner de la Géométrie des notions confuſes, qui ſous un appareil ſavant, couvrent quelque fois des paralogiſmes capables d'ébloüir, (*b*) je remarque ſimplement que l'infini dans la grandeur n'eſt pas ſeulement l'objet de la Géométrie; il eſt auſſi quoique ſous un autre point de vüe, du reſſort de la Métaphyſique. L'éclairciſſement de cette queſtion pourroit donc ſervir à former, pour ainſi dire, une nouvelle ligne de communication entre ces deux branches des connoiſſances humaines, l'impoſſibilité de l'infini abſolu démontrée géométriquement fourniroit à la Métaphiſique un principe lumineux, pour établir des vérités de la plus grande importance.

L'objet de ce mémoire eſt de préſenter quelques preuves de cette impoſſibilité. Je les ai tirées 1. de la formation

(*b*) L'éditeur des œuvres de Maclaurin parlant de ſon traité des fluxions (vie de Maclaurin page XIII.) s'énonce en ces termes: „ on ne peut diſ„ convenir que les termes d'infini, & d'infiniment petits ne ſoient „ devenus trop familiers aux Mathématiciens, & qu'on n'en ait abuſé „ en Géométrie & en Arithmetique, ſoit en introduiſant & palliant „ des abſurdités réelles, ſoit en donnant a ces ſciences un certain air „ miſterieux, & affecté qu'elles ne doivent point avoir. Pour remédier „ à ce mal qui alloit tous les jours en croiſſant, M. Maclaurin trouva „ qu'il étoit néceſſaire, en démonſtrant les principes des fluxions, de „ rejetter entiérement tous ces termes ſujets à diſputes, & de ne ſup„ poſer que des quantités finies déterminables, telles que celles dont „ traite Euclide dans ſa Géométrie. &c.

mation de la ſuite naturelle des nombres. Cette preuve ſervira auſſi de réponſe à la ſeule objection qu'on ait faite contre ma premiere diſſertation. 2. de la notion élémentaire des lignes droites paralleles. 3. d'une propriété de la Logarithmique. 4. des aſymptotes de l'hyperbole. 5. des progreſſions croiſſantes infinies. 6. des progreſſions géométriquement decroiſſantes à l'infini.

Je puis m'être trompé ſur le choix des preuves mais le ſentiment des Géométres que je viens de citer, m'autoriſe a croire que je ne me ſuis pas trompé ſur le fond de la queſtion, en regardant l'impoſſibilité de l'infini actuel dans la quantité, comme une vérité ſuſceptible de démonſtration. Cela ſeul ſuffit pour remplir l'objet que j'ai en vüe, qui n'eſt point d'entrer dans des recherches difficiles de Géométrie, mais d'établir une vérité utile, ou du moins de faire naître à quelque habile Géométre la penſée de l'établir. La grace que j'oſe demander aux lecteurs qui voudront bien jetter les yeux ſur cet écrit, eſt de ne pas juger de la ſolidité de mes raiſonnements ſur l'expoſé de chacune des preuves en particulier, au cas qu'ils y trouvent quelque difficulté, mais d'examiner la liaiſon de toutes les preuves entr'elles. Quelque effort que l'on faſſe pour s'enoncer avec clarté, on ne peut empêcher que les expreſſions dont on eſt obligé de ſe ſervir dans des matiéres un peu abſtraites, ne préſentent un côté obſcur, qui rend la penſée moins intelligible, & ce n'eſt qu'en tournant ſes penſées & en les préſentant ſous différentes faces qu'on parvient à les caractériſer avec aſſez de préciſion pour les faire entendre comme on les conçoit.

PRE-

PREMIERE PREUVE

Tirée de la formation de la ſuite naturelle des nombres.

J'Ai déja fait uſage de cette preuve tirée de la formation de la ſuite naturelle des nombres dans la diſſertation que je viens de citer. La ſeule objection qui me ſoit revenuë, c'eſt que n'ayant aucune idée de l'infini abſolu nous ne ſaurions démontrer ſi cet infini répugne où non.

Je ſens la néceſſité d'écarter avant tout cette objection, qui eſt d'autant plus à craindre qu'elle eſt plus vague.

Je dis donc que les preuves principales que j'ai emploïées dans mon eſſai de démonſtr., ne portent point ſur l'idée de l'infini conſidéré en lui même, mais ſur des rapports conſtants entre quantités finies, rapports qui étant eſſentiels à la ſuite naturelle des nombres, & ſubſiſtant invariablement dans tout le cours de cette ſuite, prouvent que tout nombre poſſible eſt néceſſairement fini.

C'eſt ainſi que l'on regarde comme démontrée la proprieté de l'aſymptote de pouvoir être prolongée à l'infini ſans jamais rencontrer la courbe dont elle approche continuellement, *de maniere* (ce ſont les termes de M. Dalembert au mot Aſymptote) *que ſa diſtance à cette courbe ne devient jamais zéro abſolu, mais peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée.*

Cette proprieté ſe déduit non de l'idée même de l'infini, mais d'un rapport conſtant entre des quantités finies, comme dans l'hyperbole entre la puiſſance de cette courbe, & tous les rectangles formés par une portion de l'aſymptote, & une droite tirée de l'aſymptote à l'hyperbole. Or cette propriété étant eſſentielle à l'hyperbole, l'invariabilité de ce rapport fait connoître évidemment que l'hyperbole & l'aſymptote peuvent être prolongées ſans fin, & que cependant elles ne peuvent jamais s'approcher de ſorte

que

que leur distance devienne absolument nulle. L'obscurité de l'idée de l'infini n'a jamais été un prétexte de douter de la solidité d'une démonstration fondée sur l'invariabilité connue d'un rapport qui toujours subsistant & toujours le même dans le prolongement indéfini de ces deux lignes, ne peut que donner toujours le même résultat.

Tel est le procédé que j'ai suivi dans mon essai sur tout pa. 23. & suiv. je vais y ajouter quelques éclaircissements

1. Soit un assemblage quelconque de termes ou d'unités, je dis que la suite naturelle des nombres est applicable à cet assemblage.

2. Et par conséquent tout nombre possible entre dans la suite naturelle & en fait partie.

3. C'est une propriété essentielle à la suite naturelle d'être formée par l'addition continuelle d'unité à unité.

4. En sorte que dans la suite naturelle tout nombre qui suit un autre nombre, ne peut le surpasser que d'une unité.

5. Tout nombre qui a un rapport fini à un nombre fini est nécessairement fini.

6. Sur ces principes je dis 1. que la suite naturelle des nombres peut être augmentée à l'infini par l'addition continuelle d'unités à unités, en sorte que quelque soit le nombre donné, on pourra toujours trouver un nombre plus grand. Cette proposition n'a pas besoin de preuves. C'est un axiome d'Euclide (arith. l. 1. apud Tacq.) *Quolibet numero potest sumi major.* Je dis 2. que dans cette progression tous les nombres possibles par lesquels on conçoit que la suite naturelle augmente à l'infini, auront toujours un rapport fini aux précédents, & qu'il n'est ainsi aucun nombre possible qui ne soit fini.

PREUVE

PREUVE.

CConcevons la ſuite naturelle élévée à un nombre quelconque donné, il eſt évident que ce nombre quelque grand qu'on veuille l'imaginer, ſera un nombre fini, & qu'il pourra être encore augmenté. Or le nombre ſuivant ne pourra ſurpaſſer ce dernier nombre que d'une unité. Donc il aura un rapport fini à un nombre fini, donc ce nombre ſuivant ſera un nombre fini. Et comme ce rapport ſubſiſtera ſans fin dans tout le cours de la ſuite naturelle, tout nombre qu'on voudra y ajouter (quelque augmentation qu'on ſuppoſe qu'elle ait déja reçue) ne ſurpaſſera le nombre précédent que d'une unité; ce ſera donc encore un nombre fini. Or il n'eſt aucun nombre poſſible dans la ſuite naturelle, auquel ce raiſonnement ne puiſſe être appliqué: Donc tout nombre poſſible eſt néceſſairement un nombre fini; donc &c.

2. Dans la ſuite naturelle le nombre 2. eſt néceſſairement déterminé à être fini par le rapport qu'il a à l'unité qui le précéde, & par le même rapport il détermine le nombre 3. qui le ſuit à être fini. Ainſi le nombre 2. comme moyen eſt déterminé à être fini par ſon antécédent, & il détermine de même ſon conſéquent. Or dans la progreſſion naturelle tous les nombres poſſibles depuis l'unité ſont autant de termes moyens, qui ſe ſuccédent & ſe déterminent toujours ſelon la même loi. Donc l'unité déterminant le nombre 2. à être fini, & celui-ci ſon conſéquent 3. en vertu du même rapport, cette détermination doit s'étendre, autant que la progreſſion, & par conſéquent tous les termes de cette ſuite, ne peuvent qu'être finis.

3. Si la ſuite naturelle pouvoit s'élever à un nombre qui ne fut pas fini, il y auroit donc un nombre fini poſſible, qui ne ſeroit plus ſuivi d'un autre nombre fini, mais d'un nombre d'un ordre ſuperieur. Or il n'eſt aucun

nombre fini poſſible, dont le conſéquent ne doive être fini, puiſqu'il ne peut ſurpaſſer que d'une unité ſon antécédent. Donc il n'eſt aucun nombre fini poſſible, qui ne ſoit ſuivi d'un autre nombre fini. Donc la ſuite naturelle ne peut jamais ſortir du fini. Donc &c.

Réduiſons ces raiſonnements en deux mots. Tout nombre qui ne s'éléve que d'une unité ſur un nombre fini, eſt un nombre fini. Or par une propriété conſtante de la ſuite naturelle, on trouve qu'en continuant le cours de cette ſuite à l'infini, chaque nombre qu'on y ajoute, ne s'éléve que d'une unité ſur le nombre fini qui le précéde, & cela ſe trouve ſans fin. Donc il n'eſt aucun nombre poſſible dans la ſuite naturelle qui ne ſoit fini.

Cette marche eſſentielle à la progreſſion des nombres, fait ainſi dans tout le cours de la ſuite naturelle le même effet que l'égalité de la puiſſance de l'hyperbole, & des rectangles correſpondants fait dans le prolongement indéfini de cette courbe & de ſon aſymptote; de maniére que comme dans ce prolongement indéfini *la diſtance de l'aſymptote à la courbe ne devient jamais nulle, ou zéro abſolu*, ſelon l'expreſſion de M. D'Alembert, ainſi dans le cours indéfini de la ſuite naturelle tout nombre qu'on ajoute aux autres nombres, ne devient jamais infini abſolu, & de même que cette diſtance peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée ſans jamais devenir zéro abſolu, ainſi dans la ſuite naturelle on peut toujours ajouter un nombre plus grand qu'aucun autre nombre donné, ſans pouvoir jamais parvenir à l'infini abſolu.

J'ajoute que dans la quantité continuë, zéro abſolu & l'infini abſolu peuvent être conſidérés comme les limites du décroiſſement & de l'augmentation de la grandeur, de maniére cependant que la quantité ne peut jamais atteindre ces limites, ni coincider avec elles. La quantité continuë diminuë ſans ceſſe par la diviſion de ſes parties;

mais

mais quoique cette diviſion poſſible n'ait point de bornes, & qu'elle puiſſe aller à l'infini, il eſt pourtant impoſſible que jamais elle réduiſe la quantité à zéro abſolu. D'un autre côté la grandeur peut augmenter par une progreſſion continuelle d'un à deux, de deux à quatre, & ainſi de ſuite; mais quoique cette progreſſion n'ait point de bornes, & qu'elle puiſſe continuer à l'infini, elle ne pourra non plus jamais éléver la grandeur à l'infini abſolu. La marche d'une quantité finie vers zéro abſolu, & vers l'infini abſolu ſe trouve ainſi la même dans des directions oppoſées. Donc l'impoſſibilité démontrée de réduire une quantité finie à zéro abſolu par une progreſſion quelconque de décroiſſement, ſemble prouver l'impoſſibilité de l'éléver à l'infini abſolu par une progreſſion oppoſée d'accroiſſement.

SECONDE PREUVE

Tirée des notions élémentaires de la Géométrie.

SOient les deux droites paralleles (*fig.* 1.) *A B*, *C D*, je dis que ces deux lignes peuvent être prolongées indéfiniment, de maniére pourtant qu'elles ne pourront jamais parvenir à l'infini abſolu, ou en acte; je dis qu'on ne pourra jamais parvenir ſur ces lignes à un point quelconque, dont la diſtance du point *A* puiſſe être ſuppoſée abſolument infinie, & qu'une telle ſuppoſition renverſe les principes les plus inconteſtables de la Géométrie.

1. Il eſt inconteſtable qu'on peut ſuppoſer en Géométrie deux lignes droites exactement paralleles, & qui étant prolongées à l'infini conſervent toujours leurs paralleliſme.

2. Il ſuit de cette ſuppoſition qu'aucun point de la ligne *A B*, à quelque diſtance qu'on le ſuppoſe du point *A* ne pourra jamais coincider avec aucun point de la li-

gne $C D$. Car ces deux lignes devant toujours conſerver leur paralleliſme par la ſuppoſition, elles ſeront toujours & dans tout le cours de leur prolongement à une égale diſtance l'une de l'autre.

3. Or je dis que de tels principes inconteſtables en Géométrie ſont détruits par la ſuppoſition que les lignes $A B$, $C D$, puiſſent être prolongées juſqu'à l'infini abſolu où actuel.

4. Si ces lignes peuvent être prolongées juſqu'à l'infini abſolu, donc il y aura dans la ligne $A B$, des points qu'on pourra ſuppoſer être à une diſtance abſolument infinie du point A.

5. Cela étant des points C & E de la ligne $C D$ on pourra tirer les deux droites paralleles $C G$, $E B$ aux points G & B ſuppoſés à une diſtance abſolument infinie du point A, de maniére, qu'on aura un parallelogramme $C G B E$ formé de deux droites finies $C E$, $G B$, & de deux infinies $C G$, $E B$.

6. Qu'on éléve maintenant ſur le côté $E B$ la perpendiculaire $T P$ qui méſure la diſtance des deux côtés $C G$, $E B$ où cette diſtance $T P$ pourra être encore diminuée, ou elle ſera abſolument nulle?

7. Si la diſtance $T P$ peut être encore diminuée, donc les points G & B peuvent encore être reculés de plus en plus ſur la ligne $A B$; donc ces points ne ſont pas encore à un éloignement infini du point A.

8. Si l'on fait la diſtance $T P$ abſolument nulle, donc la ligne $C G$ doit coincider ſur la ligne $E B$.

9. Or la ligne $C G$ ne peut coincider avec la ligne $E B$, que celle-ci ne coincide elle même avec la ligne $C D$. Car le point u venant à tomber ſur le point E, il faut que toute la ligne $C G$ tombe ſur la ligne $C D$, & cela par les axiomes mêmes d'Euclide.

10. Mais la ligne *C G* & la ligne *E B* venant ainſi à tomber & à coincider ſur la ligne *C D*, il eſt évident que les points *G* & *B* de la droite *A B* doivent rencontrer l'autre parallele *C D*. Ce qui détruit la notion des paralleles établies ſur les principes les plus inconteſtables de la Géométrie.

L'expreſſion de quelques Géométres qui diſent que deux paralleles concourent à une diſtance infinie ne contredit aucunement la démonſtration que nous venons de donner. Ce n'eſt là qu'une façon de s'exprimer pour dire que deux lignes qu'on ſuppoſeroit ne pouvoir concourir qu'à une diſtance infinie pourroient être regardées comme paralleles, parceque leur inclinaiſon étant infiniment petite ſeroit comptée pour rien. Mais cette ſuppoſition ne prouve pas que deux lignes puiſſent être prolongées à une diſtance abſolument infinie. Elle ne détruit point non plus la poſſibilité géométrique de deux lignes tellement ſituées l'une à l'égard de l'autre que l'inclinaiſon ſoit abſolument nulle, & qui ſoient par conſéquent exactement paralleles. Or il eſt évident qu'en détérminant ainſi la notion des paralleles, il eſt impoſſible qu'elles concourent jamais à quelqu'éloignement que ce ſoit, & on peut encore le montrer de la maniére ſuivante.

Qu'on ſuppoſe (*fig.* 2.) *A C*, *B D*., tangentes aux deux extrémités du diamêtre *A B* du cercle O, & par conſéquent paralleles. Si l'on ſuppoſe en même tems que ces deux lignes prolongées à une diſtance abſolument infinie dans la direction *A C*, *B D* doivent enfin concourir à un point infiniment éloigné du diamêtre *A B*, il faudra ſuppoſer par la même raiſon qu'en les prolongeant dans la direction oppoſée *A E*, *B F*, elles devront auſſi concourir de ce côté à un éloignement infini. Or les deux lignes *A E*, *B F* ne peuvent concourir du côte *X* ſans leur ſuppoſer une inclinaiſon infiniment petite de ce même

côté

côté ; & elles ne peuvent être inclinées vers X qu'elles ne s'écartent d'autant vers Y. Mais pour concourir auſſi de ce côté ſelon la ſuppoſition elles doivent être inclinées l'une vers l'autre. Donc il faudroit les ſuppoſer en même tems convergentes & divergentes ; ce qui répugne.

TROISIÉME PREUVE

Tirée d'une proprieté de la Logarithmique.

SOit $A\,x$ l'axe de la logarithmique (*fig.* 3.) $d\,e\,p$, $A\,d = 1$, $b\,e = \frac{1}{2}$. Il eſt démontré que l'axe étant aſymptote à la courbe ne peut la rencontrer qu'à une diſtance abſolument infinie, ce qui dans le langage de la plûpart des Géométres veut dire qu'il ne peut jamais la rencontrer, c'eſt à dire que l'axe ne peut jamais devenir abſolument infini. Propoſition qui paroiſſant ſuſceptible de démonſtration, peut confirmer de plus en plus l'impoſſibilité d'une ſuite compoſée d'un nombre de termes abſolument infini.

Qu'on ſuppoſe l'axe $A\,x$ abſolument infini, & partagé en un nombre actuellement infini de parties égales $A\,b$, $b\,c$ &c. donc au point x placé à un éloignement infini du point A, l'axe deviendra tangente à la logarithmique. D'autre part il eſt évident que les ordonnées décroiſſant dans la progreſſion $1.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$ &c. l'ordonnée au point x, c'eſt à dire à un éloignement infini du point A ſera égale à l'unité diviſée par 2. élévé à ſa puiſſance infinie, ſavoir $\frac{1}{2^{\infty}}$

Cela ſuppoſé, pour que l'axe puiſſe devenir tangente à la courbe, il faut que la fraction $\frac{1}{2^{\infty}}$ qui exprime l'ordonnée, ſoit égale à zéro abſolu, où que dumoins ce ſoit un infiniment petit incapable de recevoir aucun décroiſſement

ul-

ultérieur. Car si l'ordonnée $\frac{1}{\infty^2}$ pouvoit encore devenir plus petite, la distance de l'axe à la courbe pourroit encore diminuer. Ce ne seroit donc pas encore le point du contact, comme on le suppose.

Or l'une & l'autre supposition est impossible. Car 1. cette ordonné $\frac{1}{\infty^2}$ loin d'être incapable de recevoir aucun décroissement ultérieur, seroit encore divisible à l'infini. Qu'on conçoive en effet dans un cercle une corde infiniment petite du premier ordre égale à l'ordonnée $\frac{1}{\infty^2}$, il est évident que l'abscisse correspondante sera un infiniment petit du second ordre, comme le démontre M. D'Alembert (art. différentiel de l'Encyclop.), d'où il conclut que les infiniment petits du premier ordre étant une fois admis, tous les autres en dérivent nécessairement. On sait aussi que les Géomètres pour donner une idée de ce que seroit une quantité absolument infinie, si elle étoit possible, disent que c'est une quantité qui aïant reçeu tous les accroissements finis possibles ne peut plus être augmentée par des quantités finies, mais seulement par des quantités infinies; réciproquement une quantité infiniment petite sera encore susceptible de diminution sans fin par le moyen de quantités infinies. De sorte qu'en admettant un infiniment petit du premier ordre tel que la fraction $\frac{1}{\infty}$ il faut nécessairement reconnoitre la possibilité d'un autre terme $\frac{1}{\infty^2}$ infiniment plus petit que le premier. Donc la fraction $\frac{1}{\infty^2}$ pouvant encore recevoir une infinité de diminutions, ne sauroit être considerée ni comme zéro absolu, ni comme incapable de recevoir aucun décroissement ultérieur.

2. Si des points A & b du même axe Ax l'on éléve les perpendiculaires $AD = Ad = 1$, $bE = \frac{1}{3}$ & ainſi de ſuite, on aura une autre logarithmique, dont l'ordonnée infiniment petite correſpondante au point x ſera $\frac{1}{3^{\infty}}$. Or au point x la logarithmique ſupérieure & l'inférieure devant également toucher leur axe commun Ax, il faudroit que l'ordonnée $\frac{1}{3^{\infty}}$, & l'ordonnée $\frac{1}{2^{\infty}}$ fuſſent égales entr'elles, que l'une & l'autre fuſſent égales à zéro abſolu, ce qui répugne. L'ordonnée $\frac{1}{3^{\infty}}$ étant plus petite que l'ordonnée $\frac{1}{2^{\infty}}$ celle-ci eſt encore ſuſceptible de diminution, donc la diſtance exprimée par cette ordonnée pouvant encore être diminuée, la courbe pourra être prolongée avant que d'arriver au point du contact, où la diſtance entre l'axe & la courbe doit être abſolument nulle. On pourra faire le même raiſonnement ſur l'ordonnée $\frac{1}{2^{\infty}}$ d'où il ſera aiſé de conclure que, quelque hipotéſe que l'on faſſe, il eſt impoſſible que l'axe rencontre jamais la logarithmique, mais il devroit la rencontrer s'il pouvoit être abſolument infini; & il ſeroit infini s'il étoit compoſé d'un nombre de parties actuellement infini. Donc une ſuite compoſée d'un nombre actuellement infini de termes eſt impoſſible.

RE-

RÉPONSE À UNE OBJECTION ET QUATRIÉME PREUVE

Tirée des asymptotes de l'hyperbole.

ON m'objectera peut être que de très-habiles Géométres conviennent avec M. de l'Hopital (Sect. Con. art. 108.) que *les asymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les hyperboles dans leurs extrémités.* Ce qui semble établir la possibilité de l'infini actuel.

Je répons que dans le stile des Géométres cette supposition ne signifie autre chose, sinon que dans le cours indéfini de l'hyperbole, & de l'asymptote, celle-ci approchant de plus en plus de l'hyperbole la toucheroit enfin, si on pouvoit parvenir au terme de ce prolongement infini, ou pour mieux dire si ce prolongement infini pouvoit avoir un terme quelconque. Ce n'est qu'à cette condition, qu'ils supposent que l'asymptote puisse être regardée comme une tangente infinie qui touche l'hyperbole, puisqu'ils disent que ce cas ne peut avoir lieu qu'à l'extrémité de l'hyperbole, comme s'énonce M. de l'Hopital.

Mais en même tems ces Géométres ne prétendent point réaliser cette supposition, ni en établir la possibilité * M. de l'Hopital s'en explique nettement art. 102. par ces mots.

 L'on

* Pour s'en convaincre il n'y a qu'à examiner le calcul qu'on fait d'après cette supposition pour trouver les asymptotes des lignes courbes. Ce calcul consiste à chercher d'abord des formules générales pour la position de toutes les tangentes de la courbe donnée, & à rejetter ensuite dans ces formules plusieurs termes, qui sont regardés comme nuls par rapport à d'autres termes dont la valeur devient par la supposition infiniment plus grande: d'où l'on voit que ce calcul n'est pas absolument rigoureux, & qu'il ne peut par conséquent donner un résultat exact, à moins qu'on ne regarde comme peu exacte la supposition sur laquelle on l'a établi, en sorte que l'erreur de l'hipotése détruise tout-à-fait celle qu'on a commis dans le calcul.

L'on voit que l'hyperbole & ſon aſymptote étant prolongées s'approchent de plus en plus, de ſorte qu'enfin leur diſtance devient moindre qu'aucune donnée; & que cependant elles ne ſe peuvent jamais rencontrer, puiſqu'elles ne ſe joignent que dans l'infini, ou l'on ne peut jamais arriver. C'eſt à dire que ſi l'hyperbole & l'aſymptote étoient prolongées juſqu'à l'infini abſolu, elles ſe toucheroient; mais comme cette condition eſt impoſſible, *& qu'on ne peut jamais arriver à l'infini*, il eſt de fait qu'elles ne peuvent jamais ſe rencontrer. C'eſt ce que M. de la Chapelle explique avec encore plus de netteté, & de préciſion dans ſon traité des

A parler exactement l'aſymptote eſt une droite qui s'approche continuellement d'une courbe de maniére que ſa diſtance à la courbe puiſſe devenir moindre qu'aucune grandeur donnée, ſans qu'elle ſoit jamais zéro abſolu. Or cette condition rend fauſſe la ſuppoſition que l'aſymptote ſoit une véritable tangente; mais on la redreſſe en ſuite dans le calcul, en faiſant, pour ainſi dire, diſparoître le point d'attouchement, en ſorte que la tangente ceſſe d'être tangénte, & devienne ſeulement la limite des tangentes, ſavoir la limite de la courbe même; ce qui eſt conforme à la nature de l'aſymptote.

Il en eſt ici comme dans la méthode des infiniment petits, où le calcul redreſſe auſſi de lui même les fauſſes hipotéſes que l'on y fait. On imagine par exemple qu'une courbe ſoit un poligone d'une infinité de petit côtés, dont chacun étant prolongé devienne une tangente à la courbe. Cette ſuppoſition eſt réellement fauſſe; car le petit côté prolongé ne peut jamais être autre choſe qu'une véritable ſecante: mais l'erreur eſt détruite par une autre erreur qu'on introduit dans le calcul en y négligant comme nulles des quantités, qui ſelon la ſuppoſition ne ſont qu'infiniment petites. C'eſt en quoi conſiſte, ce me ſemble, la Métaphyſique du calcul des infiniment petits, tel que l'a donné M. Leibnitz. La méthode de M. Newton eſt au contraire tout à fait rigoureuſe ſoit dans les ſuppoſitions, ſoit dans les procédés du calcul. Car il ne conçoit qu'une ſecante devienne tangente, que lorſque les deux points d'interſection viennent tomber l'un ſur l'autre, & alors il rejette de ſes formules toutes les quantités que cette condition rend entiérement nulles. Cette méthode exige abſolument qu'on regarde comme évanouiſſantes, c'eſt à dire comme nulles, les quantités dont on cherche les premieres, ou derniéres raiſons; & c'eſt ce qui rend ſouvent les démonſtrations longues, & compliquées. La ſuppoſition des infiniment petits ſert à abrégér, & à facilitér ces démonſtrations: mais ce n'eſt qu'après avoir prouvé en général que l'erreur qu'elle fait naitre eſt toujours corrigée par la maniére dont on mânie le calcul, qu'il eſt permis de regarder les infiniment petits comme des réalités, & de les emploïer comme tels dans la ſolution des problemes.

NOTE DE M. DE LA GRANGE.

des sections coniques approuvé par l'Académie Roiale des sciences de Paris sur le témoignage de M. Cassini & D'Alembert. Après avoir établi (n. 89.) que les asymptotes de l'hyperbole prolongées à une très-grande distance, deviennent sensiblement tangentes à cette courbe, il ajoute „ si l'on objectoit que ceci contredit le num. 46., où „ l'on a démontré que les asymptotes de l'hyperbole prolongées tant que l'on voudra, ne rencontreront jamais „ cette courbe, on observera que les asymptotes ne deviennent tangentes, que dans le cas où elles seroient „ actuellement prolongées à l'infini ; mais ce cas étant „ impossible, c'est comme si l'on disoit qu'après un très-„ grand prolongement, elles approcheront si fort d'être „ tangentes, que leur différence des tangentes réelles sera „ insensible, & non pas plus petite qu'aucune grandeur „ donnée. (*Il faut entendre qu'aucune grandeur donnée possible, car il est également vrai qu'il n'y a qu'une quantité infiniment petite, si elle pouvoit exister, qui soit plus petite qu'aucune grandeur donnée possible ; & que quelque petite que soit une grandeur actuellement donnée, on en peut toujours trouver une plus petite, qui dès lors deviendra donnée, & ainsi à l'infini. Ce qui fait disparoître la contradiction apparente de ces différentes expressions*). Car ceci ne pourroit avoir lieu „ que dans l'infini, c'est à dire qu'au fond il est im-„ possible qu'il ait lieu. Ainsi, quand pour démontrer „ l'égalité de deux grandeurs, on se sert de ce principe, „ que *deux quantités doivent nécessairement être égales, si* „ *leur différence est plus petite qu'aucune grandeur donnée*, „ il faut bien distinguer si la limite dont les deux quanti-„ tés approchent continuellement est dans le fini, où dans „ l'infini ; dans le premier cas il y aura égalité, parce „ qu'on démontrera l'impossibilité d'assigner aucune diffé-„ rence ; mais dans le second cas, il en ira autrement, „ vû que la limite étant supposée à une distance infinie,

„ c'eſt comme s'il n'y avoit point de limite; donc le „ terme de comparaiſon manquant, le principe n'a plus „ lieu, & ſe fonder deſſus eſt donner dans un paralogiſme „ très-certain, qui conduiroit à cette contradiction mani- „ feſte, *que les aſymptotes de l'hyperbole ne peuvent jamais „ rencontrer cette courbe, & que cependant elles la rencon- „ trent*. J'ai inſiſté la deſſus, conclût M. de la Chapelle, „ en faveur des commençants, qui pourroient à cette oc- „ caſion ſuſpecter le principe de *l'égalité de deux gran- „ deurs, dont la différence eſt démontrée plus petite qu'au- „ cune grandeur donnée*; d'autant plus que je ne connois „ aucun Géométre qui ait fait attention à la néceſſité de „ ſauver les apparences de la contradiction alléguée. Telle eſt auſſi, comme on l'a vu, l'idée qu'en donne M. D'Alembert lui même au mot aſymptote de l'Enciclop. & Volf ne s'énonce pas autrement ſur le même ſujet dans ſes éléments de Mathématique.

Il eſt d'ailleurs bien aiſé de faire voir qu'en ſuppoſant comme réel ou poſſible ce prolongement de l'hyperbole à l'infini abſolu, où l'aſymptote devient tangente, on ne peut éviter de tomber en des contradictions manifeſtes.

1. L'aſymptote, comme le dit M. de l'Hopital, ne devient tangente, qu'à l'extrémité de la courbe. Donc pour vérifier cette ſuppoſition, il faut allier ces deux choſes, que l'hyperbole ſoit actuellement infinie, & que pourtant elle ait une extrémité. Or l'idée d'une extrémité quelconque ne détruit-elle pas l'idée de l'infinité? Mais ce n'eſt encore ici qu'un argument métaphyſique.

2. Il eſt démontré que la tangente de l'hyperbole eſt coupée en deux parties égales au point du contact. Donc l'aſymptote devenüe tangente infinie devroit auſſi être partagée au point du contact en deux parties égales. Car cette propriété ſubſiſtant immuablement dans tout le cours indéfini de l'hyperbole, il n'eſt pas poſſible qu'elle man-

que

que tout à coup. Par conſéquent ſi on veut ſuppoſer que l'aſymptote ſoit tangente à l'extrémité de l'hyperbole infiniment prolongée, il faut ſuppoſer auſſi que depuis cette extrémité où l'hyperbole n'arrive qu'après un cours infini, l'aſymptote s'étend encore infiniment au delà, afin que la partie qui eſt au delà du contact, ſoit égale à celle qui eſt en decà. Qu'on ne s'imagine pas que je veuille ici me récrier ſur l'idée de l'infini double d'un autre infini. Ce n'eſt pas là ce qui fait la difficulté. Elle conſiſte en ce que d'un côte l'aſymptote ne peut toucher l'hyberbole qu'à ſon extrémité, ainſi que le dit M. de l'Hopital, lorſque l'hyperbole a pris tous ſes accroiſſemens finis poſſibles; & qu'au contraire l'aſymptote loin d'être à ſon extrémité, ne ſe trouve qu'à la moitié de ſon cours. Or cela paroit être contre la nature de l'hyperbole. Il ſuffit de conſidérer cette courbe dans le cone, pour appercevoir qu'elle doit s'étendre autant que l'aſymptote.

3. Pour que l'aſymptote touche l'hyperbole, il faut ſuppoſer l'hyperbole entre deux extrémités; l'une eſt le ſommet dont elle part; l'autre le point du contact au delà duquel il n'eſt pas poſſible que la courbe puiſſe être continuée; car ſi elle étoit continuée au delà de ce point, elle devroit couper l'aſymptote contre la ſuppoſition. On n'évite point cette difficulté en diſant avec Fontenelle qu'une quantité infinie ne peut plus augmenter par des quantités finies, mais qu'elle peut être encore augmentée par des quantités infinies. Car en ſuppoſant une portion infinie de courbe ajoutée à cette extrémité du contact, il ne ſeroit pas moins vrai de dire que cette courbe couperoit la tangente au point du contact. Ce qui répugne.

4. Il eſt démontre, (art. 95., de l'Hopital fig. 40.) que ſi l'on mene par un point quelconque N de l'hyperbole, une ligne droite $L\,l$ terminée par les aſymptotes, & qui la rencontre en un autre point n, les parties $L\,N$, $l\,n$ pri-

prises entre les points de l'hyperbole, & la rencontre des asymptotes seront égales entr'elles. Maintenant que du point *N* pris à volonté près du sommet de l'hyperbole, on tire une ligne *L l* qui aille aboutir à l'extrémité, où se fait le contact de l'asymptote infinie, on devra encore trouver *l n* égale a *L N* entre la courbe & l'asymptote. Ce qui répugne à l'idée du contact.

Il paroit qu'on ne peut éviter cette difficulté qu'en disant qu'à cette extrémité la partie *l n* coincide soit avec la courbe, soit avec l'asymptote; mais alors cette partie *l n* étant toute appliquée & sur la courbe & sur l'asymptote, il s'en suivroit que le contact ne se feroit plus en un point, mais dans tout la longueur de la partie *l n*, ce qui n'est pas moins absurde. Je ne crois pas qu'une preuve de cette nature s'éloigne beaucoup d'une rigoureuse démonstration.

Cette partie *l n*, qui déborde toujours doit faire le même effet que dans la conchoide, & empêcher irrevocablement que l'asymptote ne vienne jamais se joindre à l'hyperbole.

CINQUIÉME PREUVE.

Tirée des progressions croissantes infinies.

J'Ai proposé quelques idées sur ce sujet dans mon essai pag. 18. & suiv. Voici quelques autres réflexions que je soumets également au jugement impartial des lecteurs éclairés.

M. l'Abbé de la Caille dans ses leçons de Mathématique si justement estimées, traitant des propriétés de la grandeur considerée dans l'infini, établit d'abord que la grandeur est divisible à l'infini; il le démontre par l'essence même de la grandeur qui est d'être susceptible de plus

&

& de moins, & il ajoute : *par exemple la ſuite naturelle des nombres* 1. 2. 3. 4. *croit évidemment à l'infini ; car à quelque grand nombre qu'on conçoive élévé un terme de cette ſuite, on ne voit pas pour cela que l'on ſoit plus près de la fin, ce qui ne peut convenir à une ſuite dont le nombre des termes ſeroit fini.*

L'expreſſion eſt très-juſte ; mais un eſprit peu juſte pourroit en abuſer, & s'imaginer que la ſuite naturelle des nombres ne pourroit croître à l'infini, s'il n'exiſtoit déja comme une infinité actuelle de nombres, dont l'eſprit pût tirer comme d'un reſervoir immenſe tous les nombres qu'il ajoute ſucceſſivement à la ſuite naturelle. Cette idée, diſ-je, ne ſeroit pas aſſès juſte. Pour former la ſuite naturelle & pour l'augmenter à l'infini, l'eſprit n'a pas beſoin d'emprunter des nombres tous faits, comme on tire d'un coffre fort les monnoyes qu'on veut dépenſer. L'eſprit forme la ſuite naturelle par la puiſſance qu'il a de répéter ſes idées, & d'ajouter ainſi unité à unité. Et comme rien ne limite l'exercice ſucceſſif de cette puiſſance, il eſt clair que la ſuite naturelle des nombres, peut croître à l'infini par l'addition d'unité à unité ſans être jamais bornée.

Cette operation eſt analogue à celle, par laquelle l'eſprit peut diviſer à l'infini une portion de quantité continuë. A meſure que l'eſprit pouſſe plus loin la diviſion, le nombre des parties ſe multiplie ; & comme cette diviſion peut aller à l'infini, les nombres peuvent croître à l'infini. Telle eſt à peu près l'idée que M. l'Abbé de la Caille donne lui même de la formation des nombres : une quantité, dit il, exprimée par des nombres, eſt une quantité qu'on a conçue partagée en pluſieurs parties égales, dont chacune de ces parties conſiderée ſeule s'appelle l'unité : idée qui ne s'éloigne pas de la notion que Newton donne du nombre en le faiſant dépendre de la maniére dont une quantité eſt contenuë dans un autre quantité. Telle étoit

auſſi

auſſi l'idée des anciens, comme je l'ai montré dans ma diſſertation ſur la notion & la diviſibilité de l'étenduë geométrique pour ſervir de réponſe à la lettre que M. Dupuy m'a fait l'honneur de m'addreſſer dans le Mercure de Paris. Les idées que je propoſe dans ce mémoire ne ſont qu'une ſuite des principes que j'ai érabli dans cet écrit, & forment un ſeul corps.

Cette idée de la formation de la ſuite naturelle, idée clàire, & ſimple, parfaitement conforme à la notion qu'en donnent tous les Géométres, ſemble prouver invinciblement que la ſuite naturelle ne peut jamais parvenir à l'infini abſolu.

Cette ſuite commence évidemment par des termes finis 1. 2. 3. &c. donc ſi elle peut parvenir à l'infini abſolu, il faut qu'en un point, ou terme, quelconque de cette ſuite, on paſſe du fini à l'infini; car s'il n'y avoit aucun terme poſſible où la ſuite paſſat du fini à l'infini, il eſt évident qu'elle demeureroit toujours finie.

Or je dis que ce paſſage eſt impoſſible. 1. Si en augmentant les nombres finis, on pouvoit parvenir à un nombre infini, il faudroit que par cette augmentation ſucceſſive les nombres finis s'approchaſſent de plus en plus de l'infini. Car il eſt évident qu'une quantité ne peut atteindre un terme quelconque, ſi elle n'approche peu à peu de ce terme. Or ſelon la remarque de M. l'Abbé de la Caille à quelque grand nombre qu'on conçoive élévé un terme de la ſuite naturelle, on ne voit pas que l'on ſoit plus près de la fin. Donc quelque augmentation que l'on ſuppoſe dans les termes finis, par leſquels commence la ſuite naturelle, on ne ſera pas plus avancé vers le point du paſſage du fini à l'infini, qu'on ne l'étoit au commencement même de la ſuite. Donc la ſuite eſt toujours également éloignée de ce point. Donc il eſt impoſſible qu'elle y arrive jamais.

2. Reprenons le même raiſonnement. Comme la ſuite naturelle commence par des termes finis, ſi elle peut arriver à l'infini abſolu, il faut de toute néceſſité que des nombres finis on paſſe enfin à un nombre infini, c'eſt à dire que dans cette ſuite il y ait un terme quelconque fini, lequel ſoit ſuivi d'un nombre infini. Qu'on nomme x ce nombre fini quelconque : par la propriété de la ſuite naturelle le nombre ſuivant ſera $x + 1$ or x étant fini & $x + 1$ ayant avec ce nombre un rapport fini, ne ſera point encore infini, comme on le ſuppoſe. Et comme il n'eſt aucun terme fini poſſible dans la ſuite naturelle, auquel ce raiſonnement ne puiſſe être appliqué, il n'y a donc aucun terme fini poſſible, qui ne ſoit ſuivi d'un autre terme fini $x + 1$. Il eſt donc impoſſible qu'il s'y trouve aucun terme infini. Donc la ſuite naturelle ne peut jamais paſſer du fini à l'infini abſolu. Ce raiſonnement ne différe pas pour le fond de quelques autres que j'ai déja propoſé; mais dans la matiére dont il s'agit, il n'eſt peut-être pas inutile de préſenter les mêmes idées ſous différentes faces.

3. De là il ſuit que certaines formules concernant les loix de la progreſſion qui ſont très-juſtes dans les nombres finis, ſemblent manquer de l'exactitude néceſſaire, lorſqu'on veut les appliquer à des nombres abſolument infinis.

On lit dans des éléments d'ailleurs très-eſtimés ces propoſitions avec leurs démonſtrations.

La ſomme des unités priſe une infinité de fois eſt un infini du premier ordre, où eſt $= \infty$.

Dem. l'unité priſe une infinité de fois eſt une quantité finie qui a reçeu tous ſes accroiſſements finis poſſibles. Donc &c.

La ſomme des termes de la progreſſion infinie des nombres naturels 1. 2. 3. 4. .... ∞ *eſt un infini du ſecond ordre, & eſt* $= \frac{\infty^2}{2}$.

Dem. cette progreſſion étant infinie, ſon dernier terme eſt ∞, *le nombre des termes qui précédent le dernier eſt* $\infty - 1$. *Si l'on appelle S la ſomme des termes, celle des termes qui précédent le dernier, ſera par conſequent* $= S - \infty$ *&c.*

Arrêtons nous ici, & examinons l'application que l'on fait des loix de la progreſſion à des ſuites ſuppoſées abſolument infinies. D'abord on y reconnoit formellement *un dernier terme* qui eſt $= \infty$; par conſéquent tous les termes qui le précédent ne peuvent être que des nombres finis; car avant que d'arriver à ce dernier terme la ſuite n'a pas encore reçeu tous ſes accroiſſements finis poſſibles. Elle eſt donc encore dans le genre des quantités finies, & ce n'eſt qu'au moment où elle reçoit tous ſes accroiſſements finis poſſibles qu'elle devient infinie. On établit en ſuite que le nombre des termes qui précédent le dernier eſt $\infty - 1$.

Cette maniére d'exprimer les termes d'une ſuite eſt très-juſte, pendant qu'il ne s'agit que de nombres finis. Il eſt clair que ſi l'on fait une progreſſion qui ait un dernier terme $= 10$, le nombre des termes qui précédent, ſera $10 - 1 = 9$ mais cette formule ne peut avoir lieu dans une progreſſion abſolument infinie.

On a vu par l'énoncé même des propoſitions qu'on vient de rapporter, que cette progreſſion a un dernier terme infini, & que le nombre des termes qui précédent le dernier n'aïant pas encore reçeu tous les accroiſſements finis poſſibles, ne peut être infini. Je dis donc que dans cette hipotéſe, on ne peut exprimer le nombre des termes qui précédent le dernier par la formule $\infty - 1$. Car ou cette formule exprime un nombre infini, ou elle n'exprime qu'un nombre fini. Si elle exprime un nombre abſolument infini, donc elle n'eſt pas applicable à un nombre de termes qui n'eſt que fini. Si elle n'exprime qu'un nombre fini, donc un nombre infini devient fini par

la

la soustraction d'une seule unité, & réciproquement un nombre fini devient infini par l'addition d'une seule unité, ce qui répugne.

Dans la progression finie dont le dernier terme est 10, la formule $10-1$ exprime réellement le nombre des termes qui précédent 10, parceque $10-1$ n'est pas 10, mais qu'il devient 10 par l'addition de l'unité. Donc pour conserver l'analogie, si la formule $\infty-1$ doit exprimer le nombre des termes qui précédent ∞, il faut que $\infty-1$ ne soit pas ∞, comme $10-1$ n'est pas 10, & que cette quantité $\infty-1$ qui n'est pas infinie devienne ∞ par la seule addition de l'unité comme $10-1$ devient 10 par l'addition de l'unité. Mais c'est ce qui répugne. Donc &c.

M. l'Abbé Deidié dit qu'on peut évaluer les progressions infinies qui vont en augmentant de la même façon que les décroissantes, & qu'alors on trouve des valeurs infinies dont la connoissance n'est qu'une belle speculation. Mais il ne dévoile pas le defaut des suppositions qui en rendroient les résultats contradictoires, ni dé quelle maniére on doit corriger ces suppositions.

Il ne suit pas delà cependant qu'on doive rejetter les calculs par lesquels on parvient à déterminer les rapports finis qu'ont entr'elles les sommes infinies des suites infinies. Tel est le calcul par lequel on trouve que *la somme d'une infinité de quarrés de termes consécutifs est le* $\frac{1}{3}$ *du produit du dernier quarré multiplié par leur nombre*: *que la somme d'une infinité de cubes consécutifs est le* $\frac{1}{4}$ *du produit du dernier cube par leur nombre &c.* Ces calculs ont leur usage, & il suffit d'en dévéloper la Théorie avec netteté pour s'appercevoir qu'ils ne supposent rien qui ne soit conforme aux idées les plus claires, & les plus simples que nous avons de la grandeur.

Tout nombre peut être la racine de quelque puiſſance que ce ſoit. 2 eſt racine quarrée de 4 & il eſt auſſi racine cubique de 8. Cent eſt racine quarrée de dix mille, & il eſt racine cubique d'un million. Plus la racine eſt grande, plus auſſi la puiſſance ſupérieure eſt grande par rapport à l'inférieure; ainſi le quarrée de 2. eſt la $\frac{1}{2}$ du cube 8, au lieu que dix mille, quarré de cent n'eſt que la $\frac{1}{100}$ partie d'un million qui en eſt le cube. Qu'on augmente la racine, on parviendra à un nombre tel, que ſon quarré ne ſera que la cent millioniême de la cent millioniême partie de ſon cube. Et comme cette progreſſion n'a aucune borne, la fraction qui exprimera le rapport du quarré au cube pourra toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée quelque petite qu'elle ſoit.

La formule pour ſommer tant de quarrés des termes conſecutifs qu'on voudra eſt celle-ci $\int^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$ où a ſignifie le premier, & ω un dernier terme. Or a, & ω étant de termes déterminés la formule eſt d'une exactitude rigoureuſe. Quand on fait la ſuite infinie, on ſubſtitue ∞ ſigne de l'infini à la place du dernier terme exprimé par ω, & l'on a $\int^2 = \frac{1}{3}\infty^3 + \frac{1}{2}\infty$ &c. & alors la formule ſe réduit à $\int = \frac{1}{3}\infty^3$ à cauſe que tous les autres termes ſont conſidérés comme infiniment petits à l'égard de $\frac{1}{3}\infty^3$.

D'abord il eſt clair que la formule ainſi réduite n'eſt pas d'une exactitude tout a fait rigoureuſe puiſqu'on néglige des termes poſitifs portés par le calcul. Il eſt vrai que ces termes peuvent être conſidérés comme infiniment petits à l'égard du premier, mais il ne ſont pas abſolu-

ment

ment nuls, ce ſont des quantités réelles & poſitives & non zéro abſolu.

Cela ſuppoſé pour conſerver à ces formules toute l'exactitude dont elles ſont ſuſceptibles, il n'eſt point néceſſaire d'admettre des cubes, ou des quarrés abſolument infinis repréſentés par ∞^3 ∞^2. Car enfin entend-on ce que l'on dit, quand on nomme un dernier cube, un dernier quarré, & qu'on nomme infini ce dernier cube, ce dernier quarré, comme s'il pouvoit y avoir un dernier terme dans une progreſſion, qui ne peut avoir de fin?

Il faut donc exprimer par ce ſigne ∞ non une quantité abſolument infinie, mais une quantité indéterminée, conçue comme ſurpaſſant en grandeur quelque quantité finie donnée que ce ſoit, quelque grande qu'on l'imagine. Puis que la progreſſion des nombres naturels n'a certainement point de fin, il eſt viſible qu'après avoir aſſigné un terme fini quelque grand qu'il ſoit, on pourra toujours trouver un terme plus grand à l'infini, il y a donc des quantités indéterminées conçues comme plus grandes que quelque quantité finie qu'on puiſſe déterminer. Maintenant qu'on exprime cette ſorte de quantités par ∞, qu'on en faſſe le quarré ∞^2, & le cube ∞^3, cette expreſſion fera connoître que quelque petite que ſoit une fraction qui exprime le rapport d'un quarré à un cube, on pourra toujours trouver entre ces quarrés & ces cubes indéterminés un rapport exprimable par une fraction toujours plus petite à l'infini.

On voit par cette raiſon pourquoi on peut, & j'oſe même dire qu'il faut retrancher de la formule les termes qui ſuivent le premier. Si ∞^3 & ∞^2 ſignifioient un dernier cube, & un dernier quarré au delà deſquels il ne pût plus y avoir ni de cubes, ni de quarrés, la fraction $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$ qui exprimeroit le rapport de ce dernier quarré

à ce

à ce dernier cube ne seroit plus susceptible de diminution. On pourroit bien ainsi négliger dans la formule les termes suivants $\frac{1}{3} \infty^2$ &c. parceque ce seroient des quantités infiniment petites à l'égard du premier $\frac{1}{3} \infty^3$, cependant ces termes n'étant pas absolument nuls, la formule ne seroit pas rigoureusement exacte.

Mais si ∞^3 & ∞^2 représentent non un dernier cube, ni un dernier quarré absolument infinis, mais plutôt une suite indéterminée de cubes & de quarrés, qu'on peut toujours supposer en vertu de leur indéfinie progression plus grands, qu'aucun cube, & qu'aucun quarré donnés, quelques grands qu'on les suppose, alors on verra clairement pourquoi dans la formule il faut retrancher les termes, qui suivent le premier. Ces termes subsistants dans la formule dénotent toujours un rapport quelconque entre le quarré, & le cube, rapport exprimable par une fraction quelque petite qu'elle soit. Cette fraction se trouveroit ainsi fixée par la formule même. Or ∞^3 & ∞^2 exprimant une suite de cubes, & de quarrés indéterminés toujours susceptibles d'une nouvelle augmentation au delà de quelque terme qu'on puisse imaginer, la fraction qui exprime leur rapport ne peut jamais être fixée, mais quelque petite qu'on la suppose, on peut toujours la prendre moindre à l'infini. Or on ne peut mieux exprimer le cours de cette diminution possible au delà de tout terme donné, qu'en retranchant les termes, qui en borneroient le décroissement successif, & c'est ce que l'on fait en quelque sorte en retranchant de la formule ci dessus les termes qui suivent le premier.

Ainsi l'équation de la formule réduite $f^2 = \frac{1}{3} \infty^3$ ne doit pas être regardée comme une égalité entre deux termes fixes, & permanents de part, & d'autre, tels que seroient deux termes finis, & déterminés, mais plutôt comme la fluxion de deux termes considérés dans un cours indéfini d'au-

d'augmentation, où leur disproportion peut toujours être trouvée moindre qu'aucune quantité donnée.

La notion de ce signe ∞ pris non pour l'infini absolu considéré dans un état fixe, & permanent, mais pour une grandeur indéterminée surpassant tout ce que l'imagination peut embrasser, & conçue comme pouvant s'étendre encore indéfiniment au delà, paroit très-conforme à la maniére dont les suites infinies se présentent à notre esprit. Tachons d'en donner une idée claire, en exposant ce qui se passe en nous mêmes, lorsque nous nous attachons à considérer une progression infinie : nous trouverons qu'à cet égard il en est à peu près des operations de l'esprit comme de celles des sens.

Lorsque du haut d'une colline on jette les yeux sur une vaste plaine dont la vüe ne peut embrasser toute l'étendue, on n'a pas de peine à distinguer les premiers objets qui se présentent & à en reconnoitre le nombre & la situation. Mais à mesure qu'ils s'éloignent, on commence à les confondre, nous les perdons de vüe, sans pouvoir discerner quel est le dernier dans cette confuse multiplicité, qui se dérobe à nos regards : nous cessons de voir, sans que rien paroisse terminé, & ces objets qui nous fuïent, ne nous échappent qu'en nous paroissant s'étendre & se perdre à un éloignement, où notre vüe s'égare, & se confond.

C'est à peu près ce qui nous arrive quand nous entreprenons de suivre des yeux de l'esprit une progression infinie. Nous n'avons pas de peine à distinguer nettement les termes représentés par des signes, qui nous sont familiers, & dont nous appercevons tout d'un coup la liaison, & les rapports. Mais aussitôt que l'usage de ces signes commence à devenir trop compliqué; nous n'appercevons plus que d'une vüe confuse cette suite de termes ; nous les reculons autant que nos conceptions peuvent s'étendre : &

en les considérant de ce lointain, nous les voyons se dérober à notre vüe, sans que nous puissions fixer aucun dernier terme, qui borne la suite que nous envisageons; nous n'appercevons plus qu'une multiplicité de termes qui faute de signes distincts se confondent à nos yeux, & nous sentons seulement que rien ne peut arrêter leur progression indéfinie.

C'est donc une illusion d'imaginer dans une suite infinie un dernier terme quelconque, comme un point fixe placé à un éloignement infini, dont l'esprit pourroit franchir l'intervalle par des operations multipliées à l'infini. Ce prétendu point fixe n'est au contraire qu'un point mobile, qui recule à mesure que l'esprit avance, & qui se trouve toujours à un égal éloignement, semblable à ces points lumineux que les raïons du soleil réfléchis de dessus la glace d'un miroir vont tracer sur les objets éloignés: envain celui qui tient le miroir précipiteroit ses pas pour en approcher! Autant qu'il avance, d'autant il les recule.

Maintenant il est bien aisé de faire voir la contradiction où l'on s'engage en supposant ∞^3 & ∞^2 comme le dernier cube, & le dernier quarré de la suite naturelle poussée à l'infini. S'ils sont les derniers, on ne peut donc en supposer des plus grands, c'est à dire qu'il ne peut y avoir de plus grand cube que le cube infini représenté par ∞^3 ni de plus grand quarrés que le quarré infini représenté par ∞^2. Mais si l'on peut tirer la racine cubique du terme infini ∞^3, on peut aussi en tirer la racine quarrée, & quand même ∞^3 ne seroit pas un quarré parfait, il est évident que la racine du quarré plus approchant, doit être infiniment plus grande que $\sqrt{\infty^2}$, donc le quarré qui résultera de la racine $\sqrt{\infty^3}$ sera infiniment plus grand que ∞^2, donc entre ces deux termes, il y aura encore une infinité de quarrés, par conse-

ſéquent la ſuite naturelle pourra encore fournir une infinité de quarrés après ∞^2. Donc ce n'eſt pas le dernier de cette ſuite, contre la ſuppoſition.

Voici enfin une preuve que je crois démonſtrative contre la ſuppoſition de la ſuite naturelle pouſſée à l'infini abſolu. Les Auteurs expriment cette ſuppoſition en ces termes, ſavoir que la ſuite naturelle aïant pris tous ſes accroiſſements finis poſſibles devient infinie, & qu'alors ſon dernier terme eſt ∞. Je dis que cette ſuppoſition renverſe des propoſitions inconteſtables touchant les progreſſions arithmétiques, entre leſquelles eſt la ſuite naturelle des nombres. Il eſt démontré que dans une progreſſion arithmétique la ſomme des extrémes eſt égale à la ſomme des moyens. Dans la ſuppoſition que nous combattons ici la ſomme des extrémes eſt $1 + \infty$ nommant donc n un terme moyen, cette ſomme ſera égale à $n + n + 1$, ou ſi l'on veut $1 + \infty = 2n$. Donc $n = \frac{1 + \infty}{2} = \frac{\infty}{2}$. Ce terme moyen ſera donc infini, mais la ſuite naturelle par la ſuppoſition, n'eſt infinie que quand elle a reçu tous ſes accroiſſements finis poſſibles; & elle ne peut avoir reçu tous ſes accroiſſements finis poſſibles, quand elle n'eſt encore qu'à la moitié de ſon cours. Donc &c.

Bornons maintenant la ſuite naturelle à ce terme trouvé $\frac{\infty}{2}$. La ſomme des extrémes $1 + \frac{\infty}{2}$ ſera égale à $2x$ (x ſignifiant le nouveau terme moyen) & par conſéquent $x = \frac{\infty}{4}$ qui ſera encore un terme infini trouvé à la quatriéme partie du cours de la ſuite naturelle. Qu'on revienne toujours en arriére, & en remontant vers l'unité de la même façon; on trouvera une infinité de termes infinis pour former les termes décroiſſants de la ſuite naturelle

relle depuis l'infini juſqu' à l'unité: ſerie bien différente de celle par laquelle de l'unité on s'éléve vers l'infini. Ce ne ſera même qu'aprés une infinité de termes, & qu'après avoir épuiſé les fractions $\frac{\infty}{4}$ $\frac{\infty}{8}$ &c. toujours en ſe rapprochant de l'unité, qu'on parviendra à la fraction $\frac{\infty}{\infty} = 1$. C'eſt a dire qu'en redeſcendant de l'infini absolu par tous les dégrés de la ſuite naturelle juſqu'à l'unité, tous les termes ſe trouveroient infinis à l'exception de l'unité ſeule.

Il me paroit que cette conſidération ſuffit pour faire ſentir que le fini, & l'infini dans la grandeur ſont, pour ainſi dire, des quantités hétérogénes, qu'il eſt impoſſible de jamais rapprocher, en ſorte que de l'une on puiſſe paſſer à l'autre.

SIXIÉME PREUVE

Tirée des progreſſions décroiſſantes à l'infini.

SOit la ligne (*fig.* 4.) $AB = 1$. Si on coupe cette ligne en deux parties égales au point C, & qu'on partage de même la moitié CB au point D, & ainſi de ſuite, on aura une progreſſion géométriquement décroiſſante en raiſon ſousdouble, formée par la ſuite des diviſions, & ſousdiviſions de la ligne AB, progreſſion qu'on exprime de cette ſorte $1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$ &c.

Ainſi dire que cette progreſſion décroiſſante peut aller à l'infini, ce n'eſt dire autre choſe, ſi non que la diviſion de la ligne AB en parties ſous doubles peut aller à l'infini.

Mais comme une telle diviſion ne peut jamais être actuellement effectuée en entier, la progreſſion qui en réſulte

ſulte ne peut non plus jamais parvenir à un dernier terme qui la termine. C'eſt ce que Tacquet démontre rigoureuſement dans ſes remarques ſur la XI propoſition du 6. livre d'Euclide.

Lors donc que pour évaluer la ſomme d'une progreſſion décroiſſante à l'infini, on écrit $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} \ldots . 0$; ce n'eſt pas que le vuide marqué par les points tracés entre $\frac{1}{8}$ par exemple & zéro, doive être conçu comme rempli par une ſuite actuellement infinie de termes diſtincts, qui ſe ſuccèdent les uns aux autres, juſqu'à un dernier de tous. Si cela étoit, il faudroit, qu'entre zéro, & le terme qui le précéderoit immédiatement il y eut le même rapport qui ſe trouve entre le conſéquent $\frac{1}{8}$ & ſon antécédent $\frac{1}{4}$. Or il eſt viſiblement abſurde de ſuppoſer un rapport ſous double entre zéro, & une quantité poſitive quelconque.

Ainſi par une progreſſion décroiſſante infinie il faut entendre une ſuite dont le cours ne peut jamais être borné, mais non une ſuite, qui après un cours actuellement infini, ſe trouve complette & compoſée d'une infinité de termes placés ſucceſſivement l'un après l'autre, & rangés par ordre depuis le premier juſqu'à zéro. Ces deux idées ſont très différentes, & il importe extrémement de ne pas les confondre.

On pourroit objecter que le calcul qu'on emploie pour déterminer la ſomme d'une progreſſion décroiſſante infinie, ſemble ſuppoſer une ſuite de termes diſtincts, qui aillent en diminuant juſqu'à zèro. Telle eſt dans le cas préſent la formule $1 - \frac{1}{2} : \frac{1}{2} :: 1 - 0 : S.$ ou zéro eſt emploié de la même maniére que le ſeroit un nombre poſitif quelconque, s'il s'agiſſoit d'une progreſſion finie.

On citera même un Géométre, qui après avoir reconnu qu'une progreſſion décroiſſante ne peut avoir aucune borne, non plus que la diviſibilité de la grandeur, ſemble

pourtant reconnoître la néceſſité d'aſſigner un dernier terme à la progreſſion décroiſſante infinie, pour en évaluer la ſomme, en diſant que comme le premier terme moins le ſecond, eſt au ſecond; ainſi le premier terme moins le dernier, *qui eſt presqu'égal à zéro* eſt à la ſomme de ceux qui le ſuivent.

Mais la juſteſſe de ce calcul ne dépend aucunement de ces ſuppoſitions peu exactes. Les Géométres qui ont ſuivi la méthode rigoureuſe des anciens, en ont établi les principes à un langage qui a toujours beſoin d'être ramené à la preciſion. C'eſt ce qu'a fait Tacquet Arith. l. 5. c. 4.

Qu'on me permette de propoſer en peu de mots quelques idées relatives à ce ſujet. Quoique la ligne AB puiſſe être diviſée à l'infini par une ſuite de diviſions en parties ſousdoubles, il eſt clair cependant que cette ſuite de diviſions a une limite qu'elle ne peut paſſer, & cette limite eſt l'extrémité même de la ligne AB. Ce point B ſera donc auſſi la limite de la progreſſion qui réſulte de cette ſuite de diviſions.

D'où il ſuit que quand on ſuppoſeroit, que la ligne AB eut pû recevoir toutes ſes diviſions poſſibles, ce pendant l'aſſemblage de cette infinité de parties ne pourroit former que cette même ligne AB; & les termes de la progreſſion n'étant autres que ces mêmes parties qui réſultent de la diviſion de la ligne AB, il s'en ſuit que la ſomme de tous ces termes, quand on les ſuppoſeroit entiérement dévélopés, ne pourroient non plus former que cette même ligne AB.

L'évaluation d'une progreſſion décroiſſante infinie, conſiſte à trouver l'eſpace, ou le chemin qu'elle devroit parcourir pour atteindre à la limite où elle tend, & où elle arriveroit, ſi ſon cours pouvoit jamais être terminé; ou ce qui revient au même à trouver la quantité finie,

qui

qui par une ſuite de diviſions, & de ſousdiviſions en une raiſon donnée fournit & détermine à l'infini les termes de cette progreſſion.

Or pour trouver cette quantité par le calcul, il n'eſt point du tout néceſſaire de ſuppoſer que la progreſſion ait pris actuellement tous les termes dont elle eſt ſuſceptible: il ſuffit de connoître le rapport des deux premiers termes, rapport qui devant recevoir la ſuite de ſes termes devroit aboutir, quand on pourroit la dévéloper entiérement.

Dans une progreſſion finie comme le premier terme, moins le ſecond eſt au ſecond, ainſi le premier moins le dernier eſt à la ſomme de ceux qui le ſuivent. Dans une progreſſion infinie il n'y a point réellement de dernier terme. On dira donc, comme le premier terme moins le ſecond eſt au ſecond, ainſi le premier eſt à la ſuite de tous ceux qui le ſuivent: c'eſt à dire dans l'exemple précédent comme $AB - CB : CB :: AB$, à la ſomme de tous les termes qui le ſuivent. AB repréſente toute la ſuite des antécédents, parceque quand on ſuppoſeroit cette ſuite entiérement dévélopée, elle ne pourroit s'étendre au delà du point B qui lui ſert de limite, & tous ſes termes ne pourroient former que cette même ligne AB dont l'étendüe eſt donnée. Or AB conſidéré comme premier terme de la ſuite doit avoir à la ſomme de tous ceux qui le ſuivent le même rapport qu'il y a entre $AB - CB$ & CB. Ce rapport eſt connu, le premier terme eſt donné; la quantité qui réſulteroit de cette ſuite infinie de conſéquents ſera donc connue, ſans qu'il faille ſuppoſer qu'elle ait jamais pû recevoir tous ſes termes poſſibles.

La poſition d'un dernier terme quelconque quoique ſuppoſé *près qu'égal a zéro*, nuiroit à la juſteſſe du calcul. Soit xB. (*fig* 5.) ce dernier terme. Donc $AB - xB = Ax$

re-

repréſentera toute la ſuite des termes ſuivants. Donc elle ſeroit bornée au point x; ce qui eſt contre la nature de cette progreſſion qui doit paſſer le point x, & tendre à l'infini vers la limite B.

Tachons d'éclaircir les difficultés qui peuvent reſter par l'application de cette Théorie à quelque exemple connu, telle qu'eſt la ſolution du fameux probléme de Zénon. Quand on...diſoit Zénon, qu'Achille aille dix fois plus vite Achille ne pourra l'atteindre: car tandis qu'Achille parcourra cette lieüe, la tortüe fera la dixiéme de la ſeconde lieüe, & tandis qu'Achille fera la dixiéme de la ſeconde lieüe, la tortüe fera la dixiéme de cette dixiéme, & ainſi à l'infini.

Il y a deux maniéres de reſoudre cette difficulté, l'une en tirant du rapport des viteſſes des deux mobiles une équation, qui faſſe connoître le terme où Achille doit atteindre la tortüe. Feſant donc une lieüe $= 1$ & nommant x le chemin que la tortüe aura parcouru lorſqu'Achille la rencontrera, on aura $1 + x$ pour exprimer le chemin de la tortüe, & comme Achille va dix fois plus vite, $10x$ exprimera le chemin parcouru en même tems par Achille, & par conſéquent $10x = 1 + x$, & en réduiſant $x = \frac{1}{9}$ de lieüe; ce qui fait connoître qu'au bout d'une neuviéme de lieüe, Achille atteindra la tortüe. Ce point ſera par conſéquent la limite, où la diſtance des deux mobiles allant avec les viteſſes données doit s'évanoüir, & où l'un doit par conſéquent atteindre l'autre.

La ſeconde maniére conſiſte à déterminer la ſomme de la progreſſion décroiſſante infinie $1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100}$, pour voir le chemin que feroit la tortüe en ſuppoſant qu'elle parcourut l'une après l'autre toutes ces dixiémes de dixiéme à l'infini, & qu'elle ſeroit par conſéquent la limite de l'eſpace, que toutes ces dixiemes devroient former par leur

reunion

réunion, en ſuppoſant que cet eſpace pût être diviſé par les pas de la tortüe en une infinité de parties ſous décuples. On fait donc cette proportion : comme le premier terme moins le ſecond, eſt au ſecond ; ainſi le premier terme moins le dernier eſt à la ſomme de ceux qui le ſuivent. Mais une progreſſion infinie ne devant point avoir de dernier terme, & ſa diſtance de la limite où elle tend pouvant diminuer au delà de quelque quantité que ce ſoit, quelque petite qu'on la ſuppoſe, on dira $1 - \frac{1}{10} : \frac{1}{10} :: 1 - 0$, ou ſimplement $1 : f$. d'où l'on tire $9 : 1 :: 1 . \frac{1}{9}$. Ce qui redonne préciſement l'eſpace x trouvé par la premiere méthode. Cette formule nous apprend que comme une lieüe, moins un dixiéme de lieüe, eſt à un dixiéme de lieüe, ainſi une lieüe eſt à une portion de lieüe, telle qu'on pourroit la diviſer à l'infini par une ſuite de diviſions, & de diviſions en parties ſous décuples ; en ſorte que quand on pourroit dévéloper actuellement toutes ſes parties, & les réunir de nouveau, elles ne formeroient que cette même portion d'eſpace ou cette neuviéme de lieüe.

L'artifice conſiſte donc moins à trouver la ſomme d'une progreſſion par l'addition d'une infinité de termes, qu'à trouver d'un ſeul coup par des rapports connus la quantité finie qui eſt ſuſceptible d'une telle progreſſion.

C'eſt de quoi l'on ſe convaincra de plus en plus en liſant les judicieuſes réflexions, que l'Abbé Deidié ajoute à la ſolution du probléme de Zénon. „ L'argument de „ Zénon, dit-il, ne pouvoit conclure, qu'en ſuppoſant de „ deux choſes l'une, ou qu'Achille devoit emploïer une „ infinité de pas pour faire la premiere lieüe auquel cas „ il ne ſeroit jamais venu à bout de la faire ; ou que les „ pas qu'il faiſoit en parcourrant le $\frac{1}{10}$ du dixiéme, de- „ venoient encore dix fois plus petits, & ainſi de ſuite, „ auquel cas il eſt ſur qu'il n'auroit jamais pû attein-

„ dre

„ dre la tortüe ..... mais comme l'une & l'autre de „ ces ſuppoſitions ſont auſſi ridicules qu'impoſſibles, n'y „ aïant point d'homme qui ſoit obligé de faire une infi- „ nité de pas pour faire une lieüe, ni dont les pas puiſ- „ ſent devenir de dix fois en dix fois plus petits à l'in- „ fini, il s'en ſuit que le raiſonnement de Zénon n'eſt „ qu'un ſophiſme &c. Mais me dirat-on peut-être, vous „ ſuppoſés que la tortüe puiſſe faire $\frac{1}{9}$ de lieüe, ce qui „ n'eſt pas poſſible, puiſque pour faire ce $\frac{1}{9}$ il faut par- „ courir une progreſſion infinie $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ &c., autre ſophiſme „ auſſi puerile que le premier. Si les pas de la tortüe al- „ loient en diminuant à chaque $\frac{1}{10}$ de la même façon que „ ces $\frac{1}{10}$, à la bonne heure, mais comme cette ſuppoſi- „ tion eſt chimérique, il eſt tout auſſi facile &c.

Ainſi tant s'en faut que la détermination de la ſomme d'une progreſſion décroiſſante infinie, ou ce qui revient au même de l'eſpace que cette progreſſion devroit parcourir en la continuant à l'infini, tant s'en faut, dis-je, que cette détermination dépende du dévéloppement actuel de tous les termes dont elle eſt ſuſceptible, qu'au contraire on n'y arriveroit jamais, s'il falloit y parvenir par la voye de ce dévélopement.

La Théorie des progreſſions n'eſt donc fondée que ſur des principes inconteſtablement vrais, que toute grandeur eſt diviſible à l'infini par une ſuite quelconque de diviſions, & de ſouſdiviſions en parties ſous multiples, que cette ſuite, & la progreſſion qui en réſulte pouvant continuer à l'infini, ne peut être bornée par aucun dernier terme, que dans ſon cours indéfini elle avance continuellement vers la limite où elle tend, ſans pouvoir s'etendre au delà, qu'en ſuppoſant enfin par une ſorte de fiction, que tous les termes dont la progreſſion eſt ſuſceptible, fuſſent actuellement dévélopés, l'aſſemblage de tous ces termes ne formeroit que la quantité même

qu'ils

qu'ils ont diviſée, & qui les a produit par la diviſion de ſes parties. Mais cette Théorie ne ſuppoſe rien qui prouve la néceſſité d'admettre la poſſibilité du dévélopement actuel d'une infinité de termes ſucceſſifs, ou coexiſtants placés entre le premier terme de la progreſſion & zéro; en ſorte que la ſuite ſoit compoſée d'un nombre de termes actuellement infini.

DERNIERE PREUVE

Tirée des méthodes d'approximation.

J'Oſe même dire qu'un probléme dont la ſolution dépendroit de ce dévélopement actuel, ou de la poſition d'un terme quelconque infiniment éloigné du premier terme, & par conſéquent infiniment petit, deviendroit par cela même impoſſible. La méthode des approximations à l'infini de la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas quarré parfait, en fournit un exemple ſtappant, & ſera une nouvelle preuve de l'impoſſibilité d'une ſuite compoſée d'un nombre de termes actuellement infini.

Il eſt démontré, que ſi un nombre n'eſt pas un quarré parfait, on ne ſauroit en tirer la racine exacte en nombres entiers ou rompus. Il eſt encore démontré que par une ſuite infinie de fractions, comme $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000}$ &c. emploiées ſuivant des méthodes connües, on peut approcher à l'infini de la racine cherchée, de ſorte qu'en continuant l'operation, l'on trouvera toujours une valeur ſi approchante de la racine exacte, que la différence ſoit moindre qu'aucune quantité donnée., quelque petite qu'elle ſoit.

Cela ſuppoſé ſi cette ſuite de fractions pouvoit arriver à l'infini abſolu, c'eſt à dire à un terme infiniment éloigné du premier, & dont le dénominateur fut infiniment grand, la différence entre la valeur trouvée par cette approximation infinie, & celle de la racine cherchée deviendroit infiniment petite, & s'évanouiroit enfin. Donc l'on pourroit parvenir à la valeur exacte de la racine cherchée. Or les Géométres démontrent que cette valeur exacte eſt réellement impoſſible, il s'en ſuit que toute ſuppoſition au moyen de laquelle on y arriveroit, doit être cenſée impoſſible. Mais la ſuppoſition d'une ſuite de fractions pouſſée juſqu'à l'infini abſolu, donneroit cette valeur. Donc une telle ſuppoſition répugne. Et par conſéquent l'impoſſibilité abſolüe de trouver une valeur exacte de la racine en queſtion, prouve l'impoſſibilité de toute fraction dont le dénominateur ſeroit infiniment grand.

Ces réflexions me paroiſſent préſenter le dénouement d'un paradoxe apparent. S'agit-il de trouver une grandeur déterminée par l'évaluation d'une progreſſion décroiſſante infinie, le calcul la donne exactement. S'agir-il de trouver une grandeur déterminée par le moyen d'une approximation infinie, le calcul ne la peut donner avec exactitude. C'eſt que dans le premier cas, le calcul ne ſuppoſe point que la progreſſion puiſſe jamais recevoir tous les termes dont elle eſt ſuſceptible. Une grandeur donnée eſt le premier terme de cette progreſſion. Cette grandeur eſt diviſible à l'infini par une ſuite de diviſions & de ſouſdiviſions en une raiſon quelconque donnée; & les parties qui naiſſent de ces diviſions ſont les termes de la progreſſion. Cette même grandeur repréſente ainſi tous les antécédents qu'elle pourroit faire éclorre par une ſuite infinie de diviſions. Mais il n'eſt aucunement néceſſaire de s'embaraſſer dans toute la ſuite de cette

pro-

progreſſion. La grandeur donnée qui repréſente la ſomme de tous les antécédents, fait connoître auſſitôt une autre grandeur déterminée qui par une ſuite de diviſions dans la même raiſon feroit éclorre une ſuite proportionnelle de termes conſéquents. Le rapport qui regne dans la progreſſion fait ainſi connoître la grandeur qui repréſente tous les conſéquents par la grandeur qui repréſente tous les antecedents.

Mais la détermination de la valeur exacte d'une racine cherchée par voye d'approximation ſuppoſeroit que le cours de la progreſſion fut épuiſé, & dépendroit de la poſition actuelle d'un terme quelconque infiniment éloigné du premier. Or puiſque la progreſſion pouvant aller à l'infini ſans aucune borne qui la limite, on pourra toujours avancer de plus en plus vers le terme cherché; mais comme elle ne peut jamais être entiérement épuiſée, l'approximation à l'infini ne peut non plus en donner la valeur exacte. On voit ainſi que les réſultats du calcul ſont parfaitement conformes à la nature des choſes.

Il ne ſeroit peutêtre pas impoſſible de faire l'application de ce principe à la rectification des courbes. Dans la rectification de la Cicloïde, par exemple, l'intégrale qui exprime la valeur de l'arc, préſente un rapport déterminé à la corde correſpondante du cercle générateur; rapport qui fait connoître que la demi cicloïde eſt double du diamêtre. Dans d'autres courbes où l'expreſſion de l'integrale donne un quantité dont la valeur exacte n'eſt pas d'abord déterminée par un rapport fini à une quantité finie, mais qu'on ne peut trouver que par le moyen des ſuites infinies, la rectification devient impoſſible. La détermination exacte d'un arc de courbe ne dépend donc point de la ſomme d'une infinité de différences ajoutées l'une à l'autre. La différentielle de l'arc de la courbe conſiderée comme côté d'un triangle infiniment

pe-

petit, ſert à faire connoître en vertu de la reſſemblance de ce petit triangle à un triangle donné, le rapport de poſition qui ſe trouve en quelque point que ce ſoit, entre la courbe, & une ligne donnée. De là le calcul intégral tire une valeur de l'arc exprimée par les mêmes ſignes qui expriment les autres variables. Si l'expreſſion de cette valeur eſt telle qu'elle renferme un rapport fini à une de ces variables, on a par le moyen de ce rapport la rectification exacte de la courbe. Mais lorſque la détermination de la valeur dépend du dévélopement d'une ſuite infinie, & qu'on ne peut l'avoir qu'en ſuppoſant cette ſuite parvenüe à un dernier terme; elle devient impoſſible, & prouve par cela même que dans une ſuite quelconque le dévélopement actuel ne peut jamais s'étendre autant que le dévélopement poſſible, que ce qui reſte à parcourir va toujours indéfiniment au delà de ce qui a pû être actuellement parcouru; & qu'ainſi une ſuite infinie en puiſſance ne peut jamais recevoir ſon entier complément, ni parvenir par conſéquent à l'infini abſolu.

On n'éluderoit point la force des preuves que je viens d'expoſer en refuſant le nom de nombre à un aſſemblage abſolument infini d'unités. Quelque nom qu'on veuille lui donner, il eſt clair que dans cet aſſemblage l'eſprit pourra toujours fixer à volonté un premier terme quelconque, & paſſer ſans interruption de l'un à l'autre en ſuivant la progreſſion naturelle, ſans que rien puiſſe la borner. Donc s'il exiſte un aſſemblage de termes abſolument infini, il faudra toujours reconnoître qu'il y a un point dans cet aſſemblage où du fini l'on paſſe à l'infini. Donc ſi un tel paſſage implique contradiction, comme on a tâché de le faire voir, il faut conclure que tout aſſemblage compoſé d'une infinité abſolüe de termes eſt réellement impoſſible, quelque nom qu'on lui donne

ou

qu'on lui refuſe. Donc toute hipotéſe qui tendroit à établir une multiplicité actuellement infinie de termes, ou de parties diſtinctes devra être cenſée par cela même impoſſible. Principe dont les conſéquences peuvent être de de quelque uſage dans la Philoſophie.

Je dois enfin avertir que l'impoſſibilité de l'infini actuel dans la grandeur, ou dans la quantité ſoit diſcrete, ſoit continüe, n'exclût aucunement l'idée de l'infini abſolu, en tant qu'attribut de l'être ſans reſtriction. Les Ecrivains les plus exacts ont toujours eu ſoin de diſtinguer l'infini métaphyſique de l'infini mathématique. M. de Fontenelle lui même reconnoît que l'infini métaphiſique, dont il dit que nous avons naturellement l'idée, ne peut s'appliquer ni aux nombres, ni à l'étendue. C'eſt de l'idée même de cet infini conſidéré de la maniére la plus abſtraite que dérive en quelque ſorte la puiſſance que nous avons d'augmenter par la penſée la grandeur à l'infini, en ajoutant unité à unité; de ſorte qu'il eſt toujours vrai de dire que l'infini en puiſſance ſuppoſe l'infini en acte, ainſi que je l'ay dit ailleurs. Mais ce ſeroit ſortir des bornes de ce mémoire, que d'entrer dans des diſcuſſions purement métaphyſiques.

ALGEBRÆ PHILOSOPHICÆ

IN USUM ARTIS INVENIENDI

SPECIMEN PRIMUM

LUDOVICI RICHERI.

TABULA CHARACTERISTICÆ

Technico-Philoſophice interpretata.

○ IMpoſſibile, contradictorium, impoſſibilitas, contradictio.

○ Poſſibile, poſſibilitas, mera non contradictio

○ Aliquid, res, realitas late dicta.

○ Nihil, negativum, merum, negatio ſtricte dicta

S	C	affirmative, positive	positiva
	Determinatum	Determinatio	
	ↄ	negative	negativa

Cↄ Indeterminatum

Cↄ	Ċↄ	positive	positiva
	Determinabile	Determinabilitas	
	Cↄ	negative	negativa

Cↄ Indeterminabile

Cↄ	C·ↄ	positive	
	Necessarium	Necessitas	
	C·ↄ	negative	

C·ↄ Contingens Contingentia

Ṡ	Ṡ·	positive	positiva
	Mutabile	Mutabilitas	
	Ṡ	negative	negativa

S Immutabile Immutabilitas

§. I.

& ○ *Impoſſibile, contradictorium, repugnans*
a non *a*
vel ○ *Poſſibile, eſſe poteſt, non implicat*

Impoſſibilitas, contradictio, repugnantia
In abſtracto Idem in aliis
Poſſibilitas, mere non contradictio

& &
Quod ſpectatur, ut eſſe, non eſſe – Quod eſt non eſt ○
vel vel ○

§. II.

Non ○ ○ obſervatione
dari & conſtat.
Tantum ○ ○ experientia
○ ○
Hinc eſſe non poteſt
○ ○

§. III.

○ nec nec ○ *Nihilum, negativum, merum,*
Hinc eſt, non eſt (1) confer §. 4. ſeq.
○ vel vel ○ *Aliquid, res, realitas,*

& nihil, impoſſibile
Quod eſt non eſt, eſt.
vel aliquid, poſſibile

Nihil

(1) Cl. Rudolph. Goglen Lexic. philoſoph. hic.

Nihil & Non ○
est, non est. datur. ex §. 3.
Quodlibet vel Tantum ○ *

§. IV.

non S *determinatum*, *determinatio*
a non *a* vel viceversa (2)
vel ○ *indeterminatum*, *non determinatum*

a, C *affirmative*, *positive*
S ad *Determinatum*
Non *a*, ○ *negative*, *negatio late*

§. V.

○ S & C
Hinc ○ qua est argum. §. 2
C,○ C○ 3

§. VI.

C, C est, est
Hinc Quod §. 2. Quod
○,○ non est, non est.

g §. VI.

(2) Cl. Bulfing. in dilucid. Wolf. §. 82. Waller Nic. hic.

* In arte hac philosophandi naturali, simplicissimaque via universalissima & inconcussa scientiarum humanarum fundamenta ex quotidianis, & lucidis observationibus, & experientiis deducta, & nunquam satis expensa ad minima, & irresolubilia elementa reducuntur, & in populares velut, communesque notiores scientificæ cognitionis primitivas, & directrices resolvuntur mira determinationis, & connexionis simplicitate, & fæcunditate illustres. Confer. Christ. Wolf. in Hor. subsec. Marburg. De notionibus directricibus, & genuino usu Philosophiæ; ethices §. 296. & passim Leibnit. præcipue de Philosoph. prim. emend. in actis lipsi. Nicol. Concin. in orat. de Metaphis. Frobes dissertat. cl. Jacquier &c.

§. VII.

$\overset{S}{\bigcirc}$ $\bigcirc$, $\dot{C}\bigcirc$ *Determinabile*, $\dot{C}\bigcirc$

S, signa vicaria ex $C\bigcirc$ (3)

$\overset{S}{\bigcirc}$ $\bigcirc$, $C\dot{\bigcirc}$ *Indeterminabile*, $C\dot{\bigcirc}$

$\dot{C}\bigcirc$ ad $\begin{matrix} C, \dot{C}\bigcirc \\ \bigcirc, \dot{C}\bigcirc \end{matrix}$ *Determinabile* $\begin{matrix} \textit{positive} \\ \textit{negative} \end{matrix}$ argum §. 4.

§. VIII.

Hinc $\bigcirc$ licet $C\bigcirc$ eſt tamen $\dot{C}\bigcirc$ vel $\dot{C}\bigcirc$ *

§. IX.

---

(3) Carpovius de linguæ perfectione ubi de eſſentialibus in vicaria mutandis &c.

* In hac, utpote architectonica, velut per calculum qualitatum proprio matte inveniuntur veritates in philoſophia non minus pura, quam in aliis ſcientiis adplicata. Elementis particularium ſcientiarum inſtructus, & arte hac inveniendi generali adjutus multa inveniet, quae ex aliorum ſcriptis non ſine tædio, & temporis diſpendio alias haurire vix poſſet, immo omnibus adhuc ignorata deteget. Non enim ſolum in matheſi, & ſcientiis naturalibus, ſed & in cæteris etiam diſciplinis novas, eaſque illuſtres veritates inveniendas ſupereſſe ſummis viris probatum, praeſertim indefinita, confuſa, incerta radicitus determinando, & connectendo. Huc ſpectant combinatoriae Leibnitii, algebræ philoſophicæ Hookii, de dirigendo intellectu Lokii, medicina mentis Tschirnhauſen, Cramer de J. Conſulto Inventore cum Wolf. epiſt. gratulat. Wolf. ethic. §. 360.

§. IX.

non C·Ɔ *neceſſarium*, *neceſſitas* non
Ċ Ɔ, C Ɔ vel v^a (4) Ċ Ɔ C Ɔ
vel C·Ɔ *contingens*, *contingentia* vel

C·Ɔ C
C·Ɔ vel ſi ad ad characteriſticæ combinationis præciſionem
C·Ɔ Ɔ

§. X.

C·Ɔ Ɔ Ɔ C·Ɔ
Hinc Ɔ , C·Ɔ Ċ Ɔ arg. §§. 2. 8. 1. ſeu Ɔ qua eſt
C·Ɔ S Ċ,Ɔ C·Ɔ

§. XI.

Ċ Ɔ Ṡ *mutabile*
S ad C Ɔ vel viceverſa
C Ɔ Ṣ *immutabile*

mutabilitas Ɔ Ċ Ɔ
Hinc ex C Ɔ . S Ṣ
immutabilitas Ɔ C Ɔ

(4) Neceſſarium unico modo determinabile, unico modo poſſibile. Unicitas determinabilitatis rationem formalem neceſſitatis conſtituit, non vero immutabilitas ſecundum Scholaſticos. Hinc ejus oppoſitum eſt impoſſibile, & aliter ſe habere non poteſt. Notiones utique veræ, non vero primitivæ definitiones. Neceſſitas nullam determinationem ſupponit, & poſſibilis ut indeterminati determinabilitatem determinat. Hinc neceſſarium eſt determinate determinabile: immutabilitas vero determinationem antecedentem ſupponit, & an ulterius determinabile ſit, nec ne definit. Extra ſyſtema veri nominis facile, & circulum committere, & derivationes omittere.

$\dot{S}$ *positive* $\supset$ C
$\dot{S}$ vel *mutabile* si ab ad
$\dot{S}$ *negative* C $\supset$

§. XII.

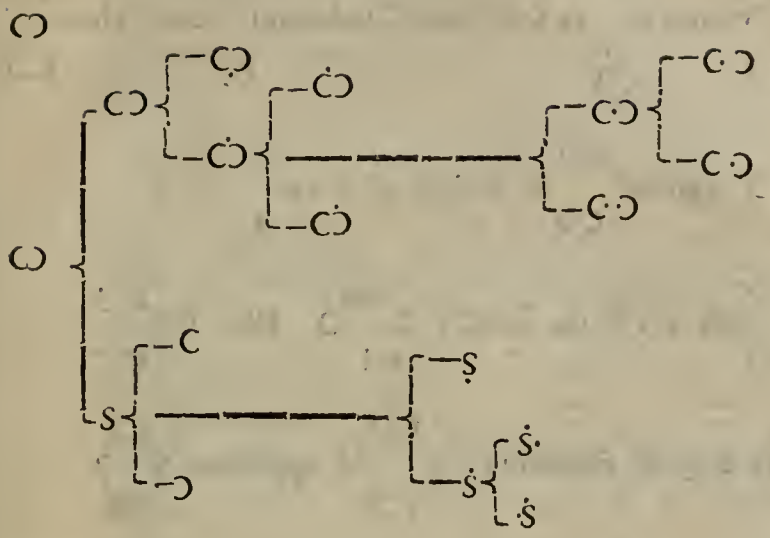
Hinc $\supset$ qua $\frac{\supset}{\supset,\supset}$ est $\frac{S}{\dot{S}}$ & $\dot{S}$ argum. §.§. ad §. 10. cit.

§. XIII.

Hinc $\frac{\supset\cdot\supset}{\supset\cdot\supset}$ est $\frac{S}{\dot{S}}$ & viceversa &c.

SCIA-

* En perfectæ analyscos exemplum, ex quo intimius scrutanti patebit, quomodo cujuslibet dati principii resolutio, & reductio sit instituenda simpliciſſima connexionis via, & quomodo methodus naturæ cum methodo mathematicorum dicta perfecte sociari possit: in vera namque, naturali, & non interrupta veritatum concatenatione unum, idemque sunt: subtiliori philosophice pervidendi abstracta in concretis minus attendentes tenuitatis, inutilitatisque causſabuntur speculationum praccipue illarum, quae neque proxime in naturalibus, neque in civilibus usum sint habituræ: tantum tamen abest, ut naturam, subtilitate speculationum, maxime etiam sublimium artificiorum magistri superent, ut in quamplurimis ne adsequantur quidem. Infiniti casus sunt, in quibus nondum eo progressi sumus meditando, quo natu a praeivit, & usus sequitur etiam civilis. Liceat ergo haec saltem spei, & voluptatis gratia adjungere.



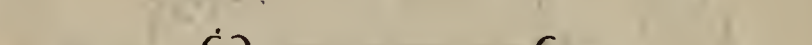
ex subsequentium unione primitiva, velut essentialia

, & generaliter abstrahendo, & veluti vicaria , &

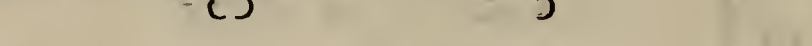
S, & ex resolutione , analogice.

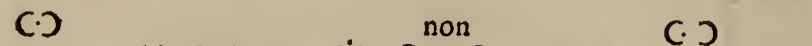
, ergo vel , S vero vel resolvitur simplici combinatione

vicaria π ex C͡ ſumta. Combinatio cum S; hinc



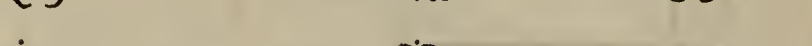
ergo vel ex analyſi ad S vel



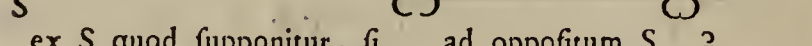


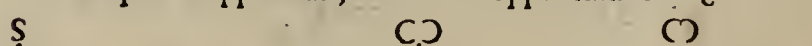
ex S ſeu ex C͡ non . Hinc

vel



ex S quod ſupponitur, ſi ad oppoſitum S ?





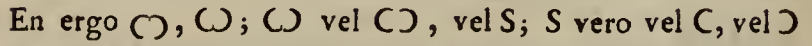
; quare vel , ſi

En ergo C͡, C; C vel C͡, vel S; S vel C, vel C͡

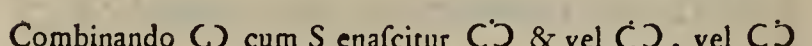
Combinando C cum S enaſcitur C͡ & vel Ċ͡, vel C͡

Determinando C͡ C͡ oritur C·͡, dein C··͡

Determinatum vero ſi ad oppoſitum C͡, Ṡ;



ſi non S; Ṡ vel ex



Huc apprime faciunt, quæ ad §. 51. Ontol. latinæ annotavit Philosophus summus Christ. Wolffius. Conquestus est Leibnitius de tenebris philosophiæ primæ, conqueruntur de iisdem vulgo tantum non omnes; & Leibnitius quidem jam monuit in Philosophia prima (utpote architectonica) magis luce, ac certitudine opus esse, quam in Mathematicis; atque ideo *singularem quandam proponendi rationem* necessariam judicavit, cujus ope non minus, quam euclidea methodo ad *calculi instar* quæstiones resolvantur . . . . Sed singularis illa proponendi ratio nodus est, quem nemo Philosophorum hactenus solvit, nec quomodo solvi debeat Leibnitius innuit, nedum docuit. Nulli tamen dubitamus quod beneficio supradictæ analyseos, & reductionis combinatoriæ nodum istum simplicissima, & universalissima ratione solverimus.

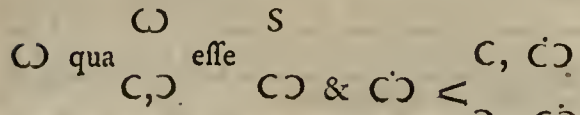
De arte combinandi veterum multi multa dixerunt, & eas explicare, ampliare, supplere tentarunt. Ingenioſi utique multum habent in suis circulis, cistulis, lampadibus combinatoriis, & in variis combinationum artificiis; ast determinationem, & derivationem merito desideres tum in notionibus, tum in signis; hinc eorum characteristica notionibus confusis, & minus determinatis superstructa, & signis non essentialiter derivativis, sed arbitrariis confecta, & tum pantosophicis, tum pantometricis principiis ex intima notionum natura deductis ad combinationes determinandas destituta tanquam inutilis fuit neglecta. Defectum connexionis combinationum confuse agnoverunt nonnulli; ast verae combinatoriae universalis fundamenta ignorarunt, ideſt notionum maxime universalium analysim, & reductionem ad primitiva, & simplicissima. Igquierdo in sua Pharo in hanc rem notat „ quod non advertunt combinationum ex datis terminis possibilium multas debere rejici tanquam inutiles in ordine ad faciendam scientiam; utpote quorum extrema, neque connexionem inter se, neque oppositionem, neque aliud necessitudinis genus &c. Acutissimus recentiorum Leibnit. fundamentum quod tunc juvenis in sua combinatoria (edita annis 1665., & 1668.) quam perficere non potuetat, neglexit, postea in actis lipsiensibus ad annum 1694. indicavit, quod jam olim pervidit Aristoteles categoriarum combinationem innuens: tametsi enim applausu non vulgari eruditorum fuerit exceptus (ars combinatoria) & novas complures meditationes non pœnitendas, quibus semina artis inveniendi sparguntur, contineat; atque inter cæteras palmariam illam *de analysi cogitationum humanarum in alphabetum quasi quoddam* (non chronologicum, sed genealogicum) *notionum primitivarum*, judicat tamen non satis esse limatum &c. act. erudit. lipſ. ad an. 1491.; postea vero in iisdem actis ad annum 1694. de philosophiae primae emendatione agens hæc innuit; itaque *peculiaris quaedam* proponendi ratio necessaria est, & tanquam filum in labyrintho, cujus ope non minus quam euclidea methodo *ad calculi instar* quaestiones resolvantur, servata nihilominus claritate, quæ nec popularibus sermonibus quidpiam concedat.

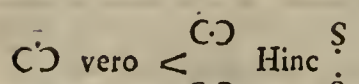
Ex his analysim philosophicam instituenti patebit, quaenam sit vetæ algebræ philosophicae notio, dignitas, & usus, tanquam Kuhlmani methodica centralis, a qua cæteræ omnes pendent, & iterum in matrem suam se filiæ resolvunt; est namque haec ars inveniendi quaedam universalissima tum Philosophorum, tum Mathematicorum analysim sub se comprehendens, ut merito Ætiosophia, & Philosophia princeps, & architectonica sit salutanda. Nihil enim aliud sunt cæteræ scientiæ, quam Æthio-

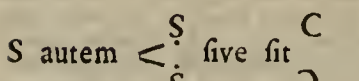
so-

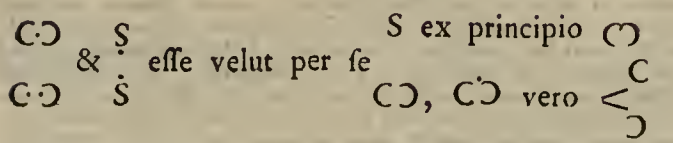
§. XIV.

Ex antecedentibus conſtat de tranſitione.









Hinc pro veritatibus ☌☽ quærendum aliud principium (☋ *connexionis*) *rationis*, *convenientiæ*, *rationis ſufficientis &c.*

ſophia characteriſtica vel immediate, vel mediate adplicata, quod perſpicacioribus, & intellectu ſyſtematico præditis non eſt paradoxum, licet difficillimum; hinc tentandum mutuis auxiliis quid ferant humeri, quid ferre recuſent. Qui vero de his, ſive ex ſenſu proprio præoccupato, ſive ex turba auctoritatum ſtatuere, aut exiſtimare velit, ne id ſe in tranſitu facere poſſe ſperet, ſed ut rem pernoſcat, viam noſtram paullatim tentet, ſubtilitati rerum paullatim aſſueſcat, denique minus rectos, atque alte hærentes mentis habitus tempeſtiva, & quaſi legitima mora corrigat, & tum demum (ſi placuerit) poſtquam in poteſtate ſua eſſe cœperit judicio ſuo utatur. Hiſce fere Verulam.

Analyſis enim veritatum ☾ & ☾· finitur in principio ☽ ☾· Ṡ in ſe velut infinita

Niſi ad ens, ○, omnimode S, ☾, ☾·, Ṡ ipſius principii ☋ alpha, & omega recurratur. *

§. XV.

☽ *Ratio* *Cauſſa*, unde aliquid latiſſime eſt vel intelligitur.

☾ *Rationatum Cauſatum*, quod ex aliquo **

§. XVI.

Quæ ſunt inter ſe ut ☽ & ☾ ☋ *connexa, ordinata*

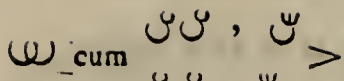
non ſunt ☍ *inconnexa, confuſa*

h

---

* Hinc acute Leibnitius veritates ☾· numeris rationalibus Mathematicorum, ☾· e contra irrationalibus, ſurdis comparandas eſſe affirmabat, in quibus niſi ad ſimplicem primitivam unitatem recurratur, approximatione licet in reſpectiva unitate velut in infinitum producta, incommenſurabilitas ſemper manet; cujuslibet enim datæ quantitatis, — ſive numeri unitas ſimplex eſt menſura adæquata, non vero quælibet alia quantitas, ſeu numerus loco unitatis aſſumtus &c.

** Quomodocumque tandem ſit. Notiones hæ antiquiſſimis, & ſcholaſticis communes; dividebant enim cauſſam in genere in fiendi, eſſendi, & cognoſcendi, & nihil ipſis erat ſine ☽ analytica. Ex his derivandæ, & determinandæ innumeræ notiones principii, & principiati; primitivi, & derivativi, originis, fundamenti, adjuncti, dependentis, potentiæ activæ, & paſſivæ, ſeu facultatis, receptivitatis &c.

 *concatenatio*

TA-

Huc ſpectant quæ de nexu, ordine, harmonia, & muſica latius dicta paſſim apud antiquos licet indeterminate ſatis proponuntur bonum in ſenſum, & uſum convertenda; apprime enim obſervandum neceſſitatem in-

ferri non poſſe ex eo quod neceſſario dari debeat aliqua . Aliud eſt

eſſe neceſſarium; aliud eſt neceſſario concipiendam eſſe aliquam,

quæ cum ſit , vel , exinde erit , vel ;

hinc vel , vel

TABULA, ET RATIO CHARACTERISTICÆ *

Ratio, *Causa*

latissime primitiva ex

Rationa m, *Causatum*

Connexa &

derivativa ex

Inconnexa inversione

Connexio causarum

concatenatio. Derivata ex

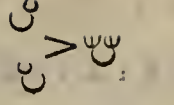
Connexio causatorum

&c.

§. XVII.

Quodlibet & est, idest

* Sciagraphiam generalem, & combinationes principaliores speciminis ergo indicamus; cæteras iisdem insistens principiis quisquis inveniet, & non sine voluptate simplicissimam fœcunditatem experietur, quemadmodum ex secundo specimine constabit, ubi, Deo dante, algebræ philosophicæ theoriam omnem, & ejus adplicationes tentabimus, & tum demum de arte inveniendi universalissima judicium erit.

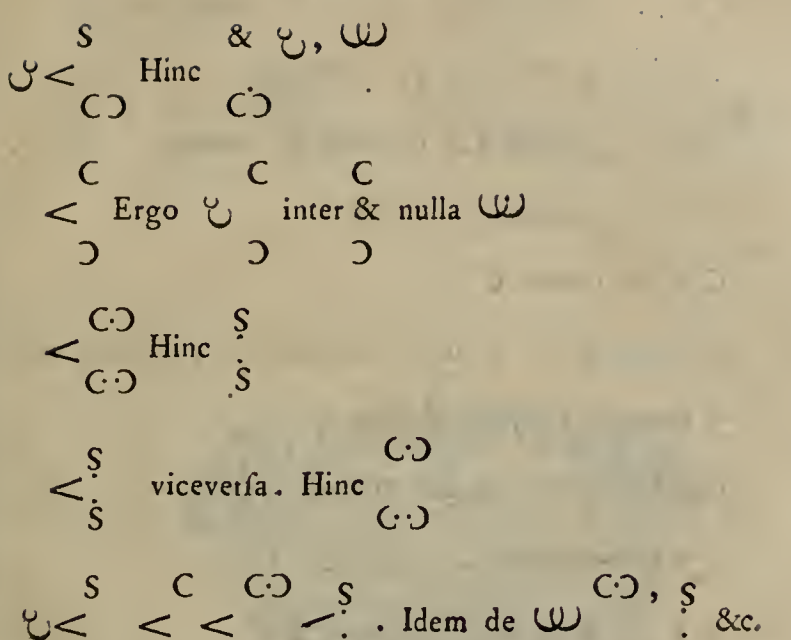
Hinc ☋ cum  > ☿

§. XVIII.

Omnia in mundo esse ☋, ☿, ordinata, harmonica, & nullam dari insulam philosophicam passim apud Philosophos tum veteres, tum recentiores, notione connexionis in latissima significatione sumta. Nota sunt Ciceronis, Sancti Augustini, Scholasticorum verba; cum vero passim a scholasticis maxime in Physicis rationes obtruderentur nihil magis quam inintelligibiles; hinc acutissimus Cartesius dubitationem introduxit ad ☽ seu rationes rerum intelligibili modo explicabiles introducendas; optime namque intellexerat omnia habere rationem convenientem, sufficientem suo modo saltem analogice, & convenienter. Hinc „ nulla res, inquit, existit, de qua non possit quæri quænam sit „ causa cur existat; hoc enim de ipso Deo quæri potest, non quod „ indigeat ulla causa, ut existat, sed quia ipsa ejus naturæ immensitas „ est causa propter quam (ratio) nulla causa indigeat ad existendum. Hujus principii distinctum, & adæquatum usum velut de novo proposuit, & introduxit Leibnitius Philosophus summus; rem postea confecit in variis philosophicis scriptis Aristoteles Hallensis magnus Wolff. Dolendum tamen quod eos sequuti novitatem inventionis, & demonstrationem nimium affectaverint in meram logomachiam, & circulum omnia abitura; quare perspicacissimus Leibnitius axiomatis instar assumendum esse contendebat, a Clarkio licet ad demonstrationem provocatus. *Non oportet enim in disciplinabilibus principiis inquirere propter quid . . . . . ex se ipsis enim fidem habent, non vero ex aliis, & ex ipsis alia demonstrantur*. Aristot. Hinc patet quid judicandum sit de novis demonstrationibus principiorum contradictionis, & rationis sufficientis Straheleri in examin. metaph. Wolff., & in dissert. de exist. Dei, & Hagenii in commen. de method. mathem.

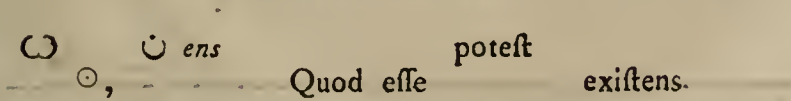
Ex analysi §. 14. Duo dari debent, & dantur principia universalia cognoscendi, quibus positis rerum omnium intelligibilitas ponitur, iisdem sublatis tollitur. In universum tamen observandum cautionem in adplicatione adhibendam; præsertim si tum notiones, tum propositiones non satis determinentur, & determinate, ac primitive inter se connectantur &c. Bulfinger. in Dilucid.

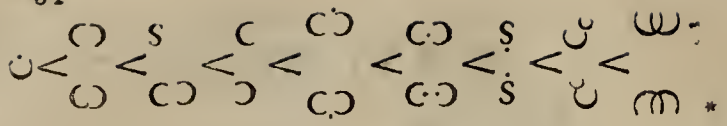
§. XVIII.



§. XIX.

⊙ Exiſtentiæ, ſeu actualitatis ſignum





☽, ☉ ☽ est ☽, ☾ repugnat ☉ vel ☽, ☉ Hinc ☽ interne, & externe

S si est S quoad ☉, existit

☽ Est tamen ☽

☽ Quod existit & determinatum, & positivum est

☽ Involvit ☽, ens fictum

☽ Quodlibet ☉ qua tale est ☽

☽ Repugnat ut ☉ ☽, ☉ ☽

☽ ☿ S
Hinc Hinc velut in se
☿ ☿ ☽

☿ ☽
Quare
☿ ☿ sive sit sit ☿; sive ☿

☉

---

* En combinationis characteristicæ exemplum, cujus resolutio, & ad principaliora reductio ex antecedentium connexa combinatione instituenda simplicissima, brevissimaque via. Notandum tamen innumeras plurimorum Auctorum definitiones, & propositiones nihil aliud esse, quam puram putam rerum earundem sub diversis nominibus vagam, & sterilem repetitionem, quod jam magnis Viris observatum & authopsi præsertim ex hac arte inveniendi probe patebit.

☽ Ratio essentia

si in SS ☉

☾ Rationatum accidentia

☌ Ordo Veritas Perfectio.

In SS ☉ Hinc Hinc Hinc

☍ Confusio Falsitas Imperfectio.

OB-

OBSERVATIONS

SUR LE COURS DU PÔ

Avec des recherches sur les causes des changemens qu'il a souffert.

PAR M. CARENA

L'Art & la Nature ont également eu part aux changemens qui sont arrivés dans le cours du Pô, je me propose dans ce mémoire de fixer la quantité, & l'époque des plus considérables d'entre eux : j'ose me flatter que ces recherches, pourront paroître intéressantes, & que les réflexions que j'aurai soin de faire sur les causes de ces changemens, seront de quelque utilité à l'avancement de la Géographie Physique.

1. POLYBE compare la Région arrosée par le Pô à un triangle, dont la base est le rivage Adriatique, les Alpes, & les Apennins en sont le deux côtés. La longueur de la Chaîne principale des Alpes depuis le Col de Tende, jusqu'à l'extrémite du Golphe Adriatique est de 625 milles ; (*a*) celle d'une partie des Alpes, & des Apennins depuis cette Montagne jusqu'à *Sinigaglia* est de 325 ; la base enfin, savoir la longueur de la voye Romaine, qui depuis cette Ville conduisoit le long de la Mer Adriatique jusqu'à *Trieste*, est de 375 milles. Elle a donc 1325 milles de

(*a*) Je substitue ces mesures à celles que donne le texte assez fautif de POLYBE au Liv. II.

Dans tout le cours de ce mémoire je fais usage des anciens milles Romains de 756 toises.

de circuit. STRABON donne à cette plaine 2100 ſtades (262½ milles) de longueur ſur une largeur à peu près égale entre *Ancone*, & *Trieſte*. Il déduit cette dimenſion de celle des côtés du triangle décrit par POLYBE, dont elle fait la hauteur.

2. C'eſt une loi aſſez conſtamment obſervée par la Nature que les Montagnes qui ſe trouvent plus éloignées de la Mer ſont les plus élevées, & contiennent auſſi la ſource des plus grands fleuves. Celles de la Suiſſe, des Griſons, & du Vallais ſont les plus hautes de l'Europe, & c'eſt auſſi dans leur partie la plus élevée, que le Rhône, le Rhin, & le Téſin prennent leur naiſſance. La Chaine des Alpes qui, de là s'étend à l'Eſt juſqu'à la Mer Adriatique, & au Sud juſqu'au Golphe de Lion; & qui va toujours en décroiſſant à meſure qu'elle approche de la Mer (*a*), ne fournit l'origine à aucun autre fleuve, qui ſoit auſſi conſidérable, que ceux dont nous venons de parler, ſi nous en exceptons le Pô; mais il eſt à remarquer que, quoique le Mont *Viſo*, dont il prend ſa ſource ſoit moins haut que celles, qui ſont plus avancées dans la même Chaine, il l'eſt cependant beaucoup plus que toutes les autres Montagnes, qui lui ſont voiſines (*b*); c'eſt donc là un cas particulier

i

(*a*) SCHEUCHZER (*Mém. ſullé Mont. in tom. IV. Sagg. Tranſaz. Filoſ.*) a trouvé par des obſervations barométriques exactes, que la plus grande élévation du M. Adula ou de S. Gothard, & des Montagnes voiſines peut aller à 1400 toiſes environ de hauteur perpendiculaire ſur le niveau de la Mer; & M. NEEDAM a trouvé de même que le partie de M. Tourné ſur laquelle il a pû faire ſes obſervations en a 1653., ſans conſidérer les hauteurs latérales qui ſont plus élevées; Le Mont Iſeran 1282. $\frac{1}{2}$; le Glacier ou le ſommet du Mont Cenis 434. De ces obſervations, & de ce que le M. Tourné eſt ſitué preſqu'au milieu de la Chaine des Alpes, il conclud, que cette montagne doit être la plus haute de l'Europe, & que c'eſt un erreur de croire que le M. Cenis & le M. *Viſo* égalent en hauteur les montagnes qui ſont plus avancées dans la Chaine.

(*b*) Ce qui a fait exprimer PLINE en ces termes: *Padus e gremio montis Veſuli celſiſſimum in cacumen elati viſendo fonte proſiluens*, L. III. c. XVI.

culier, qui rentre dans la régle générale, à laquelle il ſembloit oppoſé.

3. PLINE obſerve, que le Pô reçoit tout au plus trente riviéres, & CLUVIER dit qu'il en reçoit quarante, dont quinze ſe dechargent ſur la gauche, & les autres ſur la droite de ce fleuve : tous les deux ont cependant raiſon ; car PLINE ne prend en compte que les plus grandes ; & de ſon temps après le *Réno*, le Pô ne recevoit plus que le *Santerno* : les autres fleuves déchargeoient leurs eaux dans la *Paduſa*, marais qui s'étendoit le long de la droite du Pô depuis le *Réno*, juſqu'à *Ravenne*.

4. En général il reçoit plus de riviéres ſur ſa droite, mais il en reçoit de plus grandes ſur la gauche ; parce que la Chaîne des Alpes étant plus haute que celle des Apennins, cès Montagnes contiennent dans leur ſein plus d'eau : & le lieu le plus incliné de la plaine ſe trouve plus près des Apennins que des Alpes ; ce qui fait que le cours de ce fleuve eſt plus éloigné de ces derniéres, & que la partie de la plaine qui eſt à ſa gauche eſt plus grande que celle qu'eſt à ſa droite (*a*) ; & les riviéres qui découlent des Apennins ayant moins de trajet à faire que celles qui viennent des Alpes, ſont auſſi reçues dans le Pô avant qu'elles puiſſent ſe reunir pluſieurs enſemble.

5. Cinq des riviéres, qui ſe déchargent à la gauche du Pô, ſortent des lacs enclavés dans les Alpes, que la Nature paroit avoir formé pour ſervir à en modérer la rapidité : car la pente des Alpes étant fort grande (*b*) les fleuves qui s'en précipitent ſurmonteroient ſouvent leur bords, & pro-

(*a*) *Univerſam planitiem ita* (*Padus*) *dividit, ut major longe pars ea ſit, quæ ad Alpeis, & Hadriaticum ſinum porrigitur. Polyb. L.* II.

(*b*) En général la pente des Chaines de Montagnes eſt beaucoup plus rapide vers le Sud que vers le Nord. SCHEUCHZ. loco cit. Quant aux Alpes cela eſt confirmé par cette obſervation : du Mont S. Gothard à l'embouchure du Rhin il y a en ligne droite 450. milles, & de la même Montagne à l'embouchure du Pô il n'y en a que 180. Donc la deſcente des Alpes vers l'Italie eſt de deux fois, & demie plus rapide

produiroient d' impéteuſes inondations dans les plaines, ſi le courant des eaux n' étoit pas rallenti par ces réceptacles qui lui oppoſent une grande réſiſtance, & leur permettent en même tems de s'étendre dans un eſpace horiſontal, qu'on obſerve conſtamment être d'autant plus grand, que ces riviéres ſont plus conſidérables, & que leurs cours eſt plus rapide: en effet on voit que le Lac de *Généve* qui eſt traverſé par le Rhone & celui de *Conſtance*, qui l' eſt par le Rhin, ſont les plus grands Lacs au delà des Alpes, de même que les plus grands en decà, ſont le *Lac Majeur*, qui eſt traverſé par le *Téſin*, celui de *Come* par l' *Adda*, & celui de *Garda* par la *Sarca*.

6. Le grand nombre de riviéres, qui vont décharger leurs eaux en aſſez grande quantité dans le Pô, le rendent non ſeulement le plus abbondant de l' Italie, mais ſelon PLINE il n' y en a pas d' autre qui à cours égal reçoive un plus grand accroiſſement. „ *Nec alius amnium tam* „ *brevi ſpatio majoris incrementi eſt. Urgetur quippe aquarum* „ *mole, & in profundum agitur, gravis terræ, &c.* Outre cette quantité, qui eſt à peu prés conſtante, les neiges dont ces Montagnes ſont couvertes concourent encore à le faire groſſir conſidérablement dans la ſaiſon des fontes, qui ſelon PLINE arrivoit au lever de la Canicule: „ *augetur ad canis ortum liquatis nivibus*: POLYBE diſoit la même choſe deux Siécles avant PLINE; *Fluit autem maximus, pulcherrimuſque ad canis ortum, auctus liquatis nivibus in prædictis montibus*. Le lever héliaque de la canicule à Rome, où écrivoient ce deux Auteurs, ſe faiſoit du tems de POLYBE le 29. de Juillet, & de celui de PLINE le premier d' Aouſt: c' eſt en effet ſur la fin de Juillet que la fonte des neiges produit cet accroiſſement dans le Pô; cependant le lever de la Canicule ne peut plus ſervir à en déſigner le tems;

 car

(a) Ou *Sirius*.

car (à cauſe de la préceſſion des équinoxes), il ſe fait aujourd'hui ſeize jours plus tard. Ce fleuve reçoit auſſi d'autres accroiſſemens en automne, & au printems, qui ſont produits par les pluyes qui tombent ordinairement dans ces deux ſaiſons de l'année.

7. La longueur de ſon cours depuis ſa ſource juſqu'à ſon embouchure eſt ſelon PLINE de 300. milles, ce qui eſt exactement vrai ſi on ne tient compte que de ſes plus grands detours. La diſtance entre la premiére & la derniére embouchure étoit du tems de cet Ecrivain de 88 milles, & elle répond à celle qu'on trouve entre l'embouchure de la *Foſſa Auguſta* dans le Port de *Claſſis*, & celle de la *Foſſa Ciodia*, par laquelle le Pô mêloit ſes eaux avec celles des deux fleuves *Medoaci*, & formoit le Port *Edro*. Il obſerve auſſi que ce fleuve commence à être navigable à *Turin*; POLYBE eſt d'accord avec lui, en diſant que les navires le remontoient par l'embouchure *Olane* l'eſpace de 250 milles, car cette diſtance porte entre cette ville & le confluent de la *Duria major*, où le Pô, ſelon PLINE commence à avoir une plus grande profondité. (*a*) Aujourd'hui on le remonte auſſi au deſſus de *Turin* juſqu'aux confluens de la *Vraita*, & de la *Maira*, mais le barques à voiles ne paſſent pas au delà du Pont. (*a*) Je joindrai à ces notions préliminaires ſur les cours du Pô en général, deux mots ſur les Nations principales qui ont peuplé la Région qu'il arroſe, & dont l'induſtrie où la pareſſe ont contribué à ſes changemens.

8. Les premiers Abirans de l'Italie étant venus par Terre, la Région arroſée par le Pô fut la premiére à être peuplée. Ils

(*a*) Plin l. III. c. XVI.

(*b*) Les Celtes donnerent au Pô le nom de *Padus* dans la partie ſupérieure de ſon cours; Celui de *Bodding* dans l'endroit où il commence à être plus profond: c'eſt la partie du milieu; & à la méridionale des deux branches, dans leſquelles il ſe diviſoit, celui de *Rédane*, dont j'aurai occaſion de parler dans la ſuite.

Ils étoint Celtes d'origine ; dans l'intérieur du Pays ils conſerverent le nom d'*Ombri*, & ſur les côtés il ſe donnerent celui de *Lli-gour* (hommes de Mer), Nom que les Latins changerent en *Ligur*, & *Ligures*. Les Tyrrhéniens abordés aux côtés de la Mer Inferieure chaſſerent ces Peuples de la Région entre le Tybre & la Macra, dix ſiécles avant l'Are vulgaire; ayant enſuite traverſé les Apennins ils les obligerent à ſe rétirer vers les Alpes, & vers le haut Pô, & ils s'établirent des deux côtés du bas Pô juſqu'à l'*Adige*, ou les *Veneti* s'oppoſerent, & mirent des bornes à leurs conquêtes. Les Tyrrheniens Peuple induſtrieux & navigateur comme les Phéniciens, deſquels ils tiroient leur origine, deſſécherent des grands marais autour du bas Pô, & creuſerent des longs canaux, qui ouvrirent au fleuve de novelles embouchures, ce qui rendit leur commerce ſur la Mer ſupérieure très-floriſſant; mais les Gaulois deſcendus des Alpes, des l'An 600. avant l'Ere vulgaire, s'étant établis dans la plaine, les contraignirent à abandonner ces Régions.

9. Une grande partie de cette Nation mépriſant l'agriculture, & le commerce, menoit une vie paſtorale, & ne reſpiroit que la guerre ; le Pô, & les autres riviéres de cette Région abbandonnés à elles mêmes ſurmontérent bien tôt leurs bords, & ſubmergerent une partie de la plaine, que les Romains, qui les chaſſérent, & ſoumirent, ne parvinrent à deſſécher en partie, qu'avec de très-grands frais; les ſoins que ces derniers apporterent pour reuſſir dans leur entrepriſe ſervent à nous donner une idée de l'importance de rendre durables ces ouvrages ſi utiles ; car tandis qu'ils conſtruiſirent avec une ſolidite admirable leurs grands chemins, dont quelque partie en cotoyant les fleuves leur ſervoit de digue, ils creuſerent pluſieurs grands canaux, entre leſquels étoit fort avantageux celui, qui de *Ravenne* ſervoit à ouvrir la communication entre les bouches du Pô, du *Tartaro*, de l'*Adige*, & des autres riviéres juſqu' à *Altino*

tino dans une longueur de 120 milles. (*a*) Mais les Nations Barbares qui ravagerent l'Italie dès la fin du IV. ſiécle, & qui s'y établirent dans les ſuivans, firent preſq' un déſert de ce Pays ſi peuplé & ſi fertile: le reſte des abitans opprimés dans l'eſclavage ne pût inſpirer que fort tard à ſes Maîtres farouches le gout de l'agriculture, de la navigation, & des arts utiles; c'eſt alors que les riviéres, & les canaux comblés du limon qu'ils charioient de ces plaines, déborderent de tous côtés, & en ſubmergerent de nouveau une grande partie: les Peuples s'étant enfin policés, & les Pays repeuplé on vit les Villes de la Lombardie dès le ſiécle XI. deſſécher les marais, batir des nouvelles abitations ſur les lieux que les eaux laiſſoient à découvert, & creuſer des canaux qui en ranimerent le commerce, & en arroſerent les campagnes.

10. Deux Chaînes de Montagnes, qui du M. *Viſo* s'étendent vers la plaine à l'Eſt dirigent le cours du Pô vers cette plage juſqu'à ce, qu'étant ſorti des collines; la pente générale de la plaine déterminée par la courbure des Alpes du Sud au Nord en dirige le cours de ce côté; enfin dans le lieu, où la plaine eſt le plus retrécié par la continuation des Alpes maritimes (*b*) d'un côté, & des Alpes Grecques, & Pennines (*c*) de l'autre, il eſt obligé de reprendre ſa premiere direction.

11. Ces grandes courbures, toujours dépendentes de celles des Montagnes, en allongeant le cours des fleuves, diminuent la viteſſe qu'ils acquereroient néceſſairement, s'ils déſcendoient directement à la Mer du ſommet des Montagnes dont ils tirent leur origine; ce qu'on doit conſidérer comme une très-grand avantage, car ces fleuves coulant avec une trop grande rapidité, ſe creuſeroient bien tôt des

(*a*) L. III. c. XVI.
(*b*) Les collines du *Monferrat*.
(*c*) Les collines du *Canavez* qui bordent la *Doira Bautia* juſqu'à *Maſſe*.

des lits profonds au deſſous du niveau des terres, & deviendroient par là peu propres à la navigation & à l'arroſement des campagnes. Quant à leurs petits détours dans les montagnes, ceux, qui ſont déterminés par leurs angles ſaillans & rentrans, qui multiplient les réactions, & diminuent l'inclination du plan, font perdre aux eaux une partie de la vîteſſe qu'ils ont acquiſe dans la déſcente, & qui produiroit de grands dommages dans les plaines, qu'ils vont parcourir; ceux qu'ils ſe creuſent dans les plaines par l'inegalité & par l'éterogéneité du ſol, qui offre plus ou moins de réſiſtance à leur mouvement, ne produiſent pas des avantages egaux; car au contraire ils les endommagent ſouvent par leurs variations. C'eſt à l'art de perfectionner la nature, où cela eſt aiſé. Mais la théorie n'a pas encore été entiérement établie ſur ſes vrais principes; & l'on voit ſouvent faire à la pratique des efforts inutiles.

12. La partie de la plaine qui eſt plus proche des montagnes a une pente plus rapide que celle qui approche davantage de la mer, & les fleuves au ſortir des montagnes ont encore une grande partie de la vîteſſe acquiſe par la déſcente; or après qu'ils ont dépoſé à leur pied les grandes pierres qu'ils en ont détaché & roulé dans les Vallées ils ſe déchargent des plus petites, juſqu'à ce que le mouvement devenant beaucoup moins rapide, ils dépoſent le ſable: mais comme il eſt encor trop grand pour que le limon, qu'ils commencent à charier en rongeant les plaines, puiſſe ſe ſéparer & ſe précipiter au fond de leurs lits, loin d'en être élevés, ils ſe creuſent davantage; il s'enſuit delà que les changemens qu'ils ſubiſſent pendant un certain eſpace ne ſe font que par corroſion: c'eſt ce qui arrive à cette prémiere partie du cours du Pô dans le Piémont proprement dit.

13. Concevons les eaux du fleuve parvenues à l'entrée d'une plaine, elles ſe creuſeront un lit dans la partie la plus baſſe; &

ſi dans le long eſpace qui leur reſte à parcourir, elles trouvent un ſol gras & fertile, elles ſe chargeront de limon, pour le dépoſer un peu plus bas, quand leur différens détours & le peu de pente de la plaine, leur auront fait perdre ſuffiſamment de leur viteſſe : le fond du fleuve ſe réhauſſera donc inſenſiblement, & les eaux ſurmontant leurs bords ſe creuſeront de nouveaux lits ſur la partie de la plaine latérale qui eſt la plus baſſe ; ſi la mer eſt encore beaucoup éloignée, & que par quelque réſiſtance dans le ſol, le fleuve ne puiſſe y porter droit ſes eaux, ces nouveaux lits ſe réüniſſent à l'ancien : voilà des isles formées par les branches du fleuve, qui quittera encore par la même raiſon ces nouveaux lits pour rentrer dans les anciens, ou pour s'en creuſer d'autres. Cette plaine réhauſſée dans les endroits plus bas, facilite encore ces changemens ; puiſque le fleuve ne s'écoulant plus dans une vallée, mais ſur une plaine aſſés unie & rendue de niveau par les différentes couches de limon, dont le ſol a été couvert à pluſieurs repriſes, en inonde une grande partie, ſubmerge les Villes, & les campagnes, & y forme des marais & des lacs. Le Fleuve qui au commencement ne debouchoit dans la mer que par une ſeule embouchure, y ayant dépoſé beaucoup de limon eſt enſuite obligé de ſe diviſer, d'où il ſe forme des isles d'une figure triangulaire dont un côté eſt baigné par la mer, & les deux autres par les branches des fleuves : le limon ſucceſſivement dépoſé fait de nouveau ſubdiviſer le fleuve & il ſe forme de nouvelles isles ; ces nouvelles branches enfin qui divergent entr'elles, ſe réüniſſent aux prémieres, d'où il réſulte d'autres diviſions. C'eſt par ces différentes variations, que ſe font les prolongations du continent : & que s'il ſe trouve dans la mer des isles, qui ſoient proches du fleuve, elles ſont enclavées & réünies au continent qui s'avance vers elles.

14. Tout

14. Tout ce que nous venons de dire eſt arrivé à notre fleuve ; les faits principaux, que j'ai recueilli à cet effet, en fourniſſent les preuves les plus convaincantes ; je commencerai donc par prouver l'exiſtence de ces isles, que des Auteurs très-anciens nommoient *Eléctrides*, & qu'ils plaçoient à l'embouchure de l'*Eridan*. STRABON & PLINE (*a*) les y cherchoient envain de leur tems ; & l'*electrum*, ou l'ambre n'étoit plus connû ſur les bords de l'*Eridan* ; mais quoiqu'ils euſſent raiſon de trouver abſurde qu'elle pût être produite par les peupliers, qui en bordoient les rives ; il eſt cependant certain que dans des tems plus reculés on trouvoit cette ſubſtance près de ce fleuve, & que les isles *Eléctrides*, qui en prirent le nom, exiſtoient vis-à-vis de ſon embouchure ; car ARISTOTE (*b*) dans ſon livre *des choſes merveilleuſes* les décrit ſi particuliérement qu'on n'en ſçauroit revoquer en doute l'exiſtence. Il nous apprend qu'il y en avoit deux, & qu'elles étoient ſituées dans le fond du Golphe Adriatique vis-à-vis de l'embouchure de l'*Eridan* ; qu'il y avoit un lac prés de ce fleuve, dont l'eau chaude exhaloit un odeur ſi puante, que les bêtes refuſoient d'en boire, & que les oiſeaux en le traverſant y tomboient morts (*c*) ; ſa circonférence étoit de 200. ſtades (25. milles), ſa largeur de 10. (1. $\frac{1}{4}$ milles) ; ſa longueur étoit par conſéquent d'environ dix milles (*d*).

k 15. THÉO-

(*a*) STRAB. lib. V. PLIN. lib. XXXVII. cap. II.

(*b*) Ce livre eſt déja cité ſous ſon nom par des Ecrivains de la cour de PTOLOMÉE PHILADELPHE.

(*c*) On peut voir dans PLINE lib. II. c. 93. pluſieurs exemples ſur ces exhalaiſons dans l'Italie. Un lac ſemblable eſt celui d'*Ampſanfte*, aujourd'hui *Muffiti* au deſſous de la Ville de *Fricento*.

(*d*) L'Abbréviateur d'Etienne de Bizance, & TZETZE ſur *Lycophron* en parlent auſſi. SOTION, Auteur Grec aſſés ancien, dans les fragmens du livre *de flum. font. ac lac. miraculis*, aſſure que *circa Eridanum eſt lacus prope Electridas Inſulas aquam habens calidam, gravis odoris, quam nullum animal deguſtat.*

15. THÉOPOMPE, qui fit pluſieurs ouvrages de (*a*) Géographie eſtimés par les Anciens, parloit de ces Isles dans une déſcription de la mer Adriatique, qui eſt citée par le Géographe SCYMNUS de Chio (*b*). APPOLLONIUS de Rhode Bibliothéquaire de Ptolomée Philadelphe, dans ſon poëme des Argonautes, dans lequel il fait uſage d'anciennes piéces de Géographie aſſès exactes, dit que l'Isle *Eléctride* étoit la derniere de celles, qui ſe trouvoient dans le Golphe Adriatique, & qu'elle étoit proche de l'*Eridan.* La fameuſe expédition des Argonautes, qu'il y fait parvenir, eſt de l'an 1353. environ (*c*). DÉDALE y fit deux Statues, dont une étoit d'étain & l'autre d'airain, on a rapporté à ARISTOTE qu'elles exiſtoient encore dans cette Isle. Il paroit même, qu'on en conſervoit le ſouvenir dans les prémiers ſiécles de l'Ere vulgaire; car AGNELLUS qui écrivoit les vies des Archevêques de *Ravenne* dans le IX. ſiécle parle d'un endroit dans le territoire de *Comacchio*, acquis par l'Evêque AURÉLIEN vers le 520., qu'on nommoit le Champ *des Idoles* près de l'Egliſe de S. Marie de *Pado veteri*, où l'on bâtit depuis le Monaſtère de *Pompoſa* (*Voïez la Carte.*).

16. L'examen des circonſtances de la vie de DÉDALE me donne l'an 55. avant la priſe de Troye (*d*), qu'un ſavant Chronologiſte a fixé à l'an 1284. (*e*), c'eſt-à-dire l'an 1339. avant l'Ere vulgaire, pour l'époque de ſon arrivée dans ces Isles; cette époque eſt la même que celle de l'arrivée des PESLAGES Théſſaliens, qu'ARISTOTE aſſûre en avoir chaſſé ce fameux Artiſte. Ils y bâtirent une Ville à laquelle ils donnerent le nom de *Spine*; nom qui eſt tiré de la

(*a*) Il vivoit du méme tems qu'ARISTOTE, dans le IV. ſiécle avant l'Ere vulgaire.
(*b*) In *Periegeſi.*
(*c*) PAUSANIAS lib. 9.
(*d*) DIOD. SIC. lib. 4. PLUT. in Theſeo.
(*e*) FRERET Nouv. Obſerv. Chron. P. I.

la nature du ſol de l'Isle, ſur laquelle elle fut fondée, & non de celui de l'embouchure du Pô, comme le prétend DÉNYS d'Halicarnaſſe (*a*) ; puiſqu'au contraire la Ville donna ſon nom à l'embouchure (*Spinétique*) (*b*). En effet ARISTOTE décrit un ſorte de pierre (c'eſt un eſpèce de pyrite) qui s'enflammoit lorſqu'on la briſoit, & qu'on nommoit *Spinus* (*c*). Les bains chauds de la *Porretta* ſur le bord du *Réno* au midi de *Bologne* (*d*) ſont formés par les eaux, qui ſortent en grande quantité d'un rocher de même nature. Lorſqu'on frappe ces pierres on en voit ſortir des étincelles, dont le nom grec Σπίνθερ dérive par conſéquent de celui de Σπίνε qu'on doit ſuppléer dans le *Theſaurus linguæ græcæ* d'HENRI ETIÉNNE : PLINE (*e*) aſſûre que ſi on laiſſoit tomber un charbon allumé dans le territoire *d'Aricia* la terre s'enflammoit, que dans la *Sabine* & dans le territoire de *Tiano* une ſorte de pierre prenoit feu lorſqu'on l'oignoit : cette région autour du bas Pô abonde en ſources ſulphureuſes, & ſans parler des célébres bains chauds d'*Abano*, dans le territoire de *Comacchio*, il y avoit encore au VI. ſiécle un endroit, qui s'appelloit *Ignis*, & *Bajas*, ſitué entre l'Eridan & la Volane (*f*).

PLINE aſſûre que dans les Apennins au Sud de Bologne l'an 91. avant l'Ere vulgaire, à la vûë d'un grand nombre des Chevaliers Romains, deux grands rochers s'entrechoquérent ſi rudement & avec un ſi grand bruit que la fumée & la flamme s'en éleva au Ciel, & que dans leur

 chûte

(*a*) Antiq. Rom. lib. I.
(*b*) PLIN. lib. III. C. XVI.
(*c*) Lib. de Mirandis.
(*d*) LE'ANDRE ALBERTI qui les vit en donne cette déſcription : *Eſcono queſte acque calde in grande abbondanza, di ſapore ſalſo, da un alto faſſo di minera di zolfo. Sopra il gran faſſo veggonſi in quà e in là uſcire alcune fiammette di fuoco, ivi accendendoſi la terra ; e ſpento il fuoco vedeſi germinar eſſa terra, e produrre erbe. Mette capo nel Reno queſt' acqua, onde non è meraviglia ſe l'acqua del Reno è tanto ſana a beverla.* Pag. 338. Il dit auſſi, qu'au Sud de *Bologne*, près de *Pietramala*, on voit un trou, dont il ſort continuellement de grande flammes. pag. 325.
(*e*) Lib. II. c. 82. (*f*) AGNELLUS loc. cit.

chûte ils écraſerent pluſieurs Villages (*a*) : PLUTARQUE dit que dans le Païs habité jadis par les Celtes, un globe de feu (où un bloc de matiére en feu) lancé en l'air dans une eruption, tomba dans l'Eridan, & s'y éteignit (*b*). VALERIUS FLACCUS nous apprend la même choſe par ce vers :

Acer & Eridani trepidum Globus ibat in amnem.
Argon. l. V. v. 430.

Voilà l'explication d'une partie de la fameuſe fable de *Phaëton*. Les bornes de mon ſujet ne me permettent pas d'y inférer ici mes recherches ſur la premiere partie de cette ancienne tradition d'une embraſement qu'éprouva la terre, & ſur ſa cauſe : je les reſerve à une autre lieu. Les Poëtes ayant trop défiguré cette tradition, la rendirent abſurde ; & pour cela STRABON, PLINE, DIODORE de Sicile la rejettent abſolument ; POLYBE n'en décide rien ; LUCIEN dans ſon *Dialogue de l'ambre*, avec ſa naïveté ordinaire la tourne en ridicule, mais dans le *Dialogue de l'Aſtrologie* il tâche d'en donner une explication morale. Les ſentimens des Mitologiſtes ſont partagés ſur ce ſujet ; mais c'eſt ſans le moindre fondement que nos Hiſtoriens, trompés par les impoſtures d'ANNIUS de Viterbe, ont prétendu trouver dans *Phaëton* le fondateur de Turin.

17. APOLLONIUS de Rhode (*c*) dit que l'eau du lac, dans lequel tomba Phaëton à demi brûlée, en fut ſi infecté, que les oiſeaux, qui y voloient deſſus, n'en pouvant ſupporter

(*a*) Lib. II. c. 83.
(*b*) TZETZE, *Chiliad.* IV. n. 137. après avoir expoſé le Conte des Poëtes ſur Phaëton, dit :
Plutarchus autem ſolvit naturalius :
Globum igneum tetra coltica erupiſſe,
Extinctum autem, cum in fluenta Eridani incidiſſet,
Hiſtoriæ mentionem facit (in libro) : *quantum examen externorum ?*
(*c*) ΑΡΓΟΝΑΥΤΙΚ. lib. V. v. 596. &c.

ter la puanteur, y tomboient morts ; & que quand elle débordoit par le ſouffle du vent impétueux, *tunc* (*electri guttæ*) *in Eridanum provolvuntur frequenter cunctæ, æſtuanti fluxu.* Le nom de *Lago-ſcuro* que conſerve un Village entre *Ferrare* & le *Pô grande*, déja nommé *Lacus obſcurus* dans des anciens chartres, indique préciſément le lieu où étoit l'étang ou lac obſcur (κέλαινης λιμνης), dont cet Auteur fait mention, & qui fut dans les ſiécles ſuivans comblé par le limon du fleuve, ſurtout depuis que la branche, qu'on appelle *Pô grande*, creuſa ſon lit de ce côté.

18. Dans la campagne ſulfureuſe entre *Cume* & *Pozzuolo*, appellée par les Anciens *Phlegræus Campus*, l'an 1538, après des grands tremblemens, on vit la terre s'ouvrir & jetter une ſi grande quantité de pierre enflammées & de cendres, qu'il s'en forma une montagne de 4. milles de circuit, & le lac *Lucrin* en fut preſqu'entiérement couvert (*a*). ARISTOTE (*b*) nous apprend comment dans la même campagne s'eſt formée la *Solfatara* ; cet Auteur en parlant des tremblemens de terre, donne la déſcription d'une eſpèce plus particuliére (& qu'on peut à plus juſte raiſon appeller un Volcan), laquelle ſe fait quand la terre après s'être alternativement gonflée & raſſiſe, s'ouvre enfin & élance une quantité de pierres : *Un de ces tremblemens*, dit-il, *bouleverſa le Champ Phlegrée, de même qu'une Région Liguſtique.* Ces dernieres paroles regardent l'origine des fameux *Campi Lapidei* qu'on appelle aujourd'hui le *Crau* entre Marſeille & le Rhône ; les circonſtances fabuleuſes, dont les Anciens l'enveloperent, racontant (*c*) que Jupiter avoit fait pleuvoir une nuée de pierres ſur les Liguriens *Albion* & *Bergion* fils de Neptune, tombent aiſément : le nom de *berg* ſignifioit dans la langue Celtique une montagne, & celui d'*Al-*

(*a*) V. LEAND. ALBERTI *Deſcriz. Ital. edit. an.* 1581. *p.* 177.
(*b*) METEOR. lib. II. cap. VIII.
(*c*) MELA lib. II. cap. V. APOLLOD. *de Diis* lib. II.

d'*Alben* ou *Alpen*, une montagne fort haute : deux montagnes baignées par la mer s'étant donc ouvertes par la force d'un volcan, élancerent une prodigieuſe quantité de pierres, qui retombant, couvrirent une étendue de Pays (*a*), & abîmerent pluſieurs peuplades de *Liguriens*, qui l'habitoient.

19. Celle des deux Isles *Eléctrides*, ſur laquelle les Théſſaliens batîrent la Ville de *Spine*, ſemble être ſortie de la mer par la force d'un Volcan. PLINE en dénombre dix dans l'Archipel, qui ſortirent de cette maniére, parmi leſquelles celle de *Therasia* aujourd'hui *Santorini*, qui en ſortit l'an 237. avant l'Ere vulgaire, porte toutes les marques de l'action du feu ; on en vit ſortir une autre à côté de celle-ci l'an 1709. Dans les mers d'Italie, *le Vulcanello* (rocher entre l'Isle de *Lipari* & celle de *Vulcano*), l'Isle d'*Iſchia*, celle da *Procida*, & une autre qui ſortit dans la mer de Toſcane, l'an 206. avant l'Ere vulgaire eurent la même origine (*b*). Ces Isles ſont toutes hériſſées de rochers ; or telle étoit ſelon APOLLONIUS de Rhode l'Isle *Eléctride* (*c*).

20. Le Géographe SCYLAX, qui écrivoit vers l'an 500. avant l'Ere vulgaire (*d*), mais qui s'eſt ſervi dans la déſcription des côtes de l'Italie de mémoires d'environ un ſiécle plus anciens, dit que la Ville de *Spine* étoit ſituée près du fleuve de même nom, qu'on remontoit pour y parvenir l'eſpace de 20. Stades (2. $\frac{1}{2}$ milles). Les Géographes EUDOXE & ARTEMIDORE, au rapport d'ETIENNE de Byzance (*e*) avoient écrit ſur cette Ville & ſur le fleuve *Spinus*. C'eſt le fameux *Eridan* des Grecs & des Latins. HÉRODOTE (*f*) révoqua en doute l'exiſtence d'un fleuve de même nom dans les mers ſeptentrionales, ſoupçonnant que

(*a*) De 12. milles de long. ſur 10. de larg.
(*b*) PLIN. lib. II. cap. 87.
(*c*) *In Inſulam aſperam Electrida ferebantur.* Argon. lib. IV. v. 581.
(*d*) Herod. lib. IV. c. 44.
(*e*) V. Σπῖνα.
(*f*) Lib. III. c. 115.

que ce nom, qui lui ſembloit Grec, eut été forgé par les Poëtes ; & STRABON nie abſolument qu'il y ait jamais eu de fleuve de ce nom, & de l'ambre à ſon embouchure. Cependant quoique PLINE (*a*) ſoit d'accord avec lui ſur ce point, il aſſûre neanmoins que l'embouchure *Spinétique* étoit autrefois appellée l'*Eridan* (*b*). Les Grecs qui commerçoient à *Spine* connoiſſoient cette branche du Pô ſous le nom d'Ἠ'ριδανὸς, & leurs anciens Poëtes, qui célébrent *Phaëton*, imités par les Latins, l'étendirent à tout le fleuve. Mais ce nom étoit Celtique, & le Celtes ne le donnoient qu'à cette branche, qui ſe diviſoit à *Codrea* (*c*) ſur la droite. Ce lieu dans lequel on trouva quelques Inſcriptions qui en confirment l'antiquité étoit encore appellé dans le ſiécle XI. *Caput de Reda* (*d*), & PRISCIEN dans ſes Antiquités de *Ferrare* aſſûre que le Pô ne ſe diviſoit pas à *Ferrare*, mais quelque mille au-deſſous, à *Codrea*, qui avoit ce nom parceque la branche du Pô qu'on nommoit *Eridane* prenoit de là ſon commencement (*e*). Pluſieurs fleuves dans les païs abités par les Celtes avoient un nom ſemblable, & j'obſerve que le long du cours de chacun il y avoit des ſources chaudes, & qu'on trouvoit de l'ambre jaune aux embouchures de quelques uns d'entr'eux. Le fleuve *Rérone* qui coule par la Ville de *Vicence* étoit anciennement appellé *Reteno* (*f*) ; dans le ſiécle X. il conſervoit encore le nom de *Retone* (*g*) & *Retrone* ; les Vicentins & les Padouans, qui creuſerent dans leurs territoires pluſieurs canaux dans le ſiécle XII. & ſuivans, en changerent beaucoup l'ancien cours : ſe

(*a*) Lib. XXXVII. c. II.
(*b*) L. III. c. 16.
(*c*) V. la Carte.
(*d*) Dipl. an. 1031. apud MURAT. Antich. Eſtenſi P. I.
(*e*) V. ALBERTI Déſcr. Ital. p. 342. b.
(*f*) VENANT. FORTUN. in Vita S. Martini.
(*g*) Dipl. apud UGHEL. Ital. Sacr. in Epiſc. Patav. & Cremon.

ſe déchargeoit autrefois dans le lac d'*Anguillara*, ou de *Vigaʒuolo*; ELIEN (*a*) décrivant la pêche des anguilles, qui ſe faiſoit dans ce lac, nomme le fleuve Ηρετνὸς (*Eretenus*). Or à la gauche de ce fleuve il y a les fameux bains d'*Abano* : le long du *Rhin* & du *Reno* il y a auſſi des ſources chaudes. Le *Rodaune*, fleuve qui ſe décharge ſur la gauche de la *Viſtule* à trois milles de ſon embouchure, & qui par la variation des dialectes eſt appellé *Raddune* & *Reddune*, eſt l'Ηρίδανος, dont on avoit raconté à HERODOTE, qu'il ſe déchargeoit dans la mer ſeptentrionale (*b*). Il y portoit autrefois ſes eaux, & on recueille encore en grande quantité l'ambre jaune, que la mer rejette ſur une langue de terre voiſine. Après qu'on ne trouva plus cette production près de notre *Eridan*, les Grecs, & les Romains enſuite, la tiroient des peuples de ces païs ſeptentrionaux (*c*). La *Duna*, ſur laquelle on la chargeoit pour la tranſporter dans le *Boryſthène*, où les Grecs alloient l'acheter, étoit auſſi appellée *Rhudon* (*d*). On a vû ci-deſſus les eruptions des Volcans à la droite du *Rhône*, dont l'ancien nom eſt Celtique; ARISTOTE (*e*) décrit un lac bouillonant dans la *Ligurie* aux environs de *Marſeille*; ſon diſciple THÉOPHRASTE aſſûroit, au rapport de PLINE (*f*), qu'on recueilloit de l'ambre dans la *Ligurie* (*g*), & que les vagues de la mer la rejettoient ſur le Cap du *Pirenée*; au Sud de ce Cap oppoſé aux embouchures du *Rhône*, une Ville portoit un nom ſemblable (*Rhode*, aujourd'hui *Roſes*); & PLINE fait mention d'une Ville de *Rhoda*, qui étoit jadis à la droite de l'embouchure du *Rhône*, qu'il ſuppoſe mal à pro-

(*a*) Hiſtor. Animal. l. 14. c. 8.
(*b*) Lib. III. c. 115. CLUVER. Ital. Ant. l. I. c. 34.
(*c*) CLUVER. German. Antiq. l. III. c. 34. &c.
(*d*) MARCIEN HERACL. in Peripl.; V. BAYERI Diſſert. de Venedis &c. in tom. VII. Acad. Petrop.
(*e*) In lib. de Mirandis.
(*f*) L. XXXVII. c. 2.
(*g*) Ces deux Auteurs nomment *Ligurie* le païs que les Ligures abitoient auſſi au delà des Alpes.

à propos avoir été bâtie par les Rhodiens (*a*). Si cet Auteur n'ajoûtoit pas foi à THÉOPHRASTE & à XENOPHANE ſur cette production dans ces lieux, & nioit auſſi bien que STRABON & pluſieurs autres anciens, qu'il y en eut jamais eû à l'embouchure de notre *Eridan*, c'eſt parcequ'il jugeoit de ce qui étoit autrefois, ſur ce qu'ils voyoit de ſon tems ; mais de même que le limon porté par le *Rhône*, en formant l'Iſle qu'on appelle de *Camargue*, détourna de la mer les ſources de l'ambre : celui qui fut porté par l'*Eridan* détourna celles qui étoient le long de ſon cours. C'eſt ce qu'on apprendra enſuite de la recherche ſur la prolongation du continent.

21. Du tems de STRABON, c'eſt-à-dire environ l'an 18. de l'Ere vulgaire, la Ville de *Spine*, que cet Auteur reconnoit avoir été maritime, étoit ſituée dans le continent à 90. ſtades (11. $\frac{1}{4}$ mill.) environ de diſtance de la mer ; d'où je conclus, que dans les VI ſiécles, qui s'écoulérent entre le tems des mémoires ſuivis par SCYLAX (V. n. 20. p.), & celui de STRABON, le fleuve porta à cette embouchure tant de limon, que le continent en fut prolongé de 9. milles, ce qui fait un mille tous les 66. ans. Or en faiſant une proportion entre ces tems & les eſpaces donnés par ces deux Auteurs, il réſulte, que l'an 933. cette Ville étoit encore baignée par la mer, & que l'an 1334, vers lequel comme on a vû ci-deſſus, on la bâtit, elle étoit éloignée d'environ 9. mille de l'embouchure de l'*Eridan*. En ſuivant cette proportion je trouve que la diſtance entre l'emplacement de la Ville de *Spine*, & l'ancienne embouchure de l'*Eridan* étoit de 12. milles au tems de l'embraſement de *Phaëton*, qui arriva dans le ſiécle XXII. avant l'Ere vulgaire; & en remontant plus haut, je trouve même le lieu de l'ancienne côte aux environs de l'embouchure du Pô au tems du Déluge, dont l'époque, ſelon le calcul que je fais ſur le texte Samaritain, eſt de l'an 3045. avant l'Ere vulgaire,

(*a*) Lib. III, c. 4.

c'eſt-à-dire de huit ſiécles anterieure à l'embraſement de Phaëton : ces huit ſiécles donnent environ 13. milles pour la prolongation du continent.

22. Ces deux poſitions dépendent de celles de la Ville de *Spine*, que je vais tâcher d'établir. Les veſtiges de cette Ville ſont ſubmergés dans le *Marais de Comacchio* ; SPRETI (*a*), qui écrivoit au commencement du XVI. ſiécle, aſſûre que de très-anciens chartres en faiſoient mention, & dit qu'il y avoit encore de ſon tems un endroit à la gauche du *Primaro*, qui portoit le nom de *Volta di Spina*. Les Marais n'avoient pas encore ſubmergé tant de païs : ils n'avoient que 12. milles de circuit, ſelon ALBERTI, qui nous apprend auſſi qu'au milieu de ce ſiécle XVI on voyoit encore quelques reſtes de cette Ville dans l'endroit, qu'on appelloit *Dorſo di Spina* : ce nom fait voir qu'elle avoit été bâtie ſur un endroit élevé, & que le limon du fleuve qui l'environnoit, n'avoit pas encore réhauſſé le ſol au niveau de cette hauteur ; qu'elle par conſéquent avoit été un' isle qui s'élevoit en pointe au-deſſus des eaux de la mer (*b*) ; que cette isle enfin réünie au rivage voiſin, qui ne ſurpaſſoit que de peu le niveau de la mer, conſervoit ſur lui preſque toute ſon élévation. L'attention que ces deux Auteurs ont fait à ce que dit STRABON, qu'elle étoit éloignée de 11. milles de la mer, ſert à prouver qu'il en étoit de même de leur tems : car ſi elle en eut été plus ou moins éloignée, ils n'auroient pas manqué de l'obſerver, & de nous l'apprendre, vûe l'exactitude avec laquelle ils ont donné la déſcription de ces lieux : or les milles dont ſe ſervent ces Auteurs ſont d'un cinquiéme plus longs que les anciens milles Romains ; donc ces 11. milles ſont égaux à 13. $\frac{3}{4}$ milles Romains, qu'on trouve préciſément ſur la Carte de MAGIN entre le *Porto di Primaro* & la *Punta di Humana*. La Ville

(*a*) De Orig. & Amplit. Urb. Raven. l. 1.
(*b*) V. les Cartes de la Géogr. Phyſ. de M. BUACHE.

Ville de *Spine* étoit donc ſituée près de cet endroit. A 9 mille de là on a le lieu de l'embouchure de l'*Eridan* pour l'an 1334; à 12 milles, celui de l'embouchure au tems de l'embraſement de *Phaëton*, & cette diſtance porte à *Conſandolo*; enfin à 13 milles on a le lieu de la côte après le Déluge à un mille environ au deſſus de *Codrea*.

23. Par tout ce que je viens de dire il eſt pleinement prouvé que les *Isles Eléctrides* ont réellement exiſté, & que le limon porté par le fleuve, les joignit au continent, & le prolongea de 45. milles dans 3045. ans qui ſe ſont écoulés depuis le Déluge juſqu'au tems de STRABON: qu'on ceſſa de trouver de l'ambre ſur l'*Eridan* depuis que le même limon eut comblé le lac ſalé, dans lequel l'acide du ſel marin durciſſoit cette ſubſtance ſulfureuſe, qui y découloit abondamment des entrailles de la terre: qu'en ſéparant enfin les circonſtances fabuleuſes que l'imagination des Poëtes a ajoûté à la tradition de l'eruption d'un Volcan près de l'*Eridan* & de la chûte d'une maſſe enflammée dans ſes eaux, on y découvre un phénomène qui donne des grandes lumiéres à la Géographie phyſique & à l'Hiſtoire. Je décrirai maintenant en particulier la prolongation formée par toutes les branches du Pô, & les changemens qui ſont arrivés ſoit dans leur cours, ſoit dans la quantité de l'eau qui y couloit.

24. Du tems de STRABON le Pô étoit diviſé en ſept branches depuis environ ſix ſiécles, & pendant l'intervalle de tems qui s'eſt écoulé depuis cet Auteur juſqu'au XII ſiécle, dans lequel le Pô commença à couler par la branche *Pô grande*, le continent ne fut prolongé que de peu à l'embouchure de l'*Eridan*; mais il étoit déja étendu au delà de l'emplacement du Village de *S. Alberto* (*a*); car au rapport de l'Auteur d'une Chronique de *Ferrare* (*b*), il

(*a*) Voyez la Carte au lieu marqué *Inſula Pyreti*.
(*b*) Publiée par MURATORI, *Rer. Italic.* Tom. VIII. p. 474. &c.

y avoit en cet endroit un pont sur le Pô, qui joignoit le grand chemin de *Ravenne* ; & ce grand chemin étoit le même, que celui qu'AUGUSTE fit paver depuis *Rimini* jusqu'à *Ravenne* (*a*), & qui delà traversant toutes les embouchures du Pô conduisoit jusqu'à *Altino* ; cet Empereur avoit de même fait creuser le canal, qui portoit son nom, & qui couloit de la branche *Spinétique* au-dessus du pont (*b*); & *Ravenne* de ce tems-là étoit encore baignée par la mer, qui y entroit dans le flux par les canaux, qui l'entrecoupoient (*c*); mais au commencement du VI. siécle elle en étoit déja éloignée d'$\frac{1}{4}$ de mille (*d*). Le Roi ODOACER en fit creuser un au nord de cette Ville peu de tems après, qu'il y eût établi sa résidence en 476; ce canal joignoit celui d'AUGUSTE à une branche du Pô sur laquelle on navigeoit encore dans le siécle XIV. (*Voyez la Carte*) (*e*). Plusieurs Auteurs du moyen âge nomment cette branche *Baderinus* (*f*), ou *Fluvius Padenæ* (*g*); son vrai nom étoit *Paderenus* : le même Roi fit bâtir son palais de *Blacherne* dans l'isle formée par cette branche, ce qui fait voir, que le sol en étoit assez solide & spacieux. Le *Paderenus* couloit de l'*Eridan* (*h*) vers *Ravenne*, & il se joignoit sous ses murailles au canal d'AUGUSTE, qui avoit traversé cette Ville (*i*). L'Auteur de la Chronique de *Ferrare*, qui écrivoit vers la fin du XIV siécle, assûre que de son tems il y avoit 7. milles entre cet endroit, & le Port de *Primaro*; les milles dont se sert cet Au-

(*a*) JORNANDES de reb. Gothic. c. 52.
(*b*) Chron. Ferrar. loc. cit.
(*c*) STRAB. lib. V.
(*d*) PROCOP. de Bello Goth. lib. I.
(*e*) Chron. Rav. Rer. Ital.
(*f*) PAUL. DIAC. Hist. Lang. lib. 3. c. 19.
(*g*) Chron. Rav. ibid. & Papyr. du siécle VIII. à la suite de l'*Istoria Dipl. du Maffei* n. XV.
(*h*) Un peu au-dessous du Village de *S. Nicolo*. Chron. Fer. ibid. Voyez la Carte.
(*i*) AGNEL. loc. c.

Auteur ſont aux anciens milles Romains comme 7. à 8. ½ Dans les Cartes de l'Italie, que MAGIN a compoſées au commencement du dernier ſiécle, il y a environ 9. milles Romains anciens entre ces deux endroits; donc le *Pô de Primaro* n'avoit pas prolongé le continent dans ces deux ſiécles. (*a*) Mais depuis ce tems la Mer ſemble avoir regagné dans cet endroit ſur le continent; car dans la carte de l'état Eccleſiaſtique des PP. Boſcovich & le Maire on ne voit plus la prolongation formée par le Primaro & deſſinée dans la Carte du Magin, ni les deux isles, & les deux bancs de ſable vis-à-vis de cette embouchure (*voyés la carte*). Cette diſcuſſion ſur la longueur du continent confirme la poſition de la Ville de *Spine* (v. §. 22.).

25. Selon PRISCIEN PELLEGRIN (*b*) le village de *Conſandolo* étoit appellé *Caput Sandali*, parce que dans cet endroit il ſe ſéparoit de la gauche de l'*Eridan* une branche nommée *Sandalus*, qui couloit vers le village, qui porte le nom de *Sandalo*. Le même Auteur (*c*) décrit ailleurs un ancien canal, appellé *Foſſa Boſia*, qui depuis *Conſandolo* portoit une partie des eaux du *Primaro* dans le Pô *di Volana* à *Médélane*; (*voyes la carte*) c'étoit l'ancien lit du *Sandalo*, qui prit ce nom d'un certein *Boſius*, qui le fit nettoyer. Il ſemble (v §. 22.) que ce fut dans le tems de l'eruption de pluſieurs Volcans le long du Pô, qu'il ſe diviſa en ces deux branches. On a vû que la premiére diviſion du Pô ſe faiſoit à *Codrea*, dont la branche à la droite étoit l'*Eridan*; l'autre étoit appellée *Sagis*, ſelon PLINE, qui nomme ſon embouchure *Sagis Oſtium*. Il dit que la *Olane* étoit là premiére des ſuivantes, que l'art avoit creuſées. (*d*) L'eau

ayant

(*a*) RUBEUS (Hiſt. Rav. lib. 5.) qui écrivoit ſur la fin du XVI. ſiécle compte 18 milles entre Ravenne & l'embouchure de Primaro; ce qui revient au même.

(*b*) Cité par ALBERTI *Deſcr. Ital.* pag. 392. 6.

(*c*) Rapporté par MURATORI *Piena eſpoſiz. dei diritti Imp. ed Eſtenſi ec.*

(*d*) Lib. III. c. XVI.

ayant abondé dans cette derniére, & preſque manqué dans la *Sagis*, le nom d' *Olane* fût donné à la premiére partie de cette branche, & le nom de *Sagis* ne lui reſta que du lieu de ſa diviſion d' avec la *Olane* juſqu' à la Mer. Ses veſtiges ſont marqués dans la Carte de MAGIN avec le nom de *Gorgadello*, & ſelon CLUVIER (*a*) quelque peu d' eau couloit encore de ſon tems, c' eſt à dire au commencement du dernier ſiécle, de la *Volane* près du lieu de *Marozze*. La Table Théodoſienne marque un lieu *Sagis*, dont la poſition tombe au même endroit, où ces deux branches ſe diviſoient. POLYBE (*b*) ne fait mention d' aucune autre branche du Pò que de la *Paduſa*, (c' eſt le nom qu' il donne à l' *Eridan*, le long duquel s' étendoit au Sud la *Paduſa Palus* des anciens), & de l' *Olane* parcequ' elles étoient de ſon tems les plus conſidérables. La branche qui ſe diviſe à la droite de *Ferrare* n' exiſta que depuis le commencement du ſiécle VIII. de l' Ere vulgaire: les Ravenniens la creuſerent pour ſe défendre de leurs ennemis, & la nommérent *Foſſa*, & *Padus Foſſæ* (*c*); aujourd'hui on l' appelle *Pò di Ferrara*, ou *Pò morto* à cauſe du peu d' eau qui y coule (*voyez la carte*). Cette premiére diviſion du Pò à une petite diſtance de l' ancienne côte, confirme l' époque du deluge, & ce que j'ai établi au §. 13.: que le limon porté par le Pò à ſon ancienne embouchure, devoit en peu de tems l' obbliger à ſe diviſer; le flux de la Mer contribue le plus à ces diviſions proches de l' embochure: le fleuve, qui après avoir élevé ſon lit rompt ſes bords, creuſe les autres, qui en ſont plus éloignées.

26. De la gauche de l' *Eridan* ſe diviſa auſſi dans la ſuite une branche qu' on appelloit ſelon ALBERTI, *Vergens fluvius*, aujourd'hui le *Vergeneſe*, qui eſt preſque ſans eaux

&

(*a*) Ital. Antiq. lib. 1. c. 35.
(*b*) Lib. II.
(*c*) V. Agnel. *in vita Felicis*, & ALBERTI pag. 343. 6.

& ſe perd dans les marais de *Comacchio*. Son ancienne embouchure, que PLINE appelle *Caprafiæ oſtium*, eſt la même que celle qu'on appelle Porto di *Magnavacca*. Ces trois branches ſont les ſeules dans leſquelles le Pô ſe diviſoit. Avant que de paſſer à décrire les autres branches & canaux à la gauche de ſon cours, je dois rendre compte d'un autre effet conſiderable produit par ce prolongement de continent, c'eſt-à-dire de cette ſuite de marais qu'on appelloit anciennement *Paduſa*, & qui deſſéchés dans quelques lieux, & plus étendus qu'autrefois dans d'autres, ont pris différens noms.

25. *Ravenne* avoit été bâtie ſur pluſieurs Isles, & au premier ſiécle de nôtre Ere, elle tenoit déja d'un coté au continent (§. 24.) cinq ſiécles aprés, ſelon PROCOPE; elle étoit éloigné de la Mer de 250. pas; les flottes, & les armées de terre n'en pouvoient que difficilement approcher; les premiéres arrêtées par les bancs de ſable, qui s'étendoient dans la Mer juſqu'à 30 ſtades, ou 4.$\frac{3}{7}$ milles (*a*); les dernieres par le Pô par les autres fleuves navigables, & par les étangs, dont cette Ville étoit environée. Les eaux de la Mer dans le flux entroient dans les canaux, & ſe répandoient auſſi loin qu'un homme peut marcher dans un jour; (*b*) on profitoit de ce tems pour la navigation. Cela arrivoit non ſeulement à *Ravenne*, mais le long de la côte juſqu'à *Aquilée*. Les Romains (*c*) après qu'ils conquirent ſur les *Ombriens* la Ville de *Ravenne*, en perfectionnerent le Port, & POMPÉE y établit une flotte (*d*), qui gardoit la Mer ſupérieure & celles du Levant (*e*). Ce Port étoit ſi vaſte que du tems d'AUGUSTE 250 Galeres y demeu-

(*a*) Sept des ſtades de PROCOPE, & des Auteurs du bas Empire, font le mille. V. l'*Analyſe de l'Italie* de M. d'ANVILLE.
(*b*) Les anciens, ſelon Vegece l'étendoient pour les troupes juſqu'à 24. milles.
(*c*) PROCOP. de bello Goth. lib. 1.
(*d*) Cicer. pro L. Manil.
(*e*) Veget. lib. v. c. 1.

meuroient en ſtation (*a*); du nom Latin de flotte on l'appella *Portus Claſſis*. Le grand commerce, qu'on y faiſoit peupla beaucoup la ville *de Ravenne*, & celle de *Claſſis* qu'on bâtit à trois milles au Sud de *Ravenne*. Entre ces deux Villes, ſur la *Via Cæſaris*, qui les joignoit, on bâtit depuis celle de *Cæſarea*. (*b*) Ces trois Villes entouroient ainſi de trois côtés le Port. Vers l'Eſt il y avoit un'Isle ſur laquelle s'élevoit un célébre *Phare* ſemblable à celui d'*Alexandrie*. (*c*) Ce Port fameux avoit déja été tellement comblé par le limon dans le ſiécle VI. qu'un Auteur de ce tems (*d*) dit que les arbres, fruitiers plantés dans des jardins ſpacieux, occupoient la place des arbres des vaiſſeaux, qu'y flottoient autrefois. Dès le IV ſiécle ce Port n'étoit plus fréquenté : car les flottes Impériales relâchoient toujours depuis ce tems au *Portus Eridani* (*e*) formé par l'embouchure du *Paderenus*, (*f*) après avoir reçu le canal qui traverſoit la Ville.

28. Ce canal contenoit au milieu du V ſiécle deux parties de l'eau de la *Foſſa Auguſta*, la troiſiéme couloit dans un autre canal, qu'on en avoit diviſé au moyen d'une grande digue de pierre, (*g*) & qui ſervoit de foſſé à la Ville vers l'Oueſt pour la défendre de ce côté, où les marais laiſſoient un petit paſſage, au rapport de JORNANDÈS, qui écrivoit au milieu du VI ſiécle. La ville de *Ravenne* ainſi ſituée aux milieu des eaux bravoit la fureur des Barbares; c'eſt pour cela que les Empereurs d'Occident après THÉODOSE I. y firent preſque toujours leur reſidence, de même que le Roi ODOACER, qui y ſoutint un ſiége de trois ans con-

(*a*) DIO apud JORNAND. de reb. Gothic. c. 52.
(*b*) JORNAND ibid.
(*c*) PLIN. l. 36. c. 12.
(*d*) FABIUS apud JORNAND. c. 52.
(*e*) AGNEL paſſim.
(*f*) Au commencement du VI. ſiécle on avoit déja bâti un autre *Phare*, ou eſt aujourd'hui *la Rotonda*, qui en prit le nom de *Monaſterium ad Pharum*.
(*g*) Sidon. Apollin. lib. 1. epiſt. 8.

contre le Roi THÉODÉRIC: le premier après qu'il ſe rendit Maitre de cette Ville en 476, avoit fait creuſer le Canal appellé *Foſſa Aſconis*, qui joignoit le *Padus-Renus* à la *Foſſa Auguſta*; (*voyés la carte*), & il en fit à cette occaſion creuſer un autre (l'An 490) depuis la Mer, où étoit le *Pinetum* (*a*) juſqu'au Pont *Marmoreus*. (*b*) L'eau qu'on conduiſit dans ce canal étoit celle du fleuve *Bedeſis*, qui après avoir coulé entre *Ravenne*, & *Céſarée*, débouchoit dans le Port de *Claſſis*; une autre branche de ce fleuve ſe déchargeoit dans le même Port, après avoir coulé entre *Céſarée*, & *Claſſis* ſous le nom de *Fluvius Pantheon*. Il fourniſſoit auſſi l'eau à *Ravenne* dans un aqueduc que le Roi THÉODÉRIC fit réparer (*c*), d'où on lui donna dans le moyen âge le nom d'*Aquæductus*, changé depuis en celui de *Ronco*; mais dans les Montagnes il conſerve celui de *Bédéſe*. Ce fleuve & le *Montone* appellé anciennement *Utens*, & *Vitis* (*d*) qui ſe déchargeoit autrefois dans la *Paduſa*, & tous ces canaux trop multipliés comblerent de limon le ports de *Ravenne* les uns après les autres, de ſorte que les isles & bancs de ſable décrits par PROCOPE, & celles qu'on voit dans la carte de la *Romagne* de Magin, furent jointes au continent, & la Mer ſur la fin du XVI. ſiécle étoit déja éloignée de *Ravenne* de 4. milles, (*e*) diſtance qu'on trouve auſſi ſur la Carte des PP. BOSCOVIC & le MAIRE.

29. Parce que j'ai prouvé ci devant, que le rivage de la Mer étoit anciennement au deſſus de *Codrea*, on voit, que tous les fleuves depuis le *Réno* juſqu'à *Ravenne* ſe déchargoient autrefois dans la Mer, qui baignoit alors ces Pays, qui ſont le long de la droite du *Primaro*. Or tan-

(*a*) Bois du Pin qu'Auguſte avoit fait planter pour la flotte. Rub. hiſt. Rav.
(*b*) Il ſemble qu'il ait été ſur le fleuve *Bédéſis*.
(*c*) CASSIODOR. in Chron.
(*d*) LIV. lib. v. PLIN. l. III. c. 15.
(*e*) RUB. Hiſt. Rav.

dis que le Pò prolongeoit le continent d'un côté, les fleuves le prolongeoient de l'autre, & rempliſſoient de limon le long Golphe compris entre les bords du Pò ainſi prolongés, & cette ancienne côté, le long de laquelle ils avoient leurs embouchures. Le *Santerno*, qui en eſt un des plus conſidérables, parvint à former une langue de terre juſqu'à l'*Eridan*, avec lequel il conflua, en coupant en deux ce Golphe, dont la partie, qui fût enclavée dans le continent, eſt le lieu le plus bas des marais entre ce fleuve, & le *Réno*, qui empêchent les riviéres de la *Legation de Bologne* de ſe décharger dans le lit du Pô de *Primaro* élevé de plus en plus ſur ces marais par le limon, que le fleuve dépoſa dans le cours de tant de ſiécles. L'autre partie du Golphe fût auſſi ſeparée de la Mer par le limon des branches *Meſſanicus*, & *Paderenus*, qui prolongerent le continent juſqu'à *Ravenne*, tandis, que de l'autre côté les isles ſur leſquelles cette Ville étoit bâtie y étoient jointes de la maniére qu'on a vû au §. précédent. Le *Meſſanicus* ayant élevé ſon lit, répandoit les eaux dans les marais à ſa droite, qui en prirent le nom de *Paduſa*; AUGUSTE le fit creuſer de nouveau pour le rendre navigable juſqu'à *Ravenne*. Le *Paderenus*, dont l'embouchure eſt celle que PLINE appelle *Vatreni oſtium*, parvint à ſe joindre vers le ſiécle IV. a ce canal d'AUGUSTE au delà de *Ravenne*. Il s'en détacha dans la ſuite une branche, qui par la nouveautée de ſon cours fut appellé *Padus Juveniacus*: des chartres du X. ſiécle en font déja mention: c'eſt la partie inférieure du Pô de *Primaro*. Mais enfin les riviéres depuis le *Santerno* juſqu'au *Montone* ayant rempli de limon ces marais, ne trouverent pas de réſiſtence à s'ouvrir pluſieurs embochures dans la Mer; car la *Foſſa Auguſta* comblée de limon n'étoit plus navigable dès le ſiécle VI., & la voye Romaine, qui lui ſervoit de digue, étoit peu-à-peu enſevelie ſous le ſol, qu'il rehauſſoit.

30. Les autres ſoit branches du Pô, ſoit canaux depuis la branche *Sagis*, furent creuſées par les Tyrrhéniens, qui détournerent le gros des eaux du fleuve dans les marais d'*Adria* appellés *Septem Maria* (*voyés la carte*). (*a*) Après la branche *Volane* il y avoit quelques embouchures, que PLINE appelle *Oſtia plena*. Le lieu de *Co-di-goro* prit ſon ancien nom de *Caput Gauri*, d'une branche qui ſe détachoit de la *Volane* avec le nom de *Gaurus fluvius*; Il ſemble qu'elle ait été appellée anciennement *Neronia Foſſa* (*b*), car la Table Théodoſienne à quatre milles de *Sacis* marque *Neroma*: la poſition de *Corniculani*, qu'elle marque à ſix milles en deça d'*Ariano* tombe au paſſage du *Gaurus*. A ſix milles de *Co di-goro* il y a le Village de *Mezzo-Goro*, ainſi appellé parceque quand on le bâtit, il étoit à égale diſtance entre le commencement du *Goro*, & ſon embouchure. Cette branche à ſi fort prolongé le continent, qu'elle a aujourd'hui le double de cours. Sur la fin du XVI. ſiécle le Duc ALPHONSE II. de *Ferrare* fit bâtir au rivage de la Mer la maiſon de *Plaiſance* appellée la *Méſola*: (*c*) aujourd'hui elle en eſt éloignée de huit milles; mais l'eau a preſque manqué dans cette branche. Le Pô d'*Ariano* & les branches ſuivantes ſont nouvelles. Celle que PLINE appelle *Carbonaria*, eſt la branche qui coule du Village de *Corbola*, où les diſtances marquées dans la Table Théodoſienne portent la manſion ad VII. *Maria*; cette branche avec la *Foſſa Philiſtina*, & le fleuve *Tartaro* prolongerent beaucoup le continent, & y enclavérent les Isles formées par une chaîne de collines, & entr'autres celle, où eſt bâti *Loreo*, *Lauretum*, qu'on trouve dès le VII. ſiécle dans le nombre des lieux, qui dans les lacunes ce *Véniſe* avoient échappé à la domination des

(*a*) PLIN. lib. III. c. XVI.

(*b*) Creuſée peut être par ordre de l'Empereur CLAUDIUS NERON qui à ſon retour de la conquête de la Grande Bretagne s'embarqua ſur le Pô. V. DION. CASS. lib. 60. & PLIN. ibid.

(*c*) RUB. Hiſt. Rav. lib. VI.

Langobards. PLINE parle du célébre Port d'*Atria*, dont les Tyrrhéniens, fondateurs de cette Ville, ſe ſervoient pour faire ſur la Mer ſupérieure un commerce ſi grand, qu'elle en prit ſon nom d'*Atriatique*, changé depuis en celui d'*Adriatique*. Près de cette Ville, qui vit peu-à-peu s'enlever la Mer & le commerce, il y a vers le Sud un petit marais, iſolé, (*a*) qui ſemble avoir été ce fameux Port comblé par le limon, qui en éloigna la Mer de treize milles.

31. La *Foſſa Philiſtina*, dont le nom indique une des Nations Phéniciennes, qui compoſoient la Nation connüe par les Grecs tous le nom de *Tyrſeni*, fût creuſée par ce Peuple, pour enlever, à ce qu'il ſemble, aux Theſſaliens de *Spine*, avec l'eau de trois anciennes branches du Pô, le commerce, & la défenſe naturelle qu'ils trouvoient au milieu des eaux. Ce qui leur réuſſit: & les Theſſaliens furent contraints de ſe retirer dans la Grece. (*b*) Ce canal conduiſoit l'eau du Pô juſqu'à *Adria*; PRISCIEN en décrit les veſtiges depuis *Caſtelnuovo*, où il ſe dérachoit du Pô, juſqu'à *Cerignano*, & *Mezana*, (*c*) où le fleuve *Tartaro* y mêloit ſes eaux pour déboucher dans la Mer (*voyés la carte*). Mais dans le tems des Romains les eaux couloient de nouveau en abbondance dans la *Volana*, & dans l'*Eridan*; ſoit qu'Ils euſſent reglé la diſtribution entre ce deux branches, & la *Foſſa Filiſtina*, à fin qu'elles fuſſent toutes navigables; ſoit que le Pô pour avoir coulé du tems des Tyrrhéniens trois, ou quatre ſiécles en plus grande abondance dans cette derniére, en eut élevé le lit, & diſtribué de nouveau une plus grande quantité de ſes eaux dans le deux premiéres; car du tems de POLYBE l'embouchure *Olane* formoit un Port des plus ſurs de la Mer *Adriatique*, & l'embouchure *Spinetique* du tems de PLINE en formoit

(*a*) *V. Carta del Poleſine di Rovigo del* BONIFAZIO.
(*b*) DIONYS HAL.C lib. I. STRAB. lib. V.
(*c*) V. ALBERTI pag. 352. b.

moit un d'aſſez grande capacité ; l'Empereur CLAUDE déſcendit ſur un grand navire dans l'Adriatique par cette branche ; & au IV. ſiécle les troupes Romaines embarquées à *Oſtiglia* déſcendoient encore par cette branche & par la *Foſſa Auguſta* juſqu'à *Ravenne* (*a*). Depuis le tems des Romains l'eau alla en décroiſſant dans la *Foſſa Philiſtina*, qu'on trouve encore déſignée comme le confin de pluſieurs campagnes dans quelques chartres avec le nom de *Peleſtina*, ou *Peleſtrina* ; & elle ceſſa d'y couler du Pô depuis le XII ſiécle ; ſes veſtiges conſervent le nom de *Piſtrina*.

32. La direction de ces branches du Pô fait voir que la partie de la plaine, où couloient le *Sagis* & l'*Eridan*, & qui en étoit au commencement la plus inclinée, du tems des Tyrrhéniens avoit déja été élevé par le limon au-deſſus de cette partie, qui eſt à la gauche du cours de la prémiere ; ce qui eſt auſſi prouvé par la direction du cours de l'eau dans cette ſuite de canaux creuſez par les Romain, ſur leſquels, ſelon PLINE, on navigeoit de *Ravenne* juſqu'à *Altino* ; l'Itinéraire d'*Antonin* marquoit aux troupes Romaines cette navigation (*b*), que CASSIODORE décrit dans une lettre aux Tribuns de la marine de la Province *Venetia*. Ces canaux étoient fort-importans dans ces tems anterieurs à l'invention de la bouſſole, dans leſquels on craignoit de perdre de vüe les côtes : dans les mois orageux on navigeoit en grande ſûreté ſur ces canaux (*c*) ; il auroit été fort dangereux de côtoyer le rivage de la mer aux embouchures du Pô, à cauſe du courans & des bancs de ſable, qui varioient beaucoup, & qu'on ne connoiſſoit pas trop. Entre *l'Eridan* & la *Volane* (*voyez la Carte*) continuoit la *Foſſa Auguſta* près d'un lieu de même nom, &

(*a*) Tab. Theod. ſegm. IV. edit. Vindob. 1753.
(*b*) *Ravenna : Inde navigantur ſeptem maria Altinum uſque.*
(*c*) *Cum ventis ſævientibus mare fuerit clauſum, via vobis panditur per amæniſſima fluviorum &c.* CASSIOD. *Var.* lib. XII. ep. 24.

& l'eau y couloit de la *Volane* ; car telle étoit la direction d'un *rivus Baderinus* (*a*). Le lit de cette branche étoit donc alors plus élevé que celui de l'*Eridan*. L'eau de la *Fossa Neronia* couloit de l'autre côté de la *Volana* jusque dans la *Fossa Philistina*, & la pente du sol continuoit même au-delà de l'*Adige* ; car PLINE assûre, que le Pô mêloit ses eaux avec celles de l'*Adige*, du *Togisonus* & des deux *Medoaci* (*b*). Ce qui arrivoit au moyen du canal appellé *Silvus longus* (*c*), qui depuis *Ariano* les conduisoit par *Corbola* dans le *Tartaro*, & delà traversoit l'*Adige* à *Caput Aggeris* (*Cavarzere*), & après avoir reçu le fleuve *Togisonus* (*d*), une partie de ses eaux débouchant dans les *Lagunes* de *Venise*, avoit ouvert la langue de terre opposée & formé le Port de *Brondolo* (*e*); l'autre partie continuoit son cours dans la *Fossa Clodia*, à laquelle venoit se joindre un canal, qui conduisoit une partie de l'eau du *Medoacus major* (*la Brenta*), & du *Medoacus minor* (*f*): ces eaux avoient rompu la même langue, & forme l'ouverture qu'on appelle *Porto di Chioggia*.

33. Le limon déposé par ces branches & canaux, produisit une grande inégalité d'élevation dans le sol, dont s'ensuivirent des grands changemens dans leurs cours. Dans la partie de la plaine comprise entre la *Volane* & la *Fossa Philistina*, qui se trouva par cette raison moins élevée que le lit de ces deux branches, il s'en forma une nouvelle, qui aujourd'hui est la plus abondante de toutes. Environ l'an 1150. les habitans des lieu voisins de *Ruina*, envieux de la prosperité, dont joüissoient les cultivateurs de son territoire

(*a*) Dipl. an. 1013. in Append. *Difesa della S. Sede per Comacchio.*
(*b*) *His se padus miscet, ac per hæc effunditur* : l. cit.
(*c*) Chron. Ferrar. l. c.
(*d*) Ce fleuve, qui avoit sa source dans le territoire de *Padoue* près des bains d'*Abano*, a changé de cours & de nom.
(*e*) PLIN. ibid. V. la Carte du *Padouan* de MAGIN.
(*f*) Les Padouans en ont beaucoup changé le cours ; entre *Padoue* & *Pieve di Sacco*, on l'appelle *Fiumicello*. V. MAGIN ibid.

toire très-fertile, couperent au-dessus de cet endroit la rive gauche du Pò, qui submergea cette campagne, & fit des grands ravages en s'ouvrant une issüe dans la mer; enfin les Ferrarois avec bien de travail firent des digues tout le long de son cours, & il se creusa son lit. On appella cette branche *la Rotta di Ficarolo* (*a*). Dès le XIV siécle les eaux y couloient en telle abondance, qu'elles égaloient celles des deux autres branches *Volana*, & *Primaro* (*b*); de nos tems la plus grandes partie des eaux du Pò coule dans la dite branche, qu'on appelle par cette raison le *Pò grande*; elle changea souvent ses embouchures, qui produisirent une telle prolongation de continent, que suivant la Carte des PP. BOSCOVICH & le MAIRE, il y a aujourd'hui 17. milles de distance entre *Ariano* & la partie la plus avancée du rivage voisin. L'*Adige* dans la derniere partie de son cours, c'est-à-dire après s'être dirigé vers l'Est, réhausse de même beaucoup son lit: delà ces changemens de lit, qu'il a fait entre la *Badia* de *Vangadizza* & *Cavarzere* (*voyez la Carte*), & les fréquentes ruptures qu'il fait à ses rives (*c*). Ce réhaussement de sol a empêché *la Rotta di Ficarolo* de couler dans le lit de ce fleuve, qui est aujourd'hui plus élevé, que la branche du *Pò delle Fornaci* à *Anconetta*; car de cet endroit on remonte à force de chevaux le canal de *Lorèdo*, qui est assez rapide (*d*); les eaux de l'*Adige* coulent aussi dans le *Tartaro* par le canal qu'on appelle *Scortico*, & celle du *Tartaro* dans le Pò par la *Fossa Polisella* (*e*). Ces canaux, selon PRISCIEN, furent creusés pour décharger au moyen d'une partie de l'eau de l'*Adi-*

(*a*) ALBERTI pag. 345. b.
(*b*) Chron. Ferrar. l. cit.
(*c*) Cette branche qu'on appelle l'*Adigetto* est l'ancien lit de l'*Adige*; qui dans plusieurs Chartres de cette Abbaye est appellé *Adese veclo*, ou *Flumen veclum*.
(*d*) Voyage d'Europe tom. VI. p. 782.
(*e*) On doit observer que ces canaux font presque un angle droit entre les fleuves *Adige*, *Tartaro* & Pò.

l'*Adige* celles des grands marais, qui ſont dans ces lieux; mais ils ſont ſouvent enflés par les eaux de l'*Adige*, du *Tartaro* & du *Menaco* de telle ſorte, qu'ils inondent une grande étendue de pays (*a*).

34. Toutes ces branches du Pô, & ces canaux trop multipliés ont ſouvent produit des grandes inondations, pour peu que les pluyes ayent été abondantes; celle entr' autres qui arriva l'an 589. fit des terribles ravages (*b*). Le moyen de les empêcher & d'aſſûrer un lit plus conſtant au fleuve eſt de faire en ſorte qu'il ſe diviſe en moins de branche qu'il ſoit poſſible. Cela ſemble un paradoxe ſuivant le préjugé commun, que les eaux doivent baiſſer dans les fleuves à proportion de leur diramation; que, par exemple, ſi l'on dérive d'un fleuve un canal d'une capacité égale à celle de ſon lit, l'eau doive y baiſſer de moitié; & au contraire que ſi on fait confluer dans le lit d'un fleuve une quantité d'eau égale à celle qui y coule ordinairement, l'eau doive s'y élever du double. Mais ceux qui jugent ainſi, n'obſervent pas que c'eſt à la vîteſſe qu'on doit faire le plus d'attention dans le cours des fleuves, & qu'elle croit en raiſon de la maſſe des eaux qu'on y fait confluer. M. Genneté (*c*) a prouvé en dernier lieu par des expériences exactes, que les eaux des fleuves ainſi diviſées ne doivent baiſſer que de peu, & qu'on peut y en faire confluer une aſſez grande quantité ſans craindre des inondations; car après avoir fait couler dans un canal artificiel une quantité d'eau conſtante, & avoir marqué la hauteur qu'elle avoit, il y fit confluer dans une autre canal une quantité d'eau égale, & il obſerva qu'elle ne s'élevoit que d'$\frac{1}{40}$; il joignit un troiſiéme canal, & l'eau ne s'éleva que d'$\frac{1}{24}$, & ainſi de ſuite; & au contraire ayant diviſé l'eau d'un canal commun

(*a*) Alberti pag. 351. b.
(*b*) V. Hiſt. Miſcel. lib. XVIII.
(*c*) Réflexions ſur le cours des fleuves.

mun en deux canaux égaux, il observa, que l'eau ne baissoit dans ces canaux que d'$\frac{1}{36}$, dans trois d'$\frac{1}{24}$, dans quatre d'$\frac{1}{12}$, & ainsi de suite. La vîtesse que les eaux d'un fleuve, qui étoit divisé, acquierent étant réünies, produit encore cet autre avantage, qu'il se fait moins de dépositon de limon sur le fond du lit. M. GENNETÉ fait espérer un autre ouvrage, dans lequel il donnera entr'autres méthodes celle de nettoyer aisément les lits des fleuves: il est absolument necessaire de le faire, si on veut leur assûrer un lit constant dans la partie de leur cours, où ils commencent à le réhausser.

35. Quant aux autres changemens arrivés au cours du Pô, au-dessus de l'endroit, où il se divise, je n'en marquerai aussi que les plus considérables. Dans le siécle XI. il couloit entre *Luzzara* & *Suzara* vers *S. Benedetto*, où il recevoit le fleuve *Lirone*; & la partie du cours qu'il a aujourd'hui entre *Borgoforte* & *S. Giacomo*, étoit le lit de l'*Oglio*, dans lequel il coula après avoir rompu à la gauche de *Luzzara*. A *Plaisance*, dont il baigne les murailles, il couloit à un mille & demi vers le Nord; car telle étoit la distance du *Portus* ou *Emporium Placentinum*, qu'ANNIBAL manqua de surprendre, & qui étoit situé près du fleuvee, du même côté que la Ville; la voye Romaine, qui de *Plaisance* conduisoit à ce port, subsistoit encore dans le moyen âge (*a*); le long des murailles de la Ville couloit dans le Pô un fleuve appellé *Fons Angusti*, & les sources qui naissoient dans son lit étoient si abondantes qu'on le navigeoit au grand avantage de la Ville; dans le siécle XIV. il y couloit quelquefois dedans une partie des eaux du Pô & de la *Trebia* (*b*); & depuis ce tems, le Pô ayant élevé son ancien lit au-dessus de celui de ce fleuve, il y transporra

n toutes

(*a*) *Secus viam publicam, quæ ab urbe Placentia ad Placentinum Portum ducit.* Dipl. an. 879. publ. par CAMPI *Storia Eccl. di Piac. tom. I.*

(*b*) Chron. Placent. in tom. XVI. Rer. Italic. p. 561.

toutes ſes eaux. Près de *Pavie* il couloit autrefois dans cet ancien lit, qu'on appelle *la Rotta*, & qui contient encore une partie de ſes eaux; le *Téſin* y confluoit à un demi-mille de *Pavie*; mais le Pô ayant rompu le rivage à ſa droite, fit rengorger le *Téſin*, & inonda la campagne voiſine; enfin ayant fixé ſon cours, le *Téſin* y tranſporta ſon confluent à 4. milles à l'Eſt de *Pavie*, & les marais ſe deſſecherent, & laiſſerent à découvert l'isle appellée *Mezano* (*a*). Entre les confluens de la *Seſia* & de la *Doira Bautia* il a ſouvent changé de lit. La voye Romaine, qui s'étendoit le long de ſa rive gauche entre les Villes de *Quadratæ* & *Rigomagus*, l'empêchoit de ſe jetter ſur la plaine; mais le Pô & les eaux qui couloient au-delà de la voye ayant réhauſſé le ſol, & couvert cette digue, il ſe détacha depuis ces tems des collines du *Montferrat*, rompit ſa rive gauche, ſe creuſa des nouveaux lits & emporta les ruines de *Rigomagus*, rebâti ſur la fin du ſiécle VI. ſous le nom de *Tridinum*, après avoir contraint les abitans à tranſporter leurs abitations plus loin de ſon bord, où il bâtirent l'an 1210. la Ville de *Trin* (*b*). Mais ces nouveaux lits ayant été auſſi réhauſſez, le fleuve reprit ſon cours dans les anciens; ainſi l'an 1297. il avoit quitté ſon lit vers *Palazzolo*, & s'étoit jetté vers la colline, où eſt *la Rocca delle Donne* (*c*). Il l'a ſouvent changé depuis; & aujourd'hui entre la *Doira* & la *Seſia* il coule preſque partout diviſé en deux lits. L'an 1610. quantité de pierres ayant éboulé du rocher de *Verruë*, dont il baignoit le pié, il fut contraint de ſe jetter vers *Creſcentin*, où il ſe creuſa le lit dans lequel il coule depuis ce tems; car il ne ſervit de rien que de lui faire une digue ſans en avoir dégagé le lit

(*a*) On donnoit dans le moyen âge à ces ſortes d'Isles le nom de *Medianum*. MURATOR. Diſſert. XXI.
(*b*) V. IRIC. Diſſert. de *Rigomago*, & Hiſt. *Tridin.* lib. I. p. 14. 64. 65.
(*c*) *Sommario Comm. Fontaneto, e Gabiano* 1745.

lit de ces pierres: il l'emporta à la prémiere inondation (*a*).

36. Ces changemens, comme j'ai obſervé au §. 13, ſont produits par le peu de pente qu'a le lit du fleuve. A *Turin* il n'eſt élevé que de 100. toiſes ſur le niveau de la mer (*b*). Or à cauſe de tous ſes petits détours, le plan de ſon cours depuis cette Ville eſt long d'environ 300. milles. La déſcente de l'eau ne ſeroit donc que de $\frac{4}{11}$ de toiſe pour chaque mille s'il coulat ſur un plan ; mais elle eſt plus grande que cette quantité vers *Turin*, & moindre vers l'embouchure ; car comme il dépoſe dans la partie inférieure de ſon cours toûjours plus de limon, il réhauſſe de plus en plus, & rend courbe cette ſuperficie ſur laquelle il coule ; on doit donc la conſidérer comme compoſée d'un grand nombre de plans, dont la hauteur va toûjours en diminuant ; & diſtribuer cette déſcente & la vîteſſe de l'eau en raiſon de leur inclinaiſon ; mais déſtitués d'obſervations dans d'autres parties de ſon cours, on ne peut pas la déterminer : les plus importantes ſeroient celles de la hauteur de ſa ſource, & du lieu où ſes eaux reparoiſſent vers ſon entrée dans la plaine. En général depuis ce lieu juſqu'à la colline de *Turin*, la vîteſſe qu'il a, & l'inégale réſiſtance qu'il trouve dans les rives, font qu'il varie beaucoup ſon lit, en les rongeant de côté & d'autre ; le long de cette colline, la qualité des rives, & plus encore la quantité de ſa vîteſſe, qu'on peut appeller moyenne, fait qu'il ne creuſe, ni ne réhauſſe pas ſon lit, qui eſt en ce lieu aſſez conſtant. Mais en ſe dirigeant enſuite vers l'Eſt, il commence à le réhauſſer, ce qui l'oblige ſouvent à tranſporter ſes eaux de côté ou d'autre des isles qu'il forme.

37. Après m'être étendu ſur les changemens du cours du Pô autant que peut permettre le plan de ce Mémoire ;

(*a*) *Alleg. per Creſcentino* 1741.
(*b*) M. NEEDHAM a déterminé la hauteur de la Ville à 101. toiſes. *Obſerv. Barometr.*

il me reſte à ajoûter quelques obſervations ſur ſa ſource, & ſur quelques unes des rivières qu'il reçoit; & je finirai par indiquer les effets de la prolongation du continent à l'embouchure des fleuves. Le Mont *Viſo*, appellé par les Anciens *Veſulus Mons*, s'éleve fort en pointe, & eſt entouré de tous côtez de rochers eſcarpez. Quelques jeunes hommes, qui grimperent ſur ſon ſommet, rapportoient à ALBERTI qu'il y a une petite place (*a*). Vers le milieu de la déſcente un petit lac, qui au jugement de CLUVIER eſt très-agréable, & ne déborde jamais, par des conduits ſouterrains donne l'origine à trois fontaines, qui au-deſſous de ce lac ſortent du ſein de la montagne (*b*). Celle qui ſort plus bas que les autres, & vers le pied de la montagne, eſt la plus abondante en eaux, & a été proprement appellée *Padus* (*c*). PLINE obſerve, que *Padi fons mediis diebus æſtivis, velut interquieſcens, ſemper aret* (*d*). " Elle eſt „ au milieu d'un pré, proche des ruines d'un Chateau, que „ le Roi CHARLES VIII. avoit fait bâtir pour la commo- „ dité du paſſage de France en Italie „ (*e*). Ces trois fontaines ſe réüniſſent, & le fleuve ſe précipite des rochers avec un trés-grand bruit, en roulant des groſſes pierres, & eſt ſi abondant d'eaux, qu'il pourroit faire tourner une meule; ſans avoir cependant aucun lit conſtant dans ce ſol pier-

(*a*) Mais il ſe méprend en diſant, que ſur ce ſommet il y a deux fontaines; dont l'une donne la ſource à la *Durance* & à la *Doira*, & l'autre plus baſſe au Pô. Pag. 384. b. 385. Il copie trop à la lettre le texte de STRABON au liv. IV.

(*b*) CLUVER. Ital. Ant. lib. I. c. 35. PLIN. l. c. *Padus e gremio Veſuli montis*

(*c*) MELA l. II. c. 4. CLUVER. ibid.

(*d*) L. II. c. 103.

(*e*) GUICHENON Hiſt. Généal. de la R. Maiſon de Savoye. Lib. I. c. 3. C'eſt le pertuis du M. *Viſo*, aujourd'hui comblé de pierres, qui ſe détacherent de la cave de la montagne. Un Auteur de ce tems le décrit ainſi: " Il y a un nouveau paſſage bien merveilleux pour entrer au „ pays d'Italie; c'eſt par un pertuis qu'on a fait à côté du M. *Viſol* par „ une montagne qu'on a percé tout outre puis 14. ans ença, & dure en- „ viron un get d'arbaleſtre. „ JACQ. SIGAULT *Totale déſcription des paſſages des Gaules en Italie*, publiée par CAMUZAT Melang. Hiſt. p. 162.

pierreux. Enfin après un cours de 21. milles Romains (*a*), dans la Vallée, dont la plus grande largeur n'excede pas un mille, à son entrée dans la plaine, il se perd entre *Revel* & *Saluces* absorbé par le gravier qu'il y a porté ; de sorte qu'en Eté on le passe à pieds secs, & dans les autres saisons de l'année il coule avec peu d'eaux (*b*). PLINE ne s'est pas exprimé avec son exactitude ordinaire en supposant qu'il coule par un conduit souterrain (*c*) : *Condensque sese cuniculo, & in Forovibiensium agro iterum exoriens* ; car on sent en passant sur ce gravier le bruit de l'eau dont il est imbibé. Il coule de nouveau vers la fin du territoire de *Revel*, peu loin de l'Abbaye de *Staphardle* ; où il reçoit sur sa droite le torrent *Bronda*, & quatre milles au-dessous, un canal, qui conduit une partie des eaux de la *Vraita*, creusé par ordre du Marquis MAINFROY IV. de Saluces pour arroser la campagne appellée la *Gerbola*, qu'il fit défricher, & ensuite il reçoit cette rivière, & là *Maira*. Les cartes Géographiques marquent un canal de navigation, qui conduit une partie des eaux de la *Stura* dans le Pô peu au-dessus de *Carignan* ; il avoit été projetté dans le siécle dernier par le célébre Marquis de PIANEZZA, & éxecuté dans sa partie entre *Carmagnole* & le Pô (*d*) ; mais sa mort interrompit cet ouvrage, qui auroit été fort avantageux au commerce entre *Nice* & *Turin*, sur tout depuis qu'on fait de si grands travaux au Port de *Nice*. Delà jusqu'au *Tanaro*, le Pô ne reçoit que des torrens. La *Trebia* & les rivières suivantes inondoient une grande étendue de la plaine avant que les Romains eussent fondé leur Colonie de *Plaisance* l'an 218. avant l'Ere vulg. EMILIUS SCAURUS qui fit

(*a*) Ou de 14. milles du Piémont.
(*b*) CHIESA *Cor. Reale.*
(*c*) Cela a lieu dans le *Rhône*, le *Melfe* & le *Negro*, qui coulent sous des rochers dont la Chaine traverse leur cours. CÆSAR de bel. Gall. lib. I. GUICHEN. lib. I. c. 3. PLIN. lib. II. c. 103.
(*d*) On l'appelle le *Navilio*.

fit construire la voye *Emilienne* entre *Rimini* & *Plaisance*, fit écouler ces marais dans le Pô, en creusant un grand canal navigable sur le territoire de *Parme* (*e*) ; dont une partie subsiste encore sous le nom de la *Parmigiana*. Je m'étendrois trop en décrivant les changemens de cours des rivières de la *Lombardie*, & les canaux qu'on a fait en différens tems, surtout dans le *Modenois*, le *Bolonois* & le *Ferrarois* ; on peut consulter les ouvrages, qu'ont fait à cette occasion MANFREDI & GUGLIELMINI, & ceux que j'indique dans la note (*b*).

38. Entre les rivières que le Pô reçoit à sa gauche, la petite *Doire* est grossie par le torrent *Cinisella*, qui coule du lac qui est sur la plaine du Mont *Cenis*. Ce lac étoit autrefois beaucoup plus grand (*c*) ; c'est parcequ'il occupoit toute cette plaine, qui a cinq milles de long, sur un de large, que les Romains ne pratiquerent point une voye sur cette montagne ; mais une grande partie de ses eaux ayant écoulé, CHARLEMAGNE y passa avec son armée en 774. (*d*). Elle porte toutes les marques des volcans ; car il y a autour du lac des cavités en forme de cones renversés, qu'on ne peut attribuer qu'aux exhalaisons du feu ; & il semble qu'elle ait pris son nom (*M. Cenisius*) des cendres. Les volcans & les tremblemens de terre ont produit des grands changemens dans les montagnes ; PLINE assûre que les Alpes & les Apennins en avoient souvent éprouvé les secousses (*e*). La configuration de cette montagne indique, que le *Grand* & le *Petit* Mont *Cenis* n'en faisoient qu'une seule ; & que la voûte qui les joignoit, & couvroit l'abîme d'eau contenu dans son sein, ayant écroulé, laissa à dé-

(*a*) STRAB. lib. V.

(*b*) CORRADI, *Effetti dannosi delle paludi, ec.* Modena 1717. SILVESTRI, *Descr. Paludi Adriatiche.* MURATORI *Antiq. Italic.* Dissert. XXI.

(*c*) *Superne in cavis quibusdam locis magnus continetur lacus ; duoque fontes &c.* STRAB. lib. IV.

(*d*) V. EGINHART. *in V. Caroli M.*

à découvert ce Lac formé par le baſſin de la Montagne, qui retint une partie des eaux. (*a*)

39. Petrus Azarius, qui écrivoit vers la fin du XIV ſiécle, donne une curieuſe deſcription de l'*Orgo*, & la *Doira Bautia* (*b*). Il obſerve que ce deux fleuves, quoique peu éloignés, ſont tout-à-fait différens. Le premier rend fort fertiles les terres qu'il arroſe; quoiqu'il inonde, il à des guez bons & ſablonneux; on trouve dans ſon lit un grand nombre de poiſſons excellens, & on y reçueille quantité d'or en des grains ſi gros, qu'il en vit un de la valeur de ſeize florins. „ La *Doira* a ſa ſource dans des Montagnes „ couvertes de glaces éternelles: point d'or dans ſon lit, „ point de poiſſons, & de guez dans le Canavez; s'il „ coule dans les champs, il les détruit, ſi dans la prairies „ il en gâte & brûle les herbes. L'Auteur de la Chronique de *Plaiſance* fait une obſervation ſemblable ſur le riviéres *Nura*, & *Trebia*; & dit que le Pô rend fort fertiles les terres qu'il inonde, quoiqu'il cauſe ſouvent des grands dommages à ſes voiſins. (*c*) Pline obſerve auſſi que le Pô dans ſes inondations, *Agris quamvis torrentior, nil tamen ex rapto ſibi vindicans, atque ubi liquit agros, ubertate largior:* ce qu'il faut entendre de la plus grande partie de ſon cours dans la plaine. Ces differens effets ſont produits par les terres, & les ſels, ou par l'Ocre, & le ſable qu'ils charient dans une partie de leur cours, & dépoſent dans une autre.

40. La *Doira Bautia* mêloit anciennement ſes eaux avec celles d'un Lac, qui étoit formé par le baſſin que font les col-

(*a*) La hauteur de cette Montagne étoit donc plus grande, que celle, qui a été obſervée à la *Glacière* (v. §. 2. Nota *a*), & qui ſeroit trop petite à l'égard de la diſtance, où elle eſt du Mont *Tourné*.

(*b*) *Lib. de Bello Canepic. in princ. Rer. Ital.* tom. XVI.

(*c*) *Flumen Nuriæ, quod diſtat a civitate per quatuor milliaria, eſt optimus Fluvius pro terris impinguandis, & pro pannis laborandis; non eſt enim terra ita mala, ſi irrigetur ab aqua iſta, quod non efficiatur optima, & eſt Fluvius ſatis magnus. Fluminis Treviæ aqua mala eſt pro terris; nam eas facit macras. Rer. Ital. T. XVI. p. 561.*

collines, qui s'élargiſſent à *Ivrée*, & ſe retréciſſent de nouveau à *Maſſé*. Les Lacs de *Viverone*, & de *Candia* en ſont des parties, qui ayant une plus grande profondité, ne laiſſerent point écouler toutes leurs eaux. La partie à la gauche de la riviére étoit plus grande que celle de la droite. AZARIUS, qui le décrit, aſſure qu'on voyoit dans le Comté de *Mazin*, & près de *Viverone* les murailles des Ports qu'il y avoit ſur ce Lac, & les anneaux de fer, auxquels on attachoit les bateaux. L'eau de la *Duria*, qui couloit dans le Pô, ayant élargi le détroit de *Maſſé*, entraina avec elle la plus grande partie des eaux du Lac. La Table Théodoſienne en marque un conſidérable à la ſource de cette riviére; PTOLÉMÉE l'appelle le Lac *Poenin*, & dit que la *Doria* avoit ſa ſource à côté de ce Lac. (*a*) Ils ne marquent pas des Lacs ſi petits que celui de *Ruto*, duquel coule une de ſes deux ſources. Il ſemble donc qu'on en puiſſe conclure que la Vallée de *Courmajeur* dans laquelle coule l'autre ſource ait été occupée par un Lac dont les eaux ſe ſoient de même écoulées. Cette table marque auſſi un *Lacus Cuſius* à la ſource d'une riviére ſans nom, qui ne peut être autre que la *Séſia*. Il eſt aſſez vraiſemblable que le Lac, dont coule cette riviére, ait été beaucoup plus grand; un Auteur, qui décrit exactement le Diocéſe de *Novare* (*b*), aſſure que les Villages qui ſont dans le fond de la Vallée de *Séſia* ſont aſſez nouveaux. Le même Auteur décrit un autre Lac de quelques trois milles de long & de large, qui étoit près de la *Seſia*, entre *Prà*, & *Grinaſco*, dont l'eau a écoulé avec celle de cette riviére; & une partie du Lac *Majeur*, qui a été remplie par le limon porté par la riviére Toſa. Quoique les trois grands Lacs (*c*) n'ayent pas été depuis pluſieurs ſiécles retrécis dans leur longueur par les

(*a*) Geogr. l. III. c. 1.
(*b*) CAROL. a BASILICAPETRI, *Novaria*.
(*c*) *Majeur*, *de Come*, & *de Garda*.

les fleuves qui les traverſent : les meſures qu' en donnent les anciens, & les modernes étant à peu près égales; (*a*) cependant les pierres, & le ſable qu' ils y portent, & que leur courant roule bien avant dans le Lac, en rehauſſent néceſſairement le fond; ce qui fait que l' eau s' y ſoutient encore à une hauteur à peu près égale à celle qu'ils avoient il y a deux milles ans, quoique il en écoule par les riviéres, qui en ſortent, plus qu' il n' y en entre.

Tant de fleuves qui prolongent le continent à leurs embouchures, comme j' ai prouvé à l' égard du Pô, & qui rehauſſent de leur limon le fond de la Mer, tandis qu' ils la reſſerrent de tous côtés, doivent contraindre ſes eaux de s' élevér ſenſiblement, & de ſubmerger les Terres qu' elles baignoient, qui deviennent toujours plus baſſes que le niveau de la Mer. Quelques Naturaliſtes, qui ont tâché d'établir le contraire, c'eſt-à-dire, que la Mer s' éloigne toujours plus des côtes, & que les eaux ſe retirant continuellement dans les cavités de la Terre, laiſſeront enfin le fond de la Mer en ſec : qu' au commencement la Terre ſeche ne conſiſtoit que dans un' Isle, dont les bornes s'étendirent juſqu' à former les vaſtes Continens, qui ſont aujord'hui découverts, ont tiré cette conſéquence d' obſervations trop bornées. M. LINNEUS (*b*) entr' autres, la déduit de celles qu'il à faites dans le Golphe *Bothnique*. Ce Golphe long & étroit, dans lequel ſe décharge un grand nombre de fleuves, qui y portent beaucoup de pierres, & de limon, deviendra toujours plus retréci; & ces fleuves qui déſcendent de Montagnes fort hautes, & qui après un cours peu long, mais d' autant plus rapide, déchargent leurs eaux dans la Mer, ſe creuſent dans plaine qu'ils parcourent des lits toujours plus profonds (*c*) mais

(*a*) POLYB. apud STRAB. lib. IV. in fine, Itin. ANTON., VAGLIANO *le Rive del Verbano*, PAULI JOVII *Larii Lac. deſcr.*

(*b*) *Diſſert. de Tellure habitabili* in vol. II. *Amœnit.*

(*c*) Les Lacs, qui ſont ſi néceſſaires dans ce Pays, y ſont fort étendus & en grand nombre.

il en auroit déduit tout le contraire s' il eut obſervé que même dans la Mer *Baltique* l' Isle de *Rugen* étoit autrefois une partie du continent; que la Mer a beaucoup gagné ſur les côtés Occidentales du *Dannemark*, & ſur celles de la *Friſe*; que dans les *Pays-Bas* l' eau du *Rhin* ayant ceſſé de couler par l' embouchure du Lac *Flevo* la Mer y entra, & ſubmergea une grande étendüe de Pays (*a*); &, ſans chercher plus loin des exemples, qu' elle entra de même par l' embouchure du Pô *Vergeneſe*, y forma un Lac, qui n' avoit encore dans le XVI ſiécle que 12 milles de circuit, mais qui ſubmergeant de plus en plus les terres voiſines, en a aujourd'hui 60.; qu'on voit le long des côtes de la Méditerranée les ruines de pluſieurs Villes au milieu de ſes eaux &c. La ſurface de la Terre doit enfin plus perdre que gagner (*b*); & ſi la Révélation ne nous enſeignoit pas qu'elle ne doit plus éprouver un déluge (*c*), mais un embraſement (*d*), on en devroit conclure que dans la ſuite d' un grand nombre de ſiécles elle ſeroit toute couverte par les eaux.

(*a*) Occupé aujourd'hui par le Golphe appellé *Zuider zée*.
(*b*) *Mons cadens defluit, & ſaxum transfertur de loco ſuo. Lapides excavant aquæ, & alluvione paullatim terra conſumitur*, JOB. XIV. 18. 19.
(*c*) Geneſ. IX. v. 11. ec.
(*d*) PETR. epiſt. II. v. 7. 10. 12.

Fautes à corriger.

Pag. 28. *ligne* 7 quarrée, *lisés* quarré.
Pag. 8. *ligne* 22. démontrent, *lisés* démontrant.

Pag. 47. *linea* 3. ☋ ☌ ☍ ☌ . *lege* ☋ ☌ ☍ ☌

Pag. 51. *linea* 6. *in nota* subtiliori *supple* acumini.
Pag. 53. Post Sciagraphiam *adde* titulum progressus graduales combinatorius.
Pag. 54. *linea* 25. Isquierdo, *lege* Izquierdo.
57. *linea* 2. ☉, ... (☉).
61. *linea* 1.

☿ ☌ ☍ Hinc ☿ ☌ ☍ *lege* ☿ ☌ ☍ Hinc & ♀, ♃ ☿ ☌ ☍

linea 2. ☌ ergo ♀ inter & nulla ♃, *lege*

☌ ergo ♀ inter & nulla ♃.

Observandum indiscriminatim a Typothetis appositum fuisse το ☌ pro *&*, & *vel*.

Loco ♄ ☌ ♄ *lege* ♄ ☌ ♄ ubicumque recurrit.

το a, το non a cursivis litteris pingendum erat.

Pag.	69.	*lign.* 7.	Are . . .	Ere
	72.	26.	des fleuves	du fleuve
	78.	15.	da . . .	de
	90.	1.	les fleuves	ces fleuves
	91.	30.	ce . . .	de
	92.	11.	tous . .	ſous
	100.	8.	place . .	plaine
	102.	*Note* (*e*)		(*e*) Plin. lib. II. c. 80.

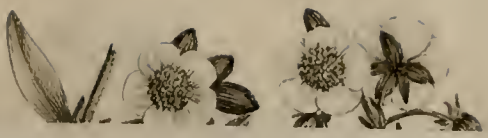
Imprimatur. PISELLI Vic. Gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la Stampa

GALLI per la Gran Cancellería.

Laureturn
Porto del
delle
Po, o
Fornaci
ATRIA
ADRIA
Bizonetta
Fossiones Philistinæ
seu Ostia Tartari
Portus Adriæ
Ramo di Levante
Corbula
Carbonaria Fossa
Maria
Baglioncina
Baratofano
Bocca dell'Arino
Sbocco dell'Asinino
Taglio di Portoviro
Hadrianum
Po di

Milles Romains anciens
CARTE
DU COURS DU PO
ANCIEN ET MODERNE
Par M. Carena 1761
Adige F.
Athesis Fl.
Adigetto F.
Tartarus Fl.
Fossa Philistina
Padus Fl.
Fossa Alta
Ulmus Formosa
Vicus Aureolus
Golotrasa
Rupta Ficaroli
Burana
Colicaria
Ansa Regina
Aqualonga
Via Mutinensis
Septem Pollicinia
Bondeno
FERRARA
Vicus Magnus
Vicus Varianus
Lacus Vetrens
Forum Alieni
Pons Ducis
Fossa Munda
Rheni Ostia
Scultenna Fl.
Nonantula
Gallicus Fl.
Gena Fl.
Agger
Galeria
Maletum
Persicetum
Canal di S. Giovanni
Media Fl.
Lapinus Fl.
Forum Cæsarum seu Gallorum
Mutia
Via Æmilia
Medias Palus
Rhenus
Minervium
Savena Fl.
Zena F.
Sapina
Idex Fl.
Budrio
Centonara F.
Claterna Fl.
Galliana
Canale di Medelana
Ad Sextum
Silarus Fl.
Correcchio F.
Canale d'Imola
BONONIA
CLATERNA
Galliana
FORUM CORNELII
vel SYLLA posteà IMOLA
Caput Silicis
Lucus
Valrenus Fl.
Fanum Iovis obscen.
C. Tiberiacum
MELISA
CÆSARENA
Via Faventina
Amano
Vitis Fl.
Sintius
Ad Flexum
Vicus Arca
Salectum
Ecubaria
Tamara
Rupina
Po Grande
Lacus obsc.
Contrapadum
Albareta
Donorium
Caput Eridani
Forum Novum
Cros Calles Rerum
Medelana
Finis
Vicus Aventinus
Vicus Iria
Eridanus Fl.
Fossa Eridani
Ustulatus
Massa Fiscalia
Melariolus Fl.
Sandalo
Luibula
Verbens
Madrasia
Villa Magna
Caput Sandali
Paludes et Piscariæ
Ludurium
Bocelletum
Argenta
Augusta
Spinus Fl.
Santerna
Padus Renus
Fossa Philistina
Tartarus
Fossa Canda
Tercenta
Seriana
Balneolum
Petra postea Wangaditia
Bonus Vicus p. Rhodigium
Tartarus Fl.
Fossa Philistina
Paludes di Venezia
Po di
Corbula
Carbonaria Fossa
Maria
M. ad VII
Hadrianum
Ostia Plena
Portus Gauri
Caput Gauri
Volana
Ostium
Porto di Volana
Silva Ducarisa
Lacus I.
Segis Ostium
Fossa Lateralis
Fossa Batocrena
Tribba
I. COMACINA
Hellia
Caprasiæ Ostium
Porto di Magnavacca
Ibrto di Primaro
Palatium ad Blachernas
Monasterium ad Memoriam Regis Teuderici, seu ad Pharum.
Portus Eridani
RAVENNA
Portus Classis
CLASSIS
Pinetum Caudiani
Lauretum
Fossiones Philistinæ seu Ostia Tartari
Portus Adriæ
Ramo di Levante
Baratofano
Bocca dell'Asino
Sbocco dell'Asinino
Busa delle Tole
Bocca del Camello
Bocca della Scovetta
Bocca della Gnocca
Porto del Goro
Taglio di Porvoiro
Riv. di Mezzo
Mediana Gauri
Compagnia
S. Maria
Volane
Massa Vicecomitis
Massa Lacus Sanctus
Ariano
Lago Fl.
Gabellus Fl.
Gabellum
L.
Hostilia
Ramanus



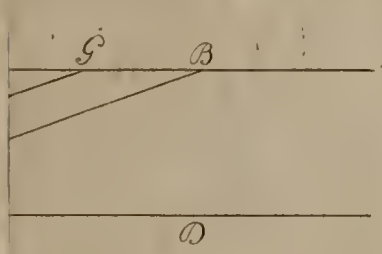
S

T. I.

T. II

T. III.

T. IV.



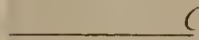
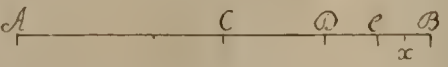


Fig. 4.

Fig. 5.



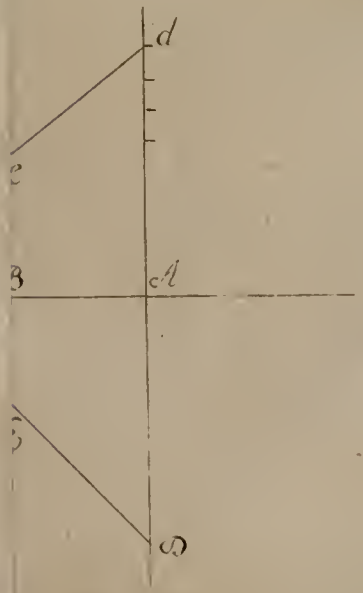


Fig 1.

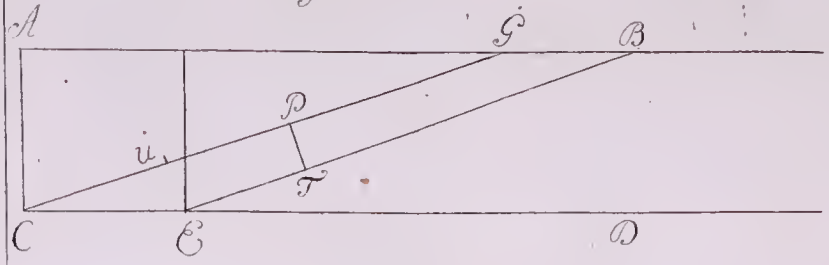


Fig. 2.

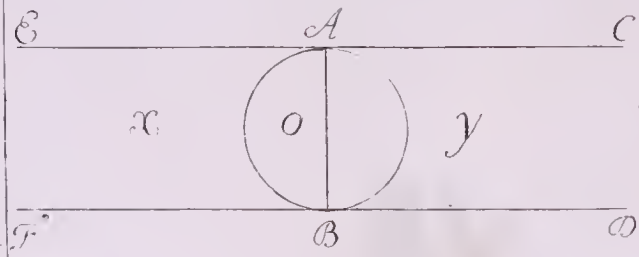


Fig. 4.

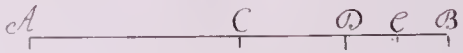


Fig. 5.

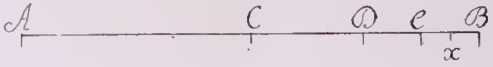
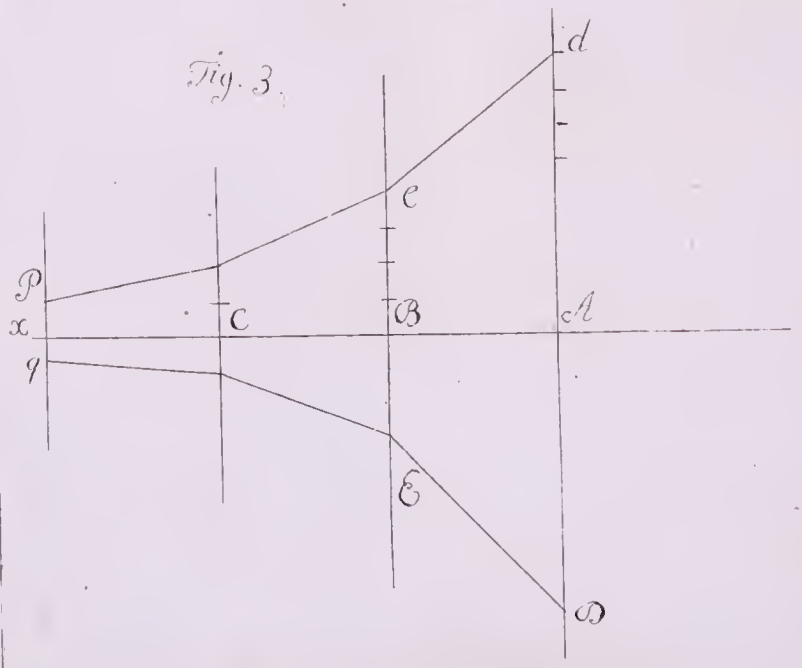
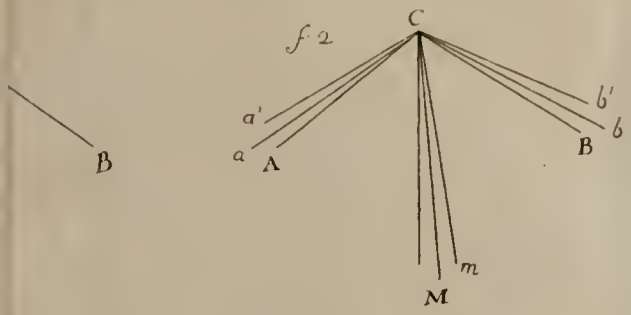
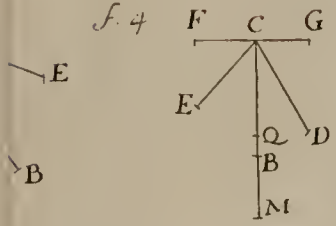
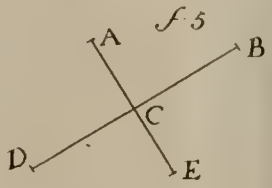


Fig. 3.

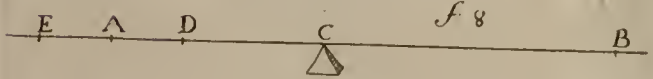


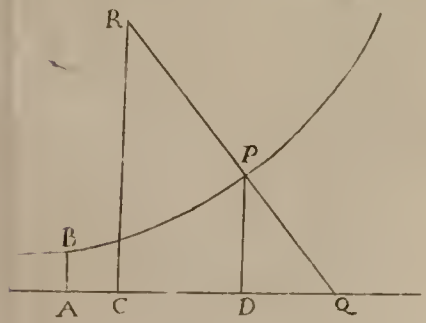

f 2
C
a'
a
A
B
b'
b
B
m
M


f 4
F
C
G
E
E
Q
D
B
B
M


f 5
A
B
C
D
E

3
E
A
C
B
D
f 7

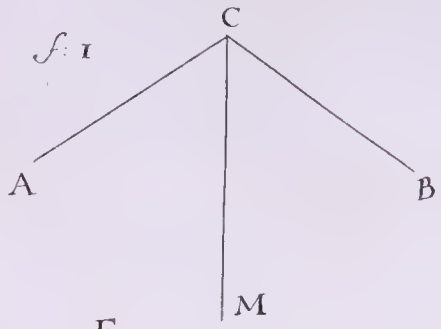

E
A
D
C
f 8
B


R
P
B
A
C
D
Q

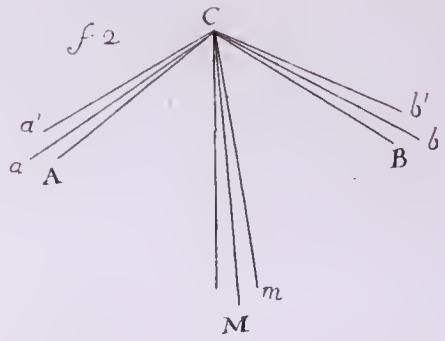
Pour le Mem: de Mr de Foncenex

Planche 4e

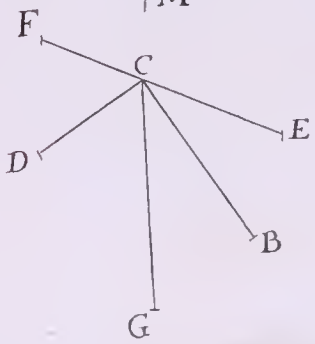
f: 1



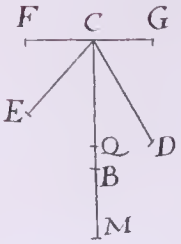
f: 2



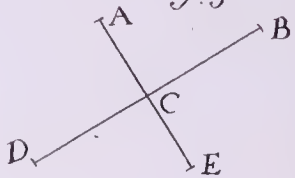
f: 3



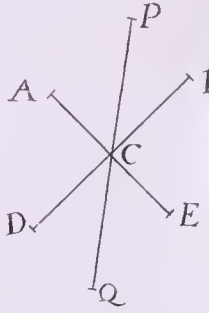
f: 4



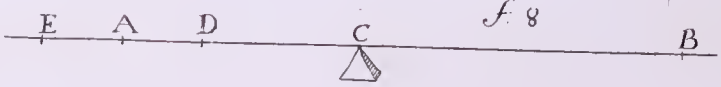
f: 5



f: 6

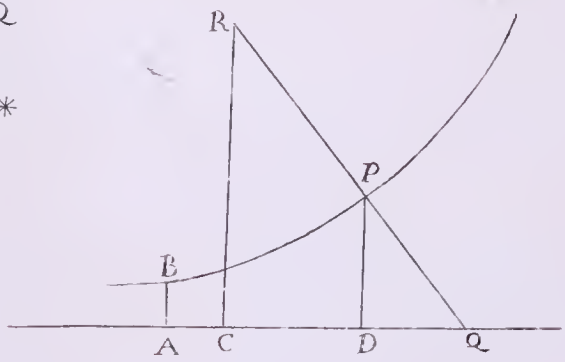


f: 7

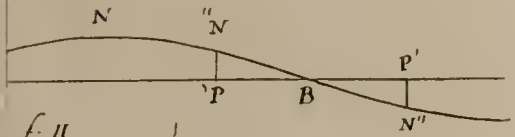


f: 8

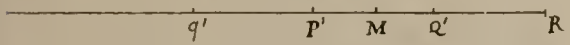
f: *

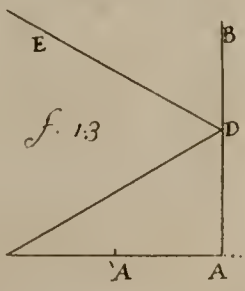


f. 10

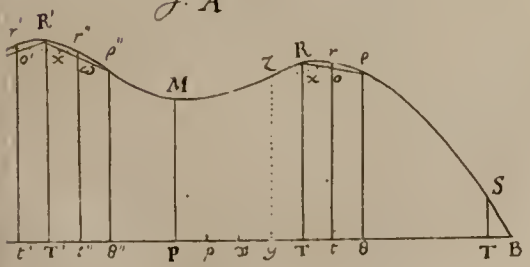


f. 11

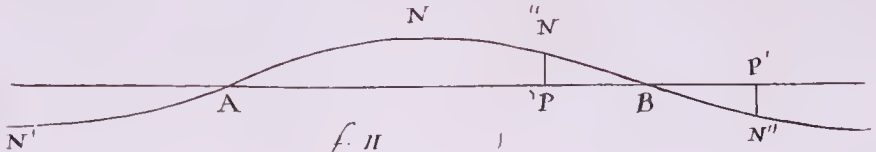




f. A



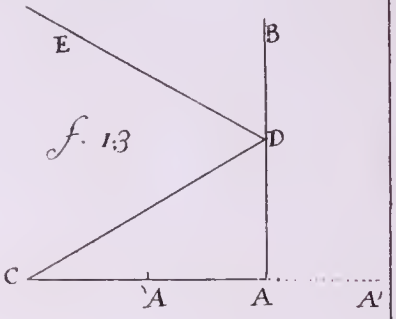
f. 10



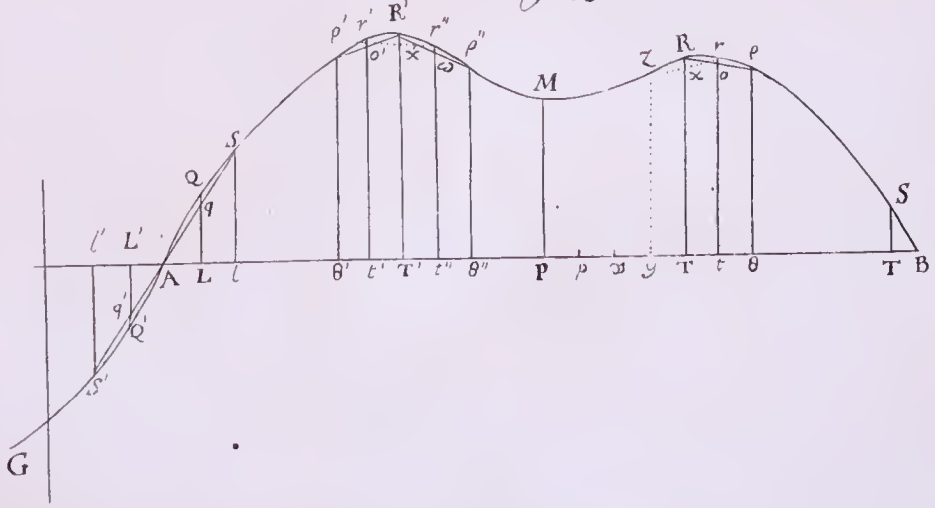
f. 11

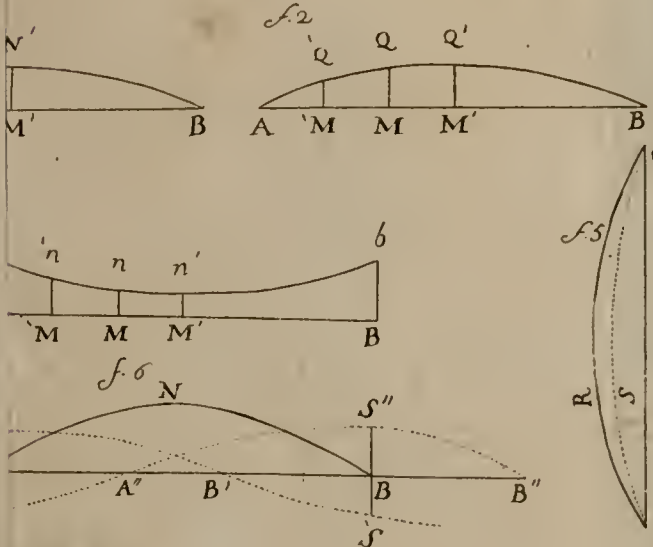
f. 12

f. 13

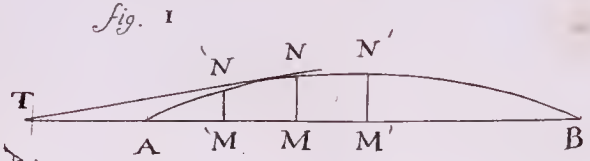


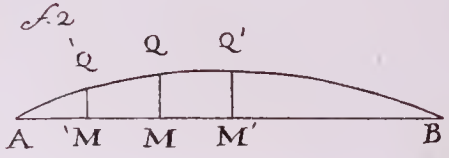
f. A

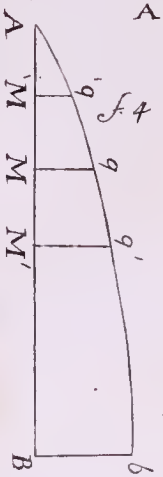


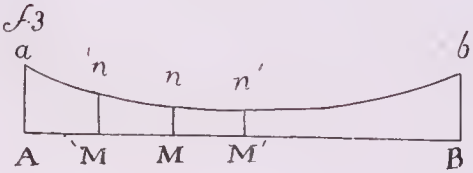

N'
M'
B
f.2
Q
Q
Q'
A
M
M
M'
B
B
f.5
S
R
A
n
n
n'
b
M
M
M'
B
f.6
N
S''
A''
B'
B
B''
S
f.7
N
S''
A''
B'
B
B''
N''
f.8
n
b
n''
B
b
9
9''
B
f.9
P
Q
P'
Q'

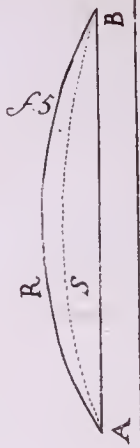
Pour les Recherches sur le Son.

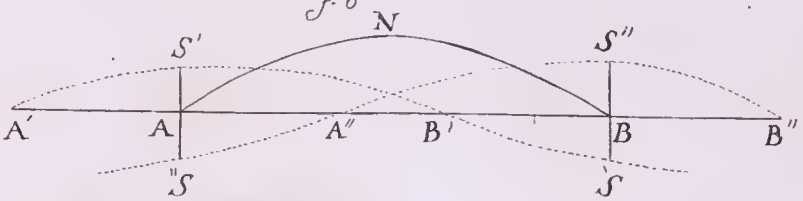


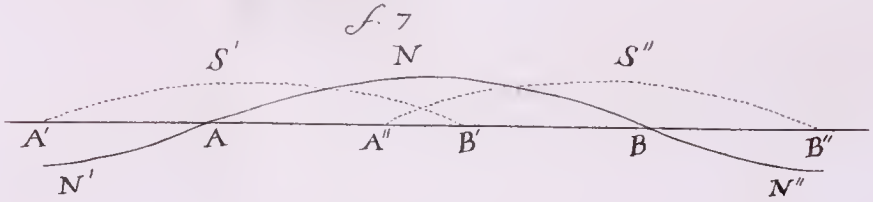


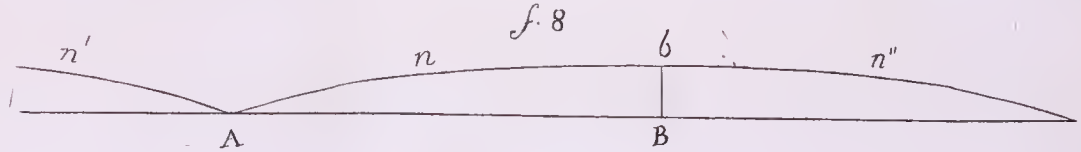


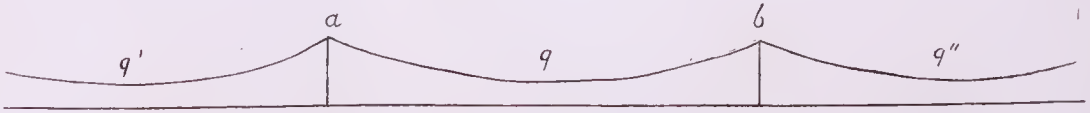


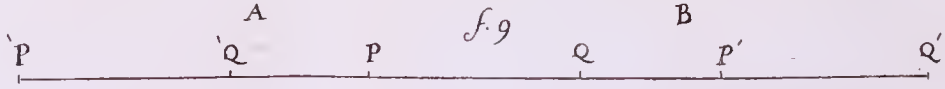




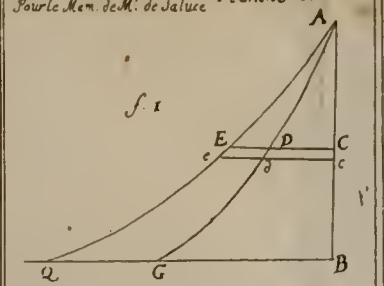






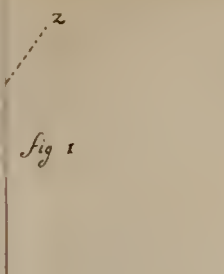


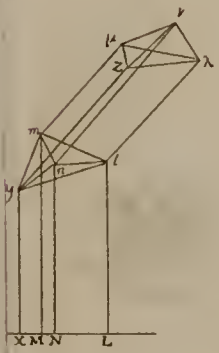
Pour le Mém. de M.r de Saluce Planche 1.e



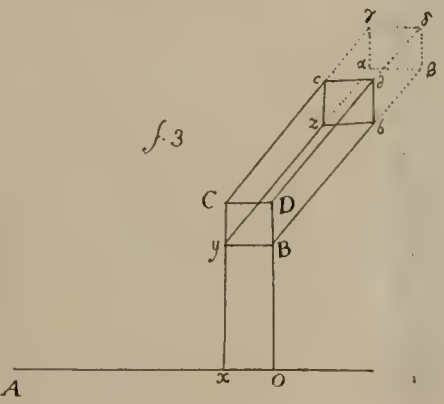
f. 1

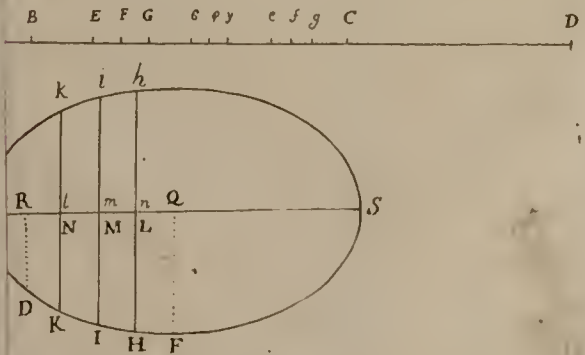
fig 1





f. 3





Pour le Mém. de M.r Euler

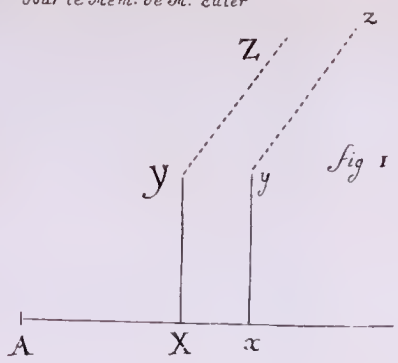
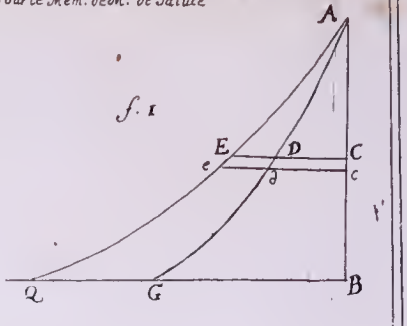


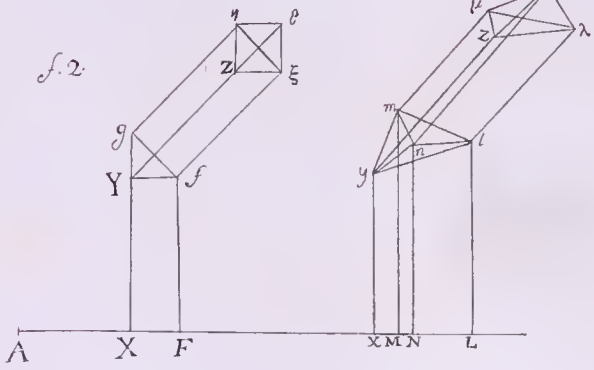
fig 1

Pour le Mém. de M.r de Saluce

Planche 1.e



f. 1



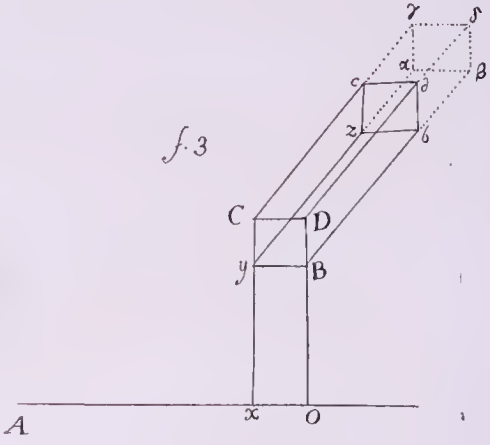


fig. *

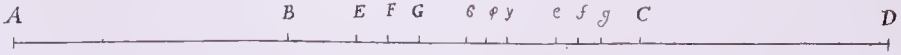
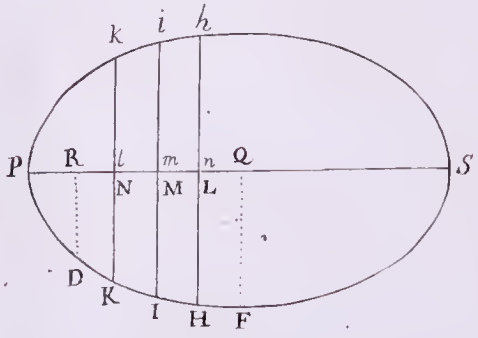



fig: * *